ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

Э. М. БРАВЕРМАН, М. И. ЛЕВИН

НЕРАВНОВЕСНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

32.965.9
Б 87
УДК 62-50

Неравновесные модели экономических систем. Браверман Э. М., Левин М. И.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.— 304 с.

Книга посвящена описанию и исследованию нового, введенного авторами, класса математических моделей, предназначенных для анализа неравновесных экономических ситуаций. Рассматриваемые неравновесные модели позволяют расширить тематику задач управления экономическими системами, которые удается изучать средствами математического моделирования. Формализованы понятия дефицита, «узких мест» и эффективности в условиях неравновесных цен, что позволило разработать теорию управляемости таких систем.

Монография предназначена для специалистов по управлению сложными системами, математиков и экономистов, профессионально занимающихся теорией управления и математической экономикой; предусмотрена возможность изучения основных идей книги и теми, кто не имеет специальной математической подготовки, но интересуется экономикой и организационным управлением.

Б $\frac{30501-123}{053(02)-81}$ 166-81. 1502000000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Эта книга — итог многолетней работы недавно скончавшегося Э. М. Бравермана и его ученика и сотрудника М. И. Левина, посвященной математическому описанию и исследованию свойств неравновесных моделей производственно-экономических систем. К началу 70-х годов Эммануил Маркович Браверман, работавший над самыми разнообразными задачами из той безграничной области, которую называют «управлением в сложных системах» (он известен, в частности, как один из создателей теории обучения машин и машинной обработки больших массивов информации), вплотную занялся давно интересовавшими его задачами экономики как объектом математического моделирования. В то время к экономико-математической теории обратились многие специалисты из других областей прикладной математики и теории управления, привлеченные проблематикой и богатыми возможностями методов и моделей математической экономики. Весьма привлекательными для «управленческого» анализа представлялись хорошо разработанные оптимизационные и равновесные модели, описывающие экономику как систему взаимосвязанных объектов, управляемых или самоуправляющихся по принципу стремления к оптимуму или равновесию в «классическом» смысле.

Теперь, по прошествии десяти лет, уже можно оценить научную интуицию Э. М. Бравермана, не ограничившегося такими классическими подходами к моделированию «идеальной» экономики, а задавшегося целью предусмотреть в модели существенную «неклассичность» — неравновесность и неоптимальность — реализуемых состояний экономической системы. Сюда относится, в первую очередь, неравновесность цен, а с ними и реализуемых производственных режимов и потоков продуктов, что влечет за собой такие явления, как дефицитность продуктов, «натуральное» лимитирование производства и потребления и прочие «неклассические» эффекты, по существу чуждые традиционным моделям. В 1972 г. Э. М. Браверман опубликовал работу по анализу предложенной им экономической модели производства при неравновесных ценах. Это была первая из серии публикаций, в которых Э. М. Браверман ввел в рассмотрение неравновесные модели производственных и замкнутых производственно-потребительских систем, сформулировал понятие «равновесие» в таких (неравновесных в классическом смысле) моделях и получил первые аналитические результаты, впоследствии расширенные и углубленные им и М. И. Левиным. В частности, совершенно оригинальной является предложенная Э. М. Браверманом модель потребительского выбора (спроса) в условиях дефицита, где неравновесные цены играют лишь роль параметра, а не роль основной независимой переменной, как в классической теории потребительского спроса. Тем временем стали появляться сначала единичные, а затем и довольно многочисленные зарубежные публикации, в которых независимо от модели Э. М. Бравермана предлагались другие (хотя и довольно близкие по духу) обобщения классических моделей детального экономического равновесия применительно к ситуации неравновесных цен. В настоящее время «неравновесная» проблематика образовала целое перспективное направление в современной экономико-математической теории, и цикл работ Бравермана и Левина стал одним из истоков этого направления.

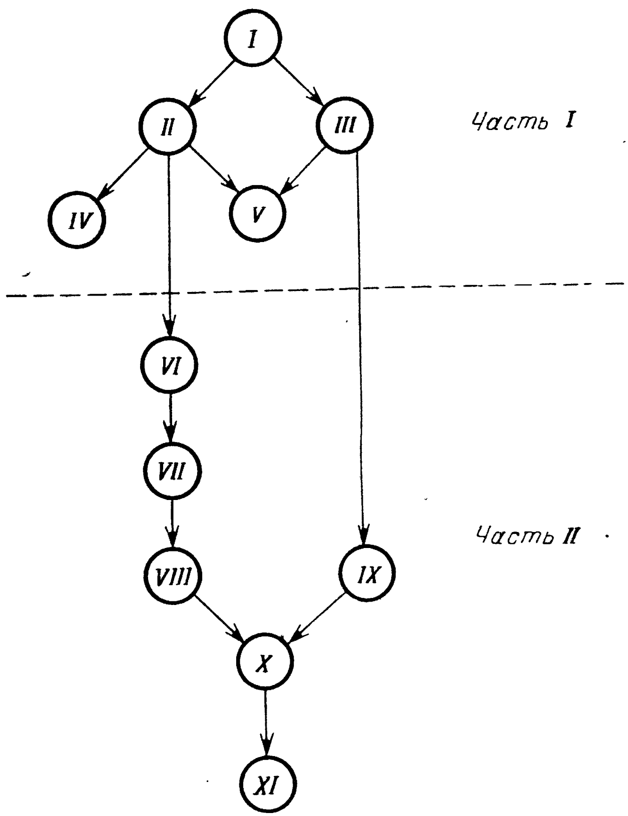
Преждевременная смерть Эммануила Марковича Бравермана не позволила ему завершить оформление этого цикла и подготовку задуманной книги. Заканчивал книгу М. И. Левин, вместе с другими сотрудниками Э. М. Бравермана приложивший все усилия к тому, чтобы она предстала перед читателем как по возможности цельное и доступное изложение материала, публиковавшегося ранее лишь в довольно разрозненном виде. Можно лишь предполагать, какие усовершенствования внес бы в эту работу сам Эммануил Маркович, никогда не упускавший возможности найти новый поворот в исследовании и в изложении результатов. Мы надеемся, что и в нынешнем виде книга отразила то сочетание углубленного интереса к содержательным задачам и умения найти и применить подходящий математический аппарат, которое отличало всю научную деятельность Э. М. Бравермана. Этот живой интерес и вкус как к трудным формальным задачам, так и к проблемам реального мира, характерный для Эммануила Марковича, запомнился каждому, кому довелось с ним работать или просто общаться.

Эту книгу можно рекомендовать всем интересующимся теоретическими проблемами управления экономическими системами. Хотя все сведения, нужные для ее связного чтения, в ней содержатся (за немногими исключениями, снабженными отсылкой к источникам), но определенный навык чтения экономико-математической литературы у читателя будет не лишним. Впрочем, к достоинствам книги с точки зрения читательского удобства, по-видимому, можно отнести ее «двухслойное» и даже «трехслойное» построение: первый параграф каждой главы включает изложение, на чисто словесном уровне, содержания главы в целом, а в тех случаях, когда утверждения основного текста главы требуют особенно утомительных и громоздких доказательств, такие доказательства выносятся в отдельный параграф. Поэтому книга может быть адресована и тем, кого могла бы отпугнуть сложная математическая «кухня» (и которой в ряде глав немало), но кто готов следить за логикой рассуждений «без математики».

Остается выразить надежду, что найдутся читатели, которых предмет этой книги — неклассические модели экономики и экономического управления — заинтересует настолько, что вызовет желание продолжить исследование самостоятельно.

Л. И. Розоноэр
А. В. Малишевский

ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СВЯЗИ ГЛАВ В КНИГЕ



ВВЕДЕНИЕ

Для чего предназначены неравновесные модели экономических систем

В заглавии этой книги фигурирует термин «неравновесные модели»; подразумевается противопоставление их «равновесным» моделям экономических систем, а поэтому уместно сказать сначала несколько слов о понятии равновесия. Под равновесием в экономико-математической теории понимается такое состояние экономической системы из многих взаимосвязанных участников, когда ни один из них не заинтересован в изменении состояния — в том смысле, что он не может добиться улучшения своего состояния в рамках имеющихся у него возможностей. Это общее понятие равновесия в «классической» математической экономике (связанной с именами Л. Вальраса, В. Парето, Дж. фон Неймана [15, 17, 19]) конкретизируется в специфических моделях возможностей, интересов и поведения участников. Обычно участники подразделяются на производителей и потребителей; в системе циркулируют продукты из заданной номенклатуры и установлены единые цены на них; каждый производитель выбирает и реализует некоторый технологический процесс переработки одних продуктов в другие, руководствуясь критерием максимума прибыли в установленных ценах; каждый потребитель выбирает и приобретает наиболее желательный для себя набор продуктов, в пределах своего бюджета. Для того чтобы так организованная экономическая система была работоспособной, нужно, чтобы реализующееся состояние ее оказалось сбалансированным по материальным потокам продуктов, т. е. чтобы суммарное производство (предложение) каждого продукта было не меньше его суммарного потребления (спроса) и, более жестко, чтобы было в точности равно ему. В этом случае состояние системы называется экономическим равновесием, а цены, при которых установилось равновесие, называются равновесными [15, 17, 19, 28, 29].

Особая роль цен проявляется в том, что в «классических» моделях такого рода они служат регулятором, балансирующим спрос и предложение. С точки зрения теории управления такая экономическая модель — это достаточно сложный объект. Даже если временно отвлечься от того факта, что система состоит из многих взаимосвязанных и «самоуправляющихся» участников, и рассматривать только результирующий суммарный спрос и суммарное предложение с их стороны, то кажущийся простым способ уравнивания предложения данного продукта со спросом на него путем изменения его цены в соответствующую сторону может, как известно, приводить к непростым и неожиданным результатам. Дело здесь в том, что различные продукты в силу их «качественных» технологических и потребительских свойств могут находиться один с другим в отношениях «заменимости» (как нефть и уголь) либо «дополнительности» (как автомобили и бензин). Эти отношения проявляются, в частности, в том, что повышение цены, скажем, на нефть, согласно модельным представлениям снизит спрос и (или) повысит предложение нефти, но одновременно повысит спрос на уголь и понизит спрос на автомобили и многие другие продукты. Это приведет к изменению цен на ряд продуктов, и лавина дальнейших изменений, распространяющаяся по системе, может привести даже к заранее не предвидевшимся качественным последствиям. Но с другой стороны, если уж в модели экономической системы установились равновесные цены, то это означает не только ее материальную сбалансированность (по определению), но гарантирует ряд свойств «эффективности» («оптимальности») состояния равновесия (в общем случае — в расширенном, векторном или теоретико-игровом понимании «оптимальности»). Доказательства существования состояний равновесия в «классическом» смысле — при равновесных ценах — а также исследования упомянутых примечательных свойств таких состояний, можно сказать, оформили определенный этап в экономико-математической теории [17, 19, 29]. Тем самым модели экономических систем предстали как важный и удобный объект для выработки методов управления сложными системами (таких, как блочно-декомпозиционные процедуры оптимизации и т. п. [23, 31, 34]).

Однако изучение функционирования экономических моделей при предположении, что в них устанавливаются равновесные цены, все же существенно сужает поле исследования. Из содержательных соображений ясно, что поведение элементов экономической системы при произвольных ценах, быть может, далеких от равновесия, и связанные с этим экономические феномены, такие, как нехватка одних продуктов и избытки других, невозможность независимого, полностью «автономного» выбора решений отдельными участниками системы, появление дополнительных ограничений на «дефицитные» продукты и т. п.,— все эти явления, в общем, чуждые «классической» теории, представляют большой интерес для изучения методами математики и теории управления. Чисто интуитивные представления здесь зачастую оказываются еще более обманчивыми, чем в «классической» сфере экономики самоуправляемых участников, регулируемых общесистемными ценами. Установление ограничения на продукт, которого стало «не хватать», может приводить к неожиданным изменениям ситуации со связанными с ним другими продуктами (заменяющими либо дополняющими его). Более того, наличие ограничений на потребление и производство продуктов может искажать или даже полностью уничтожать информацию (типа величин спроса и предложения или хотя бы знака разности этих величин), которая в «классической» ситуации позволяет организовать регулирование (или саморегулирование) системы. Наличие ограничений может совершенно лишать обычного смысла, например, понятие «потребительский спрос». Что означает спрос на синтетические ткани, если известно, что не хватает тканей из натуральной пряжи? Или спрос на кофемолки, когда не хватает кофе? Если этот спрос оказался ниже предложения, означает ли это, что надо сворачивать выпуск кофемолок? Даже сам факт «дефицитности» продукта, так сказать, его «репутация» как дефицитного, может существенно искажать поведение потребителя. Проиллюстрировать это может известная шутка о черной икре, на которую нет спроса, поскольку покупатели о ней забыли. Но дефицит и вообще несбалансированность экономики — вещь серьезная, и анализ подобных явлений на уровне хотя бы простейших, но строгих в математическом отношении моделей может иметь важное значение. Попытка такого анализа и предпринята в этой книге.

Книга представляет собой расширенное, переработанное и систематизированное изложение результатов анализа «неравновесных» моделей экономики, в основном опубликованных авторами ранее в различных журналах и сборниках [3—12, 20, 21]. Надо сказать, что «неклассическая» тематика возникла в экономико-математической теории довольно давно. Время от времени в литературе появлялись работы, учитывающие эффект «рационирования» — натуральные ограничения на использование некоторых продуктов и их влияние на поведение «классического» производителя и потребителя (см., например, [47] и обзор [40]). В неявной форме необходимость соблюдения общих натуральных ограничений при произвольно текущих ценах учитывалась в анализе процессов чистых обменов и установления равновесных цен «без нащупывания» [28]. Работа Дж. М. Кейнса [18], открывшая целое направление экономической «макротеории», одновременно была пионерской работой в регулярном исследовании «неравновесия» как стационарного состояния системы. Однако до недавнего времени не было работ по моделированию стационарных состояний систем, находящихся в неравновесии (при неравновесных, в классическом смысле, ценах), так сказать, «неравновесных равновесий», в которых системы моделировались бы на «микроуровне» отдельных продуктов, отдельных отраслей, отдельных производителей и т. п. Лишь в 70-х годах стали появляться зарубежные работы такого характера, посвященные исследованию «вре́менного равновесия», «равновесия при количественном рационировании», «равновесия при фиксированных ценах» (см. [35—38, 41, 42], а также достаточно полный обзор [40]). Конкретная тематика и результаты этих работ, однако, почти не пересекаются с нашей книгой. В цитированных работах главным образом исследуются вопросы существования специфических состояний равновесия, порождаемых заранее заданными или как-либо охарактеризованными «схемами рационирования» продуктов — большей частью в системах «чистых обменов» между потребителями [40—45], хотя имеются и модели, включающие производство [35—37, 42]. Мы же в первую очередь анализируем логику самих понятий типа «ограничений-квот», «дефицита», «сбалансированности», «реализуемости» (технологической и экономической), «равновесности», «эффективности», «экономичности» и т. п., отражающих специфику «неравновесных» систем, и изучаем свойства таких систем и стационарных («согласованных») состояний в них независимо от происхождения этих состояний.

Основные вопросы, которые нас интересуют, таковы. Что такое «согласованные состояния» («равновесия») в экономической системе при произвольных ценах и при ограничениях? Какую роль играют ограничения-квоты на выпуски одних (избыточных, или недефицитных) и затраты других (дефицитных) продуктов? Существуют ли равновесия при каких-либо ограничениях-квотах? Если существуют, то чем они примечательны? Имеют ли они какие-либо содержательные и формализованные преимущества перед прочими состояниями? Каковы «лучшие» в каком-либо смысле среди них? Как достигать «лучших» состояний? Как улучшать текущее состояние, если это возможно? Конкретно, когда и как можно увеличить выпуск продуктов в производственной системе, преодолев сдерживающее противодействие со стороны «дефицитных» поставок? На эти и другие вопросы такого рода мы и ищем ответ в наших моделях.

Книга состоит из двух частей. Часть I содержит исходные определения и свойства неравновесных моделей и согласованных состояний в них. Часть II посвящена изучению возможностей управления такими моделями путем целенаправленных изменений согласованных состояний. В каждой из 11 глав книги первый параграф содержит сводку результатов всей главы «без формул»; кроме того, начальная глава каждой из двух частей (гл. I в части I и гл. VI в части II) содержит описание проблематики всей этой части книги в целом. Математический аппарат, применяемый в книге, прост (или сложен) настолько, насколько это позволила (или этого потребовала) каждая конкретная задача; диапазон его — от простейших логических выводов до довольно громоздких построений с применением «нестандартных» теорем о неподвижной точке (Эйленберга — Монтгомери). Впрочем, особенно трудные математические доказательства мы вынесли в отдельные параграфы, и их можно опускать при первом чтении. В целом книга должна быть вполне доступна специалистам по математической экономике, по теории управления, по исследованию операций и т. п., имеющим навык обращения с тем математическим аппаратом, который входит в общепринятый арсенал экономико-математической теории. В то же время мы при написании этой книги имели в виду и другой круг читателей — широкий круг экономистов и специалистов по управлению, не работающих профессионально в области математической экономики, но проявляющих интерес к подходам и результатам экономико-математической теории. На них рассчитаны глава I (открывающая часть I) и глава VI (открывающая часть II), а также первые параграфы всех глав.

Для ориентировки укажем вкратце распределение тематики книги по частям и главам. Вся первая часть книги посвящена формулировкам основных определений «неравновесных равновесий» в экономической системе в целом (гл. I), в ее производственной (гл. II) и потребительской (гл. III) подсистемах. В гл. IV изучаются «статические» свойства состояний экономических систем при неравновесных ценах, а в гл. V — динамика «самопроизвольного» изменения цен.

Вторая часть книги посвящена анализу возможностей управления экономической системой при фиксированных ценах с целью «улучшения» состояний системы. В гл. VI анализируются общие возможности использования качественной информации и ограниченных средств воздействия на систему. В гл. VII и VIII исследуются методы целенаправленного изменения режимов производства путем «расшивки узких мест», а гл. IX посвящается сравнительному анализу потребления. В гл. X результаты предыдущих глав используются для анализа достижимости наилучших («неулучшаемых») состояний системы в целом. Наконец, гл. XI посвящена приложению всех этих результатов к более специальному классу моделей «комплектного» производства. Таково развитие сюжета этой книги.

Нумерация формул в каждой главе начинается заново; ссылка на (15) означает ссылку на формулу (15) в этой же главе, а на (3.15) — на формулу (15) в главе III.

Часть I

СОГЛАСОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЦЕНАХ

Глава I

ЧТО ТАКОЕ НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 1.1. Как может функционировать экономическая система и поддерживаться экономическое равновесие при неравновесных ценах

Как уже было сказано во введении, обычная модель экономической системы «классического» типа содержит управляющие параметры одного рода: это — цены. Установив специально подобранные «равновесные» цены, можно (разумеется, в рамках определенных модельных предположений) обеспечить «автоматическое» балансирование спроса и предложения при выборе каждым элементом экономики (производителем и потребителем) своего состояния, исходя из собственных интересов. Цены при этом выступают как носитель «общественной» информации и, конкретнее, как средство управляющего воздействия на решения, принимаемые автономными элементами: цены входят в прибыль, максимизируемую производителем, и в бюджетное ограничение потребителя. Если цены установлены равновесными, то оказывается, что производители и потребители заинтересованы в выборе (в пределах своих возможностей) именно таких состояний (режимов производства и потребления), которые обеспечивают сбалансированность спроса и предложения. Более того, для реализовавшегося состояния системы в целом при этом гарантируется его «эффективность» («оптимальность») в определенном смысле. При этом не имеет значения, как именно сформировались равновесные цены: установились ли они в финале некоторой децентрализованной итеративной процедуры «проб и ошибок» или были рассчитаны в результате централизованного решения общесистемной задачи планирования.

Перечисленные выше возможности и преимущества саморегулирования элементов экономической системы по «ценовым» показателям, однако, теряют прежнюю силу, если цены установлены отличными от равновесных в вышеуказанном «классическом» смысле этого термина. Если при этом каждый элемент системы по-прежнему будет действовать полностью автономно, осуществляя свой выбор независимо от остальных элементов, то появятся дисбалансы спроса и предложения: одни продукты окажутся в избытке, а других будет не хватать. Возможное средство предотвращения таких нежелательных явлений — это, что также указывалось во введении, установление натуральных ограничений-квот на количества потребляемых и (или) производимых продуктов.

Однако использование квот как средства балансирования спроса и предложения или, шире, как средства управления экономической системой — если регулирующая функция цен утеряна — требует тщательного анализа возможностей этого средства. Уже из самых общих качественных соображений видно, что введение квот, т. е. наложение только ограничений сверху на те или иные потоки продуктов, может оставлять элементам системы достаточно много «свободы выбора», и поведение элементов, по-прежнему руководствующихся своими интересами (такими, как максимизация производственной прибыли), может оказаться далеко не простым. С одной стороны, наложив дополнительные ограничения (помимо естественных технологических и балансовых соотношений), по сравнению с «классической» ситуацией свободного выбора мы, вообще говоря, сузили потенциальные возможности системы и тем самым проиграли в эффективности. Но с другой стороны, мы получили дополнительные средства воздействия на элементы систем и можем теперь надеяться на реализуемость этими «экономическими» средствами достаточно «разумных» состояний системы.

Квоты — едва ли менее сложный инструмент управления системой экономических элементов, нежели цены. Из анализа классических моделей экономики известны многие нетривиальные особенности регулирования и установления балансов с помощью механизма цен. Изменение цены на один продукт с целью выравнять предложение и спрос на него может приводить к дисбалансам по другим продуктам. Аналогичные явления возможны и при попытке сбалансировать спрос и предложение механизмом квот. Так, наложив квоту-ограничение на выпуск «избыточного» в данной ситуации продукта, мы можем снизить производственное потребление и породить избыточность других продуктов. Установив квоту-ограничение на потребление дефицитного продукта, мы можем породить дефицитность других продуктов — заменителей данного и одновременно избыточность других продуктов — дополнительных к данному (например, ограничение на продажу магнитофонов может создать дефицит проигрывателей и одновременно — перепроизводство магнитофонной ленты). Кроме того, нелогично устанавливать, например, ограничение на выпуск какого-либо продукта на одном предприятии и в то же время лимитировать затраты этого продукта на другом предприятии.

Эти замечания показывают, что, вводя систему квот, нужно предусмотреть некоторые требования их «внутренней согласованности» как между собой, так и с теми состояниями элементов системы, которые установятся в результате. Само определение «равновесия» при неравновесных ценах в экономической системе, регулируемой механизмом квот, должно быть сформулировано так, чтобы квоты отвечали содержательному экономическому смыслу ситуации и в то же время могли служить работоспособным орудием регулирующих воздействий на систему. Формулировка соответствующих понятий и определений составляет основное содержание этой главы.

Существо предлагаемого определения согласованной системы квот и согласованного состояния экономической системы в целом заключается в следующем. Все продукты, циркулирующие в системе, применительно к рассматриваемому состоянию экономики делятся на две группы: дефицитные и недефицитные. Для каждого дефицитного продукта повсеместно установлены ограничения-квоты на его потребление. Аналогично, для каждого недефицитного продукта установлены ограничения-квоты на его производство. Каждый элемент — как производитель, так и потребитель — самостоятельно выбирает свое состояние в пределах установленных квот, и квоты на потребление дефицитных и производство недефицитных продуктов в результате должны быть исчерпаны (использованы) полностью. Наконец, понятие согласованного состояния предусматривает сбалансированность производства (предложения) и потребления (спроса) по каждому продукту. Разумеется, даже само существование так определенных согласованных состояний (далее называемых равновесиями и — применительно к производственной подсистеме — квазиравновесиями), а тем более их «разумность», требует обоснования на базе определенных модельных предположений. Этому будут посвящены последующие главы книги.

Настоящая глава носит «постановочный» характер.

В следующем § 1.2 излагаются идущие от «классических» моделей математической экономики модельные представления о замкнутых производственно-потребительских системах. Описываются общие формы моделей производственного элемента (в обычных терминах максимизации прибыли при технологических ограничениях) и моделей потребителя (как в форме максимизации полезности выбираемого набора продуктов, так и в более общей аксиоматической форме «рационального» выбора). Далее в § 1.3 перекидывается мост к «неклассическим» моделям производства и потребления, где цены частично теряют свою регулирующую роль, но ее принимают на себя вводимые ограничения-квоты. В § 1.4 дается краткая сводка тех «характерных» свойств, которыми обладает механизм цен и прибыли в классической ситуации, и обращается внимание на возможность явной потери эффективности при замене критерия прибыли другим, в частности критерием «вала». Этот параграф служит частичным обоснованием использования прибыли как производственного критерия не только в «классических», но и в «неклассических» ситуациях (т. е. при произвольных ценах); подтверждение последнего будет получено далее в гл. IV. В § 1.5, наконец, обсуждаются требования к согласованности квот и состояний экономической системы, конкретизируется вид элементов производственной системы, фигурирующих далее в этой книге (потребительская сфера описывается всюду менее детальной моделью, чем производство), и даются общие определения согласованных состояний в экономической системе: равновесия (в замкнутой производственно-потребительской системе) и квазиравновесия (в производственной подсистеме). Дальнейшая детализация всех этих основных понятий осуществляется в последующих главах.

§ 1.2. Общая схема замкнутой модели экономики. Проблема технологической и экономической реализуемости

Мы будем рассматривать модели экономических систем, имеющих, как это принято говорить, «замкнутый» характер: все существенные для проводимого анализа величины и их взаимосвязи учтены «внутри» модели. Традиционным объектом исследования такого рода в экономико-математической теории является замкнутая модель экономики в масштабе «народного хозяйства в целом», подразделяющаяся на две взаимосвязанные подмодели: модель производственной сферы и модель сферы потребления. Классическими моделями такого рода являются модели Вальда, Вальраса и Эрроу — Дебре ([17], гл. 8; [19], гл. 7). Модель производственно-потребительской системы — это, конечно, не единственный пример замкнутой экономической модели: с несколько иной точки зрения можно рассматривать в качестве замкнутой даже одну лишь модель производственной сферы в целом, если при этом производство можно считать независимым от поставок извне, а выпуски конечной продукции устанавливать на основании данных, не требующих явного присутствия потребителя в этой модели. Могут, в частности, рассматриваться также и замкнутые модели «более низкого» (более детального) уровня: например, производственные модели межцеховых связей на предприятии и т. п. Еще одним примером достаточно абстрактной замкнутой экономической модели может служить так называемая «модель чистых обменов» — модель системы потребителей (вне производства), которые обмениваются имеющимися у них продуктами (см., например, модель Гейла [13]).

В этой книге рассматриваются замкнутые экономико-математические модели на уровне производственно-потребительской системы (хотя они допускают также и иную интерпретацию).

Изложим сначала общую схему, в которую вписывается наша модель и которая часто встречается в экономико-математических исследованиях.

Продукты. Будем считать, что задана *полная номенклатура* (перечень наименований) всех продуктов, которые фигурируют в рассматриваемой экономике. Мы будем помечать продукты номерами $j = 1, 2, \ldots, N$; тогда полная номенклатура Ω всех N имеющихся продуктов есть множество индексов $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$. Количества отдельных продуктов мы будем обозначать греческими буквами, а наборы продуктов, т. е. векторы, компонентами которых служат количества соответствующих продуктов,— латинскими буквами. При этом мы всегда будем рассматривать полную номенклатуру продуктов, проставляя нули на местах реально отсутствующих продуктов. Таким образом, вектор вида $z = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots \ldots, \zeta_N\}$ представляет некоторый набор продуктов, в котором ζ_j — количество j-го продукта ($j \in \Omega$).

В дальнейшем мы будем предполагать количества продуктов неотрицательными всегда, за исключением специально оговариваемых случаев (когда «отрицательное количество продукта» появляется как «дисбаланс», или разность между двумя «реальными» количествами). Неотрицательность всех компонент N-мерного вектора z будем записывать как $z \in R_+^N$ (где R_+^N — неотрицательный ортант N-мерного евклидова пространства R^N), или как $z \geqq 0$. Положительность всех компонент вектора z будем записывать как $z > 0$, а вектор z такой, что $z \geqq 0$, но $z \neq 0$, будем называть полуположительным и обозначать его полуположительность знаком $z \geq 0$. Будем также записывать строгое, нестрогое и «полустрогое» неравенства для векторов: $y > x$, $y \geqq x$ и $y \geq x$, когда $y - x > 0$, $\geqq 0$ и ≥ 0 соответственно.

Производство. Будем представлять производство статической моделью, описывающей преобразование некоторых исходных количеств продуктов («*затраты*») в некоторые новые количества других или, быть может, тех же продуктов («*выпуски*»). Обозначим набор (вектор) затрат через $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, а набор (вектор) выпусков — через $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$. Величины ξ_j и η_j можно интерпретировать как количества продуктов в единицу времени (т. е. интенсивности потоков затрат и выпусков), в стационарном динамическом режиме производства. Векторы x и y предполагаются неотрицательными. Пару (y, x) будем называть *состоянием производства*, или, следуя традиционной терминологии, *стационарным производственным процессом*. Вектор $z = y - x$ будем называть *вектором чистых выпусков* (в отличие от *вектора полных*, или *валовых, выпусков* y) в производственном процессе (y, x). Этот вектор, вообще говоря, имеет как положительные, так и отрицательные компоненты; отрицательная величина «чистого выпуска» ζ_j продукта j означает превышение величины затраты ξ_j данного продукта j над величиной его полного выпуска η_j.

Производственные элементы и технологии. Наряду с рассмотрением производства как целого мы будем рассматривать *систему производственных элементов (производителей)*, состоящую из N' элементов-производителей P_i, $i=1, \ldots, N'$. Производитель P_i характеризуется своим *технологическим множеством* G_i — множеством всех возможных для P_i производственных процессов (состояний); очевидно, $G_i \subseteq R_+^N \times R_+^N$. Далее, *состояние элемента* P_i будем обозначать через (y_i, x_i), где $x_i = (\xi_{1i}, \ldots, \xi_{Ni})$ — его вектор затрат, а $y_i = (\eta_{1i}, \ldots, \eta_{Ni})$ — его вектор выпусков. Совокупность $\{(y_i, x_i)\}$ состояний всех элементов P_i, $i=1, \ldots, N$, будем называть *состоянием производственной системы*.

Определение 1.1. Состояние (y_i, x_i) элемента P_i будем называть *технологически реализуемым*, если $(y_i, x_i) \in G_i$. Состояние $\{(y_i, x_i)\}$ производственной системы будем называть *технологически реализуемым*, если таковым является состояние каждого ее элемента P_i. Векторы

$$y = \sum_{i=1}^{N'} y_i, \quad x = \sum_{i=1}^{N'} x_i$$

будем называть *векторами полных выпусков* и *полных затрат* системы в состоянии $\{(y_i, x_i)\}$, а вектор

$$z = y - x = \sum_{i=1}^{N'} y_i - \sum_{i=1}^{N'} x_i$$

— *вектором чистых выпусков* в этом состоянии.

Компонента ζ_j вектора чистых выпусков z — это *чистый выпуск продукта* j в системе, т. е. алгебраическое превышение величины полного выпуска над величиной полных затрат этого продукта по всем элементам системы. Если не предполагать, что продукты, затрачиваемые в производстве, могут поступать в производственную систему извне, а считать, что эта система замкнута, т. е. что все затрачиваемые продукты производятся элементами этой же системы, то помимо условия технологической реализуемости состояния $\{(y_i, x_i)\}$ нужно потребовать еще условия неотрицательности вектора чистых выпусков:

$$z \geqq 0.$$

Это условие будем называть *условием сбалансированности производственной системы* (отметим, однако, что здесь не учтены возможные требования со стороны «внешнего» потребителя).

Если состояние системы $\{(y_i, x_i)\}$ технологически реализуемо и сбалансировано, то, очевидно, всегда можно указать «структуру поставок» всех продуктов, производимых и затрачиваемых в системе, так, что производственные потребности $x_i = (\xi_{1i}, \ldots, \xi_{Ni})$ каждого элемента P_i будут полностью покрыты поступающими к нему продуктами от других производителей (как и от себя самого), а свободный остаток каждого произведенного продукта j величиной ζ_j будет поставляться вовне производственной системы в качестве ее продукции.

Важный частный случай разбиения производственной системы на элементы представляет «отраслевое разбиение» на «чистые отрасли» в количестве N', равном числу всех продуктов N, когда в качестве элемента-производителя P_i рассматривается «отрасль», производящая продукт i и только его[1]). В этом случае в векторе выпуска элемента P_i может быть отличной от нуля только i-я компонента (модель «типа модели Леонтьева» [13, 19]), а структура внутрипроизводственных поставок продуктов при технологически реализуемом и сбалансированном состоянии такой системы однозначно предопределена (поскольку единственным поставщиком продукта j является элемент P_j).

Экономическое поведение производственных элементов. Под «экономическим поведением» мы будем подразумевать принятие и осуществление производителем своих решений в пределах той свободы выбора, которая ему предоставлена. Конкретно, здесь мы будем рассматривать выбор производителем своего состояния (производственного процесса) из множества технологически реализуемых состояний при имеющихся ограничениях и исходя из некоторого критерия выбора. В общем случае это — не единственная сфера решений производителя; в частности, в некоторых случаях производитель может также устанавливать цены на свою продукцию (этот аспект еще будет анализироваться далее в гл. V) или выбирать структуру своих связей по поставкам продуктов (включая кооперирование с другими производителями — см., например, [29], гл. 17). Но сейчас мы ограничимся рассмотрением выбора состояния.

Результат такого выбора производственного элемента P_i — реализованное состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ — будет в общем случае зависеть от целого ряда «параметров» — прежде всего от технологического множества G_i и, вообще говоря, от некоторых других характеристик, которые мы пока не конкретизируем, но резервируем «место» для них в выражении указанной зависимости:

$$(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = g_i(G_i, \bullet).$$

---

[1]) Наряду с таким «чистым» случаем иногда рассматривают также возможность производства одного и того же продукта в нескольких отраслях (тогда $N' > N$), или, наоборот, возможность производства нескольких продуктов в одной отрасли, при невозможности производства тех же продуктов в других отраслях (тогда $N' < N$).

Приступим теперь к уточнению этой зависимости. Будем предполагать, что элемент P_i выбирает свое состояние, максимизируя некоторую целевую (критериальную) функцию $\mu_i(y_i, x_i)$ на множестве допустимых состояний. В общем случае целевая функция μ_i может зависеть от некоторых параметров, а множество допустимых состояний может получаться из технологического множества G_i наложением каких-либо дополнительных ограничений, и именно это последнее обстоятельство составит далее самое существо тех модификаций «классических» моделей производственных систем, которые изучаются в этой книге. Однако сейчас мы начнем с изложения постановок задач производства в рамках «классической теории фирмы» [15], изучающей поведение производителя в экономической ситуации «свободного рынка». Эта идеализированная ситуация характеризуется возможностью для производителя приобретать, без каких-либо ограничений, и продавать по заданным ценам любые желательные ему количества продуктов.

Обозначим через c набор (вектор) цен γ_j на все продукты $j \in \Omega$. Вектор $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ будем далее считать положительным или хотя бы полуположительным: $c > 0$ или $c \geq 0$ (допуская равенство некоторых цен нулю — об этом см. ниже § 1.4). Вектор цен c в ситуации «свободного рынка» является тем параметром, который характеризует «с точки зрения элемента» экономическую ситуацию в целом и входит, в качестве параметра, в его критерий выбора состояния. Подчеркнем, что — как уже говорилось во введении — мы исходим из предположения об «автономности» действий элементов экономической системы, которые в рамках установленных ограничений преследуют свои цели на основе имеющейся у них «локальной» информации. Поэтому никаких других сведений — в частности, о состояниях других элементов системы — в явной форме мы в формулировку задачи элемента P_i не включаем. В силу всего сказанного эта задача имеет вид

$$\mu_i(y_i, x_i; c) = \max, \qquad (y_i, x_i) \in G_i. \tag{1}$$

Будем предполагать ради простоты, что решение $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ этой задачи существует и единственно при любых G_i и c из рассматриваемого класса технологических множеств и векторов цен; это и дает однозначную зависимость $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = g_i(G_i; \mu(\cdot; c))$. Широко используемым в математических моделях производственных систем конкретным видом критерия является критерий прибыли: $\mu_i = \Pi$, где

$$\Pi(y, x; c) = cy - cx \tag{2}$$

(cy и cx — это скалярные произведения соответствующих векторов). Однако в этой же ситуации в принципе могут рассматриваться и другие критерии, например критерий валового выпуска в стоимостном выражении: $\mu_i = \nu$, где $\nu = cy$ (возможно, вместе с наложением ограничения на стоимость затрат: $cx \leqslant b$), или критерий рентабельности: $\mu_i = \chi$, где $\chi = \frac{cy - cx}{cx}$, и т. п. Обсуждение этого вопроса, и особенно роли (и преимуществ) критерия прибыли, будет приведено ниже в § 1.4. Теперь же мы ограничимся констатацией того, что решение $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ задачи вида (1) зависит от такого варьируемого (управляемого) параметра, как вектор цен; чтобы подчеркнуть это обстоятельство, выделим аргумент c в зависимости g_i явно: $g_i = g_i(c; \cdot)$.

Считая теперь фиксированными остальные параметры (множество G_i, а также функцию μ_i, если ее форма не была оговорена заранее), получаем зависимость

$$(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = g_i(c). \tag{3}$$

Определение 1.2. Состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ производственного элемента P_i будем называть *экономически реализуемым в классическом смысле* при векторе цен c, если оно представимо в виде (3). Состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы будем называть *экономически реализуемым в классическом смысле* при векторе цен c, если состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ каждого ее элемента P_i экономически реализуемо при одном и том же векторе цен c для всех P_i, $i = 1, \ldots, N'$.

Далее мы, как правило, в качестве критерия будем рассматривать прибыль: $\mu_i = \Pi$, и соответственно трактовать определение экономической реализуемости. Экономическая реализуемость (при каком-либо векторе цен) и подавно подразумевает технологическую реализуемость, но первое понятие существенно «жестче»: варьируя «параметр управления» — вектор цен — мы можем реализовать («пробежать» в множестве G_i) лишь, вообще говоря, «малую часть» всех состояний, реализуемых технологически.

Для каждого экономически реализуемого состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы возьмем соответствующий вектор чистых выпусков $\tilde{z} = \tilde{y} - \tilde{x} = \sum_i \tilde{y}_i - \sum_i \tilde{x}_i$ и рассмотрим зависимость

$$\tilde{z} = h(c), \tag{4}$$

которая порождается зависимостью (3). Функцию $h(c)$ называют *функцией предложения в классическом смысле*, или *функцией чистых производственных выпусков*.

Потребление. Модель потребления мы сформулируем на существенно менее детализированном уровне, нежели модель производства. Общая причина этого для нас заключается в том, что мы не имеем возможности говорить о «технологии потребления» (или «процессах потребления») на уровне объективности, сопоставимом с уровнем объективности технологических процессов в производстве. Поэтому нам заведомо приходится довольствоваться для потребления более «бедной» моделью по сравнению с моделью производства. Считаясь с такой неизбежностью, мы не будем рассматривать систему нескольких потребителей (и тем самым исключим из возможного рассмотрения анализ взаимодействий между потребителями)[1]), а ограничимся представлением о едином «совокупном потребителе». Более того, классическую модель «рационального» потребителя, максимизирующего свою целевую функцию потребления (функцию полезности), мы обобщим, представив ее в еще более абстрактной форме.

Будем рассматривать «совокупного потребителя» как дополнительный (внепроизводственный) 0-й элемент экономической системы и характеризовать его состояние вектором (набором) потребляемых продуктов, который мы будем обозначать через $x_0 = (\xi_{10}, \ldots, \xi_{N0})$. Будем считать, что вектор x_0 должен принадлежать некоторому заданному *множеству допустимого потребления* $G_0 \subseteq R_+^N$. Поведение потребителя заключается как раз в выборе набора продуктов $x_0 \in G_0$; этот выбор должен реализовать «интересы» потребителя в пределах имеющихся ограничений в данной экономической ситуации. Такие ограничения определяются как самим допустимым множеством G_0 (также, вообще говоря, зависящим от параметров экономической ситуации), так и, быть может, некоторыми дополнительными параметрами. Результатом является зависимость реализуемого состояния (выбираемого вектора) $\tilde{x}_0$ от всех экономических характеристик, влияющих на потребительское поведение:

$$\tilde{x}_0 = f(G_0, \cdot). \qquad (5)$$

Модели «рационального» потребления в «рыночной ситуации» классического типа предусматривают, аналогично ситуации для производства, возможность свободного выбора всех продуктов в количествах, ограничиваемых не внешними «лимитами», но лишь внутренними возможностями потребителя. Стандартной формой такого внутреннего ограничения в поведении потребителя является бюджетное ограничение: стоимость cx_0 приобретаемого набора продуктов x_0 в существующих ценах c не должна превышать заданного потребительского бюджета b. Будем называть множество

$$B(c, b) = \{x \in R_+^n : (c, x) \leqslant b\} \qquad (6)$$

бюджетным множеством; это множество (или некоторая его часть) в «классической» модели фигурирует в качестве G_0 (или наряду с G_0). Отметим, что подстановка такого множества-параметра в

[1]) В качестве таких взаимодействий могли бы рассматриваться акты распределения (обмена) и, возможно, другие операции над потребительскими продуктами.

(5) создает зависимость $f = f(c, \cdot)$ от вектора цен c (помимо других параметров).

Рассмотрим в качестве специальной модели порождение зависимости (5) и, в частности, зависимости вида $f(c, \cdot)$, следующую классическую модель рационального потребителя. Предположим, что потребитель руководствуется некоторой целевой *функцией потребления* (*функцией полезности*) $U(x)$, заданной на R_+^N, решая задачу

$$U(x_0) = \max, \qquad x_0 \in G_0. \tag{7}$$

Решение $\tilde{x}_0$ этой задачи (которое, как будем предполагать, всегда существует и единственно) в результате определяется зависимостью $\tilde{x}_0 = f(G_0, U(\cdot), \cdot)$. В частности, когда $G_0 = B(c, b)$ — бюджетное множество, мы получаем, зафиксировав все остальные параметры и характеристики, кроме цен c, зависимость

$$\tilde{x}_0 = f(c). \tag{8}$$

Функцию $f(c)$ (8) в классической модели потребления называют *функцией потребительского выбора*, или *функцией* (конечного) *спроса*.

Определение 1.2′. Состояние $\tilde{x}_0$ потребителя будем называть *экономически реализуемым в классическом смысле*, если оно представимо в виде (8) при некоторых ценах c (и при некоторых значениях других варьируемых параметров, если таковые имеются).

Замкнутая экономика. Моделью экономики мы будем называть модель производственно-потребительской системы, состоящую из двух описанных выше частных моделей — производства и потребления. *Состоянием* такой *экономической системы* будем называть совокупность состояний обеих ее подсистем $\{(y_i, x_i)\}$ и x_0, т. е. совокупность состояний всех элементов-производителей и элемента-потребителя. Состояние $\{(y_i, x_i)\}$, x_0 этой экономической системы будем называть *сбалансированным*, если вектор z чистых выпусков ее производственной подсистемы неотрицателен и совпадает с вектором x_0 состояния потребителя (набором продуктов конечного потребления)[1], т. е. если соблюдается «*материальный баланс*»

$$\sum_{i=1}^{N'} y_i - \sum_{i=1}^{N'} x_i = x_0. \tag{9}$$

[1]) Иногда в подобных моделях допускают наличие отрицательных компонент в векторе $z = x_0$, подразумевая под ними потоки «первичных ресурсов» из потребительской сферы в производственную (обычная интерпретация — трудовые ресурсы). Мы никаких первичных ресурсов в рамках модели явно не рассматриваем, а компоненты вектора $z = x_0$ трактуем как продукты конечного потребления и поэтому предполагаем неотрицательность всех этих компонент.

Экономическую систему, находящуюся в сбалансированном состоянии, можно считать замкнутой. При этом, в частности, можно обозначать вектор чистых выпусков производственной системы тем же символом x_0, что и состояние потребителя (устранив самостоятельное обозначение z, ставшее излишним). Более того, при этом состояние системы в целом можно полностью охарактеризовать состоянием $\{(y_i, x_i)\}$ ее производственной подсистемы, поскольку вектор x_0 состояния потребителя определяется этим согласно (9) однозначно.

Определение 1.3. Сбалансированное состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ экономической системы с вектором чистых выпусков и конечного потребления $\tilde{x}_0$ будем называть *равновесием в классическом смысле* при векторе цен c, если $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ — экономически реализуемое состояние производственной системы при ценах c, а $\tilde{x}_0$ — экономически реализуемое состояние потребителя при этих же ценах c. Указанный вектор цен c будем называть *вектором* (набором) *равновесных цен*.

Подчеркнем, что определение экономического равновесия в классическом смысле предполагает не просто соблюдение материальных балансов по каждому продукту, но и экономическую реализуемость соответствующего сбалансированного состояния. Это означает, что каждому участнику системы нежелательно (невыгодно) отклоняться от того своего состояния, которое входит как составная часть в данное сбалансированное состояние (равновесие) системы в целом (при заданных фиксированных равновесных ценах); имея это в виду, будем говорить о *согласованности* решений (состояний) всех отдельных участников системы. Единственность решения (выбора состояния) каждого участника, если она имеет место, позволяет обеспечить согласованность таких решений даже в несколько более сильном смысле: *каждый участник системы в данных экономических условиях (при заданных равновесных ценах) самостоятельно выберет именно то свое состояние, которое войдет как составная часть в сбалансированное состояние (равновесие) системы.*

В терминах функции предложения (4) и функции спроса (8) равновесный вектор цен c можно эквивалентным образом определить как набор цен, *балансирующих предложение со спросом*, т. е. такой, что

$$h(c) = f(c), \tag{10}$$

а соответствующее равновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с $\tilde{x}_0$ — как совокупность $\{g_i(c)\}$ значений (3) при этом векторе c вместе с $\tilde{x}_0$ из (8).

Замечание 1.1. В равновесных моделях математической экономики определение равновесия часто формулируют в несколько ослабленном виде, заменяя равенство в требовании сбалансированности (10) на неравенство

$$h(c) \geqq f(c), \tag{11}$$

однако требуя, чтобы в векторном соотношении (11) покомпонентные строгие неравенства $h_j(c) > f_j(c)$ могли иметь место только для тех компонент (продуктов) j, для которых цены равны нулю. Это сводится к дополнительному скалярному равенству

$$ch(c) = cf(c). \tag{11'}$$

Соотношение (11) для «натуральных продуктопотоков» означает, что спрос на каждый продукт должен полностью покрываться предложением, а дополнительное требование «стоимостного баланса» (11′) означает, что превышение предложения над спросом в действительности допускается только для продуктов, имеющих нулевую цену [1]).

Оговорка насчет возможности превышения предложения над спросом обычно возникает в математических моделях экономики как «техническая» необходимость. Однако можно указать и содержательные истоки этой необходимости, разъяснив, почему в «разумно организованном» состоянии системы может оказаться невозможным избежать избыточного производства продукта. Дело в том, что технология производства может порождать такое явление, как качественная «дополнительность» («комплектность») как затрат, так и выпусков различных продуктов. Если имеется совместный выпуск нескольких продуктов в одном производственном процессе и при этом некоторые продукты взаимодополнительны, то может оказаться, что достаточный для покрытия спроса уровень выпуска одного продукта неизбежно приводит к перепроизводству другого, технологически дополнительного к нему продукта, чему не помешает даже снижение цены на него до нуля [2]). Отметим, что такое явление не наблюдается в моделях производства «отраслевого» характера с однопродуктовыми выпусками; в таких моделях оказывается возможным обеспечивать строгую сбалансированность в форме равенства (10) (и, как правило, можно обходиться строго положительными ценами). Это — одна из причин, по которым мы в основных главах этой книги рассматриваем производственные модели лишь «отраслевого» типа.

Условие сбалансированности (10) в модели экономики подразумевает явное присутствие потребителя. Однако значительный самостоятельный интерес представляет и анализ функционирования одной лишь производственной системы, без фактического рассмотрения характеристик потребителя. В таком случае мы можем

---

[1]) Отметим, что в стоимостном выражении предложение и спрос совпадают и для таких продуктов.

[2]) Примером может служить выпуск шлака как побочного продукта при производстве чугуна; этот выпуск может перекрывать спрос на шлак как на строительный материал даже при его бесплатности.

сохранить условие сбалансированности в общей форме (9), считая, однако, что здесь набор продуктов конечного потребления x_0 — не заданный заранее вектор, а произвольный вектор из R_+^N. Сформулируем соответствующую модификацию понятия равновесия применительно к производственной системе.

Определение 1.4. Состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ будем называть *квазиравновесием в классическом смысле* при векторе цен c, если состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ экономически реализуемо при векторе цен c и если соответствующий вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ неотрицателен: $\tilde{x}_0 \geqq 0$.

Квазиравновесие — это согласованное состояние производственной системы при прежнем понимании «согласованности» как обеспечения сбалансированности при самостоятельном выборе элементами своих состояний.

К анализу некоторых важнейших свойств состояний равновесия и квазиравновесия мы вернемся в § 1.4. А пока попытаемся ответить на вопрос: как быть, если в экономической системе установились цены, которые неравновесны в «классическом» смысле? Может ли введение ограничений типа квот принять на себя «балансирующую» функцию, которую в классических моделях выполняют равновесные цены? Можно ли указать какие-либо признаки «разумности», «логичности» установления системы квот? К обсуждению этих вопросов мы теперь и приступим.

§ 1.3. Квоты как механизм согласования состояний элементов экономической системы

Пусть в модели экономической системы, общая схема которой была изложена в § 1.2, установлены и зафиксированы цены, которые не являются равновесными в смысле определения 1.3. В этом случае прежнее независимое поведение элементов системы уже невозможно: самостоятельные решения элементов означали бы выбор таких их состояний, которые оказываются несогласованными между собой в том смысле, что нарушен материальный баланс (10) и поэтому совокупность таких состояний элементов не может быть реализована как состояние замкнутой системы в целом. Вследствие этого неизбежно должны возникнуть (или должны быть созданы) какие-либо дополнительные средства согласования состояний элементов. Эти средства могут быть различными. В частности, радикальным средством могло бы быть предварительное «вычисление» сбалансированного технологически реализуемого состояния системы и раздача элементам прямых предписаний: реализовать соответствующие состояния. Такой «директивный» метод мы рассматривать не будем: он полностью отстраняет отдельные элементы системы от участия в выборе собственных состояний (за исключением разве лишь чисто «информационной» функции), а это изменяет содержательный характер проблемы. Нас же интересуют такие экономические средства обеспечения сбалансированных и технологически реализуемых состояний системы, которые действительно можно содержательно представить как средства согласования состояний, выбираемых самими элементами, при сохранении определенной степени самостоятельности такого выбора.

Таким образом, мы намерены рассматривать средства согласования, которые сохраняют саму возможность выбора элементами своих состояний, но изменяют (корректируют) результаты выбора по сравнению с «классической» ситуацией полностью автономного выбора, учитывающего только внутренние ограничения элемента и «внешние» по отношению к нему цены. Изменение выбора может быть достигнуто путем изменения ограничений, т. е. множества допустимых состояний, и (или) путем изменения максимизируемой целевой функции или, более общо, правила выбора. Мы далее будем рассматривать главным образом изменение ограничений (допустимых множеств); такое изменение обычно может быть реализовано сравнительно легко, тогда как «вмешательство» в целевую функцию (правило выбора) элемента может быть делом более трудным или даже невозможным (впрочем, о проблеме подбора и некоторых возможностях видоизменения целевых функций производственных элементов мы еще скажем далее в этой главе).

Итак, пусть на состояния (y_i, x_i) производственных элементов P_i, а также на состояние x_0 потребителя наложены некоторые дополнительные ограничения. Описывая эту ситуацию в самой общей форме, мы можем сказать, что теперь для производственного элемента P_i на место первоначального чисто технологического ограничения $(y_i, x_i) \in G_i$ приходит новое ограничение $(y_i, x_i) \in \widehat{G}_i$. Здесь $\widehat{G}_i$ — некоторое новое множество допустимых состояний, которое заведомо может быть лишь сужением прежнего G_i. Аналогичным образом для потребителя на место ограничения $x_0 \in G_0$ приходит новое ограничение $x_0 \in \widehat{G}_0$, где $\widehat{G}_0 \subseteq G_0$. Новые множества допустимых состояний $\widehat{G}_i$, $\widehat{G}_0$ могут быть подставлены как новые параметры в выражения $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = g_i(\widehat{G}_i)$ и $\tilde{x}_0 = f(\widehat{G}_0, \cdot)$, которыми указываются «экономически реализуемые» состояния элементов в данных экономических условиях. Новая трактовка «экономической реализуемости» в новых экономических условиях, включающих новые ограничения и (или) параметры, требует конкретизации вида как ограничений, так и самих способов выбора элементами своих состояний в пределах этих ограничений (с учетом этих параметров).

Ограничения на состояния элементов и даже, конкретнее, ограничения на отдельные их компоненты (количества продуктов в этих состояниях) могут быть разными, и они по-разному могут влиять на решения элементов.

Возможный вид ограничений, вообще говоря, зависит от того, какие черты экономической ситуации мы собираемся моделировать. Поскольку сама необходимость введения ограничений возникла из-за проблемы несбалансированности материальных потоков продуктов, т. е. избыточности одних продуктов и недостатка других, то естественно прежде всего рассмотреть ограничения на потоки (количества) отдельных продуктов, потребляемых и (или) производимых отдельными элементами системы. Ясно, что наложение количественного ограничения на отдельный продукт, а не, скажем, на комплект продуктов или на суммарное количество продуктов (что делается при введении стоимостных ограничений на наборы продуктов) — это лишь один простейший способ задания ограничений. Однако именно такой тип ограничений возникает из естественных попыток справиться с нарушением материальных балансов, решая эту проблему «по частям» — по каждому продукту в отдельности. В этом отношении ситуация аналогична классическому средству балансирования материальных потоков (спроса и предложения) путем установления своей «равновесной» цены на каждый продукт. Возможность достижения балансов подобным путем — «по частям» — не только в классической, но и в рассматриваемой нами теперь «неклассической» ситуации, представляет несомненный интерес, и это оправдывает построение «неравновесных» моделей с ограничениями на отдельные продукты. Такие ограничения мы и будем рассматривать далее.

Рассмотрим общий вид ограничений-неравенств для отдельных компонент затрат и выпусков. Для производственного элемента P_i совокупность всех таких покомпонентных ограничений имеет вид векторных неравенств

$$\check{y}_i \leqq y_i \leqq \hat{y}_i, \quad \check{x}_i \leqq x_i \leqq \hat{x}_i, \tag{12}$$

где неотрицательные векторы $\check{y}_i$ и $\hat{y}_i$, $\check{x}_i$ и $\hat{x}_i$ — соответственно ограничения снизу и сверху на выпуски и затраты. Нетрудно видеть, что с точки зрения интересующей нас проблемы согласования состояний элементов системы рассмотрение ограничений в такой форме чрезмерно широко, если иметь в виду, что мы стремимся добиваться сбалансированности не любыми, а пò возможности «естественными» с экономических позиций средствами. В самом деле, наложение ограничений снизу $\check{x}_i$ и $\check{y}_i$ на затраты и выпуски с содержательной точки зрения представляет собой довольно существенное вмешательство в «права» производственного элемента, которое нелегко оправдать необходимостью скорректировать нарушение материальных балансов в системе. Особенно показательным в этом отношении является предельный случай совпадения ограничений снизу с ограничениями сверху: $\check{y}_i = \hat{y}_i$ и $\check{x}_i = \hat{x}_i$, что превращается в прямое «директивное» задание состояния элемента P_i. Это не согласуется с сохранением хотя бы частичной самостоятельности элементов системы, и поэтому разрешение налагать на состояния элементов произвольные ограничения вида (12) выводило бы нас за пределы содержательной постановки задачи.

Рассмотрим теперь односторонние ограничения «сверху»:

$$y_i \leqq \hat{y}_i, \qquad x_i \leqq \hat{x}_i, \tag{13}$$

где $\hat{y}_i \geqq 0$, $\hat{x}_i \geqq 0$. Такие ограничения сверху на количества выпускаемых и затрачиваемых продуктов имеют ясный содержательный смысл как «квоты» на объемы выпусков и затрат и оставляют производственному элементу P_i определенную свободу выбора (разумеется, за исключением крайнего случая нулевых квот). Ограничения такого вида мы и будем рассматривать всюду далее.

Отметим, однако, что квоты с точки зрения экономического содержания могут трактоваться двояким образом. Первая трактовка подразумевает использование квот в качестве «абсолютных» ограничений, т. е. так или иначе организованный «запрет» на их нарушение (превышение квот). Такую трактовку естественно давать квотам на потребление (на затраты): ведь элемент P_i заведомо «физически» не сможет затратить больше продуктов, чем ему будет предоставлено. Несколько иначе обстоит дело с квотами на выпуски. Здесь также возможна трактовка квот как абсолютных запретов превышать указанные уровни выпусков[1]), но не менее уместной представляется и другая трактовка: производитель P_i может выпускать продукцию сверх квот, но она не будет принята (и оплачена) потребителем. При этой второй трактовке квоты, очевидно, войдут не в ограничения, а в целевую функцию (прибыль) производителя.

Основной для нас будет первая трактовка и соответственно использование квот $\hat{y}_j$, $\hat{x}_i$ в качестве ограничений сверху вида (13) на компоненты состояний элементов.

Аналогичным образом ограничения-квоты могут быть наложены на выбор состояния потребителя — на вектор конечного потребления x_0:

$$x_0 \leqq \hat{x}_0,$$

где $\hat{x}_0 \geqq 0$.

Наложение ограничений-квот представляет собой существенное отклонение от «классического» описания поведения элементов

---

[1]) Такая трактовка иногда прямо вытекает из смысла ситуации — например, если имеется ограниченная емкость складских или транспортных звеньев или, в другом случае, если идет речь о вредных побочных продуктах производства.

экономической системы в условиях модели «свободного рынка». В этой модели производитель и потребитель ведут себя так, как если бы они были уверены в том, что любые количества любых требуемых им продуктов будут им предоставлены (проданы), а любые количества производимых продуктов найдут сбыт. Квоты же указывают те пределы, в которых, и только в которых, эта уверенность оправдана.

Квоты могут налагаться не на все продукты, а лишь на часть их. Во многих задачах, таких, как задача максимизации прибыли производителя P_i при ограниченном технологическом множестве G_i, это обстоятельство можно формально учесть, положив «лишние» квоты достаточно большими, так что реально их присутствие не скажется на результирующем выборе. Такова же ситуация при описании потребителя как максимизирующего свою целевую функцию на ограниченном допустимом множестве. Однако нетрудно себе представить более общие модели потребительского поведения, в которых учитывается, например, такой субъективно-психологический феномен, как зависимость поведения потребителя от самого факта наличия ограничений на те или иные продукты. В этом случае даже «сколь угодно большая» квота — это не то же самое, что отсутствие ограничения[1]). Это и другие соображения побуждают явно выделять продукты, на которые наложены ограничения-квоты данного типа.

Для производителя P_i обозначим через I_i номенклатуру тех продуктов, на затраты которых для него установлены квоты:

$$\xi_{ji} \leqslant \hat{\xi}_{ji}, \quad j \in I_i, \tag{14}$$

и через K_i — номенклатуру тех продуктов, по которым для него установлены квоты на выпуски:

$$\eta_{ki} \leqslant \hat{\eta}_{ki}, \quad k \in K_i. \tag{15}$$

Здесь $I_i \subseteq \Omega$ и $K_i \subseteq \Omega$. Продукты, не попавшие в номенклатуру I_i (K_i), могут затрачиваться (выпускаться) без ограничений. Аналогично, для потребителя обозначим через I_0 номенклатуру тех продуктов, на потребление которых установлены квоты, при том что остальные продукты $(\Omega \backslash I_0)$ могут потребляться без ограничений:

$$\xi_{i0} \leqslant \hat{\xi}_{i0}, \quad i \in I_0. \tag{16}$$

[1]) Действительно, едва ли следует заранее исключать возможность таких форм потребительского поведения, как, например, завышение объема закупок некоторых продуктов, осуществляемое потребителем только по той причине, что эти продукты стали считаться «дефицитными» (даже если для данного потребителя предоставляемые ему «квоты» вполне достаточны). Подробнее об этом см. гл. III.

Сформулируем общую *задачу выбора для производителя* P_i при ограничениях-квотах $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I_i$, и $\hat{\eta}_{ki}$, $k \in K_i$:

$$\begin{gathered} \mu(y_i, x_i) = \max, \\ (y_i, x_i) \in G_i, \; \xi_{ji} \leqslant \hat{\xi}_{ji}, \; j \in I_i; \; \eta_{ki} \leqslant \hat{\eta}_{ki}, \; k \leqslant K_i. \end{gathered} \tag{17}$$

В частности, в качестве критериальной функции $\mu(y_i, x_i)$ в задаче (17) может использоваться прибыль

$$\Pi(y_i, x_i; c) = \sum_{s \in \Omega} \gamma_s \eta_{si} - \sum_{r \in \Omega} \gamma_r \xi_{ri}.$$

Решение $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ такой задачи (мы снова предполагаем, что оно существует и единственно) зависит от параметров, которыми здесь являются: номенклатуры I_i и K_i, величины квот $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I_i$ и $\hat{\eta}_{ki}$, $k \in K_i$, а также (если $\mu = \Pi$) вектор цен c:

$$(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = g_i(c; \hat{\xi}_{ji}, \hat{\eta}_{ki}, I_i, K_i). \tag{18}$$

Выбор потребителя как выбор состояния $\tilde{x}_0 \in G_0$ при ограничениях-квотах $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in I_0$, мы в общем случае будем задавать, непосредственно указывая зависимость выбранного вектора $\tilde{x}_0$ от варьируемых параметров:

$$\tilde{x}_0 = f(c; \hat{\xi}_{i0}, I_0). \tag{19}$$

При этом вектор (19) должен удовлетворять, помимо условия $\tilde{x}_0 \in G_0$, условиям (16). Зависимость типа (19) будем называть *функцией потребительского выбора при ограничениях*. В (18) и (19) мы явно указали параметр — вектор цен c (но не множества G_i и G_0), чтобы подчеркнуть преемственность по отношению к «классической» ситуации варьируемых цен.

В качестве примера порождения функции выбора (19) мы можем взять прежнюю оптимизационную модель потребителя (7), решающего задачу максимизации своей функции полезности при бюджетном ограничении, дополнив ее ограничениями-квотами:

$$\begin{gathered} U(x_0) = \max, \\ cx_0 \leqslant b, \quad x_0 \geqq 0, \quad \xi_{i0} \leqslant \hat{\xi}_{i0}, \quad i \in I_0. \end{gathered} \tag{20}$$

Состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$ экономической (производственно-потребительской) системы мы по-прежнему будем называть *сбалансированным*, если

$$\sum_{i=1}^{N'} \tilde{y}_i - \sum_{i=1}^{N'} \tilde{x}_i = \tilde{x}_0, \tag{21}$$

а состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы будем называть сбалансированным, если порождаемый им вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ неотрицателен. Подчеркнем, что в определении сбалансированности замкнутой производственно-потребительской системы вектор $\tilde{x}_0 \geqq 0$ задан независимо от $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ и соотношение (21) выступает как *требование*, а в определении сбалансированности производственной системы соотношение (21) служит определением вектора $\tilde{x}_0$, а требованием является условие $\tilde{x}_0 \geqq 0$.

Определение 1.5. При фиксированном векторе цен c состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы (и сбалансированное состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$ замкнутой производственно-потребительской системы) будем называть *экономически реализуемым при ограничениях-квотах* $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I_i$, $\hat{\eta}_{ki}$, $k \in K_i$, для каждого производителя P_i (и $\hat{\xi}_{j0}$, $j \in I_0$, для потребителя) если для каждого производителя P_i его состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ имеет вид (18) (и состояние $\tilde{x}_0$ потребителя имеет вид (19)).

Подчеркнем, что в определении экономически реализуемого состояния производственной системы, в отличие от замкнутой производственно-потребительской системы, мы в общем случае не требуем сбалансированности: вектор $\tilde{x}_0$ чистых выпусков производственной системы может иметь отрицательные компоненты. Тем самым мы охватываем случай, когда производственная система рассматривается как *открытая*, т. е. допускаются поставки продуктов в нее извне. В отличие от этого, определение экономически реализуемого состояния *замкнутой* производственной системы должно дополнительно включать в себя требование сбалансированности этого состояния, т. е. условие $\tilde{x}_0 \geqq 0$, которое мы договорились считать определением сбалансированности (или, что то же, замкнутости) производственной системы.

Можно ли рассматривать введенное понятие экономически реализуемого, при ограничениях-квотах, сбалансированного состояния замкнутой экономической системы как искомый аналог классического экономического равновесия? Мы считаем, что пока еще нельзя: в этом понятии недостает ряда важных условий — условий своего рода «согласованности» системы ограничений-квот как между собой, так и с компонентами состояний элементов системы. Эти недостающие условия проистекают из экономического содержания квот; напомним, что мы рассматриваем квоты как «экономическую» реакцию на появление материальных дисбалансов (дефицитных и избыточных продуктов) при неравновесности цен и как средство борьбы с этими дисбалансами. Сформулируем ряд таких условий сначала в содержательных терминах, а затем формализуем их.

Заявляя, что ограничения-квоты не могут быть произвольными, а должны удовлетворять определенным условиям, мы тем самым подразумеваем некоторые предположения о происхождении и предназначении ограничений-квот, которые, однако, могут быть различными. С одной стороны, квоты могут появляться в экономической системе при неравновесных ценах «самопроизвольно» как форма приспособления элементов к образовавшимся нехваткам некоторых продуктов; организационных деталей возможных путей такого формирования квот мы сейчас касаться не будем. С другой стороны, квоты могут служить орудием целенаправленного регулирования состояний элементов системы с целью противодействия возникающим материальным дисбалансам в системе — нехваткам одних продуктов и избыткам других. Возможен и синтез этих точек зрения. Мы не будем занимать какую-либо одну жесткую позицию по этому вопросу, а вместо этого изложим столь общие представления, которые не будут противоречить ни одному из вышеуказанных взглядов на характер и роль ограничений-квот.

Будем считать, что ограничения-квоты возникают там, где без них, грубо говоря, нельзя было бы обойтись. Конкретнее, квоты на выпуски продуктов должны сдерживать производство тех продуктов, которые в противном случае могли бы стать избыточными, превысив потребности в них. Аналогично, квоты на затраты должны лимитировать потребление тех продуктов, для которых есть опасность их нехватки. При этом в силу относительности, условности понятий «избыток» и «нехватка» (о чем говорилось во введении), мы имеем в виду избытки и нехватки применительно к сложившемуся состоянию $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$ с теми установившимися (каким-либо, сейчас не обсуждаемым, путем) квотами $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I_i$; $\hat{\eta}_{ki}$, $k \in K_i$, об обоснованности которых идет речь.

Попытаемся теперь формализовать эти содержательные соображения. Такая формализация приводит к различным по своей «силе» и характеру условиям, которые можно принимать полностью или частично. Мы перечислим эти условия, разбив их на две группы: качественные и количественные условия.

I. Качественные условия.

Условие Ка 1. Естественно считать, что если выпуск некоторого продукта k сдерживается хотя бы в одном месте: $k \in K_j$ хотя бы у одного производителя P_j, то потребление этого продукта не должно лимитироваться нигде: $k \notin I_m$ для всех $m \in \Omega$, и $k \notin I_0$. И наоборот, если затраты некоторого продукта i где-либо лимитированы: $i \in I_j$ для некоторого $j \in \Omega$ или $i \in I_0$, то выпуск этого продукта нигде не должен ограничиваться: $i \notin K_l$, $l \in \Omega$.

Формально, положим

$$I = \bigcup_{j\in\Omega} I_j \cup I_0, \quad K = \bigcup_{j\in\Omega} K_j. \tag{22}$$

Тогда данное условие заключается в следующем:

$$I \cap K = \varnothing. \tag{23}$$

Отметим, что это условие, в частности, содержит требование того, чтобы для каждого производственного элемента $j \in \Omega$ было $I_j \cap K_j = \varnothing$.

Условие Ка2. В качестве усиления предыдущего условия потребуем, чтобы если выпуск продукта k ограничен у некоторого производителя P_j, то он ограничен и у всех производителей P_l, $l \in \Omega$, а если затраты продукта i ограничены у некоторого производителя P_j или у потребителя, то они ограничены и у всех производителей, и у потребителя. Формально, это условие имеет вид:

$$\begin{aligned} &K_i = K \quad \text{для всех} \quad j \in \Omega. \\ &I_j = I \quad \text{для всех} \quad j \in \Omega, \text{ и } I_0 = I. \end{aligned} \tag{24}$$

Это условие позволяет считать, что заданы единая во всей системе номенклатура «дефицитных» продуктов I и единая номенклатура «избыточных» продуктов K, роли которых таковы: всюду наложены ограничения на выпуски всех продуктов $k \in K$ (и только этих продуктов) и на затраты всех продуктов $i \in I$ (и только этих продуктов). Можно сказать, что продукт $j \in \Omega$ в данном состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ может приобрести «репутацию» либо «дефицитного», либо «избыточного» и отношение к этому продукту всюду в системе будет соответствовать его «репутации».

Заметим, что условие Ка1 также вводит «дефицитную» номенклатуру I и «избыточную» номенклатуру K (22), однако в условии Ка1 они играют более слабую роль: ограничения на выпуски налагаются только на продукты $k \in K$, а ограничения на затраты — только на продукты $i \in I$, но не обязательно у всех участников на все такие продукты.

Условие Ка3. Предыдущие условия (24) приводят к разбиению полной номенклатуры продуктов Ω в данном состоянии экономической системы на три подгруппы продуктов: «дефицитную» номенклатуру I, «избыточную» номенклатуру K и «нейтральную» номенклатуру $\Omega \setminus (I \cup K)$. Наше дальнейшее ужесточение условий заключается в дополнительном требовании того, чтобы эта «нейтральная» номенклатура была пуста, т. е.

$$I \cup K = \Omega. \tag{25}$$

Введение этого условия требует пояснений. Оно может показаться необоснованным: ведь мы собирались из содержательных соображений налагать ограничения-квоты на продукты лишь в необходимых случаях. Откуда же появятся ограничения на «нейтральные» продукты, на которые в сложившемся состоянии, экономически реализуемом при исходных ограничениях, спрос и предложение (затраты и выпуски) совпадают? И если такой «нейтральный» продукт имеется, то какое ограничение — по затратам или по выпускам — на него наложить, т. е. к какой номенклатуре — I или K — его отнести, чтобы удовлетворить условию (25)?

Действительно, может оказаться, что в некотором состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, экономически реализуемом при данных ограничениях-квотах, удовлетворяющих условиям Ка 1 и Ка 2, условие Ка 3 с самого начала не выполнено, т. е. для некоторых продуктов имеет место материальный баланс — «пограничный» случай между дефицитностью и избыточностью: ни затраты не превышают выпуски, ни наоборот. Казалось бы, при этом нет никакой надобности налагать на такие «нейтральные» продукты какие бы то ни было ограничения-квоты. Однако здесь вступают в игру соображения, так сказать, второго порядка: свойство «нейтральности» продукта, в отличие от свойств «дефицитности» и «избыточности», является *негрубым*, т. е. «малые изменения» состояния нарушают это свойство. Поэтому «репутация» продукта как «нейтрального» неустойчива: при сколь угодно малых колебаниях затрат и (или) выпусков этого продукта он может оказываться как «избыточным», так «дефицитным». Учитывая содержательное неравноправие «дефицитности» и «избыточности» продукта (первая явно «болезненнее» проявляется для участников системы, нежели вторая), примем для этого случая такое соглашение: считать, что всякий такой «нейтральный» продукт получает «репутацию дефицитного». Таким образом, даже если отсутствие ограничений на затраты, как и на выпуски, некоторого данного продукта приводит к тому, что суммарный выпуск его не меньше суммарных затрат, но и не больше, а значит, в точности равен им, то продукт согласно принятому соглашению должен быть причислен к «дефицитным».

Итак, мы всегда можем считать, что наряду с Ка 1 и Ка 2 выполнено условие Ка 3, так что все продукты разбиваются ровно на две группы I и K. Для экономии терминов мы будем называть далее продукты $i \in I$ *дефицитными*, а продукты $k \in K$ — *недефицитными*.

II. Количественные условия. Пусть задано состояние $\{(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)\}$ экономической системы при заданном разбиении полной номенклатуры продуктов Ω на дефицитную номенклатуру I и недефицитную номенклатуру K, удовлетворяющем качественным условиям Ка 1 — Ка 3. Пусть это состояние экономически реализуемо при ограничениях-квотах $\hat{\xi}_{ij}$, $i \in I$ и $\hat{\eta}_{kj}$, $k \in K$, для всех $j \in \Omega$, а также $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in I$, если в модели явно фигурирует потребитель. Укажем теперь *количественные* соотношения, которые можно выдвигать как требования к согласованности квот друг с другом и с характеристиками данного состояния.

Условие Ко 1. Это условие фактически уже введено ранее в виде тех самых неравенств-ограничений (14), (15) и (16), которые фигурируют в определениях задач выбора состояний элементов и тем самым в определении экономической реализуемости состояния системы при ограничениях-квотах; приведем эти неравенства в принятых теперь обозначениях (при единой дефицитной номенклатуре I и недефицитной K):

$$\begin{gathered}\tilde{\eta}_{kj} \leqslant \hat{\eta}_{kj}, \quad k \in K; \quad \tilde{\xi}_{ij} \leqslant \hat{\xi}_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in \Omega; \\ \tilde{\xi}_{i0} \leqslant \hat{\xi}_{i0}, \quad i \in I.\end{gathered} \tag{26}$$

Условие Ко 2. Рассматривая налагаемые ограничения $\hat{\eta}_{kj}$, $\hat{\xi}_{ij}$ и $\hat{\xi}_{i0}$ именно как «квоты» на производство и потребление продуктов, естественно считать, что суммарные квоты на каждый продукт должны находиться в определенных соотношениях с суммарными выпусками

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{j \in \Omega} \tilde{\eta}_{lj} \tag{27}$$

и суммарными затратами (включающими конечное потребление!)

$$\tilde{\xi}_l = \sum_{j \in \Omega} \tilde{\xi}_{lj} + \tilde{\xi}_{l0} \tag{28}$$

данного продукта, совпадающими между собой при сбалансированности состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$.

Введем следующие требования:

$$\sum_{j \in \Omega} \hat{\eta}_{kj} = \tilde{\xi}_k, \qquad k \in K, \tag{29}$$

$$\sum_{j \in \Omega} \hat{\xi}_{ij} + \hat{\xi}_{i0} = \tilde{\eta}_i, \qquad i \in I. \tag{30}$$

Соотношения (29) и (30) означают, что мы в качестве квот на выпуски (затраты) продуктов «раздаем» ровно те суммарные количества (28), (27) этих продуктов, которые затрачиваются (соответственно выпускаются) в данном состоянии системы. Эти требования содержательно оправданы, но весьма сильны. Из них и из условий баланса $\tilde{\eta}_l = \tilde{\xi}_l$, $l \in \Omega$, в сочетании с неравенствами (26) (условие Ко 1) немедленно вытекает

Условие Ко 3. Все квоты $\hat{\eta}_{kj}$, $k \in K$; $\hat{\xi}_{ij}$, $i \in I$, $j \in \Omega$, и $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in I$, используются полностью, т. е. все неравенства (26) в сбалансированном экономически реализуемом при этих квотах состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$ должны обращаться в равенства

$$\begin{gathered}\tilde{\eta}_{kj} = \hat{\eta}_{kj}, \quad k \in K; \quad \tilde{\xi}_{ij} = \hat{\xi}_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in \Omega; \\ \tilde{\xi}_{i0} = \hat{\xi}_{i0}, \quad i \in I.\end{gathered} \tag{31}$$

Условие Ко 3 можно было бы постулировать непосредственно, минуя условие Ко 2 (которое в свою очередь вытекает из Ко 3 с учетом сбалансированности затрат и выпусков). И действительно, естественно считать «неоправданно мягкой» квоту, которая используется не полностью (для которой в (26) остается строгое неравенство): такая квота не выполняет в полной мере[1]) своей «ограничивающей» роли, и в силу очевидного свойства экстремальных задач ее можно снизить до реального значения ограничиваемой ею компоненты состояния, не изменив этого состояния[2]). Условие Ко 3 заменяет и Ко 2, и Ко 1. Совокупность условий Ка 1 — Ка 3 и Ко 1 — Ко 3 мы будем далее использовать в качестве условий согласованности квот и экономически реализуемого при них состояния.

Замечание 1.2. В работах других авторов, вводящих определение «равновесия» экономической системы при натуральных ограничениях типа квот (см. обзор [40]), используется несколько иной подход. В этих работах рассматриваются ограничения (в наших терминах) одновременно и на затраты и на выпуски всех продуктов, однако заведомо не все эти ограничения-неравенства обращаются в равенства. Ограничения, остающиеся «нежесткими», фактически играют роль «отсутствующих квот», а для «жестких» ограничений вводится качественное условие типа Ка 1; условия типа Ко 3 выполнены при таком подходе для этих «жестких» ограничений по определению, а для «нежестких» выполнено лишь Ко 1.

Введенные условия согласованности позволяют дать теперь в общих терминах определение «согласованного поведения» потребителя в условиях дефицита некоторых продуктов. Пусть потребителю известно о произведенном наборе продуктов $\bar{z} \geqq 0$, из которых каждый продукт $i \in I$, где $I \subseteq \Omega$, объявлен дефицитным, и поэтому на его потребление ζ_i наложено ограничение $\zeta_i \leqslant \bar{\zeta}_i$, а каждый продукт $k \in K$ $(K = \Omega \setminus I)$ объявлен недефицитным, и на его потребление нет никаких ограничений. Заметим, однако, что в общем случае мы не можем заранее утверждать, что потребительский выбор в такой ситуации не будет зависеть от величин $\bar{\zeta}_k$, $k \in K$. Точно так же нельзя заранее утверждать, что если квота на дефицитный продукт $i \in I$ «достаточно велика»,

[1]) Оговоримся, однако, что полное снятие такого «нежесткого» ограничения в общем случае может приводить к изменению реализуемого состояния. Приведем легко формализуемый содержательный пример: если автомобилист располагает таким количеством талонов на бензин, которое обеспечивает ему «квоту», недостаточную для дальней поездки, он может вообще не выкупать бензин; однако, получив дополнительные талоны, он может изменить свой выбор. Впрочем, в формальных моделях при обычных условиях гладкости и выпуклости функций-ограничений и допустимых множеств, определяемых технологическими и потребительскими ограничениями такие эффекты не возникают (см., в частности, гл. II).

[2]) Если модель потребителя — неоптимизационная, то такое свойство может не иметь места в общем случае, однако оно по-прежнему гарантируется при принятии естественной аксиомы «рациональности» — так называемой «независимости выбора от отбрасывания ненужных альтернатив» (см. гл. III).

например заведомо выше, чем i-я компонента любого допустимого выбора потребителя, то потребительский выбор при этом от $\bar{\zeta}_i$ не зависит и точно таков же, как если бы продукт i был объявлен недефицитным[1]). Для того чтобы это было действительно так, нужны определенные точно сформулированные предположения (аксиомы «рациональности») о поведении потребителя и вывод соответствующих следствий из них; это будет сделано в гл. III. А сейчас мы для общего случая ограничимся постулированием самой общей, в рамках этой модели, формы описания потребительского выбора:

$$\tilde{z}=f(\bar{z},\ I), \qquad (32)$$

где f — неотрицательная вектор-функция потребительского выбора такая, что

$$\tilde{\zeta}_i \leqslant \bar{\zeta}_i \quad \text{для всех} \quad i \in I$$

(параметр-вектор цен c, как и другие параметры функции выбора f, мы для упрощения записи опускаем).

Определение 1.6. Состояние (набор продуктов) $\bar{z}=\tilde{x}_0$ потребителя (32) будем называть *потребительски согласованным* при заданной дефицитной номенклатуре I, если

$$\tilde{x}_0=f(\tilde{x}_0,\ I). \qquad (33)$$

Все такие и только такие состояния потребителя будем называть *экономически реализуемыми* при дефицитной номенклатуре I.

Теперь все подготовлено для того, чтобы дать следующее общее определение «согласованного состояния» — экономического равновесия при неравновесных ценах и ограничениях-квотах.

Определение 1.7. Сбалансированное состояние $\{(\tilde{y}_j,\ \tilde{x}_j)\}$, $\tilde{x}_0$ замкнутой экономической системы будем называть *равновесием*, если оно экономически реализуемо при данных ценах c, при данном разбиении полной номенклатуры Ω на дефицитную I и недефицитную K и при данных ограничениях-квотах $\hat{\eta}_{kj}$, $k \in K$; $\hat{\xi}_{ij}$, $i \in I$, $j \in \Omega$, и $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in I$, причем выполнены условия согласованности квот с данным состоянием системы. Сбалансированное состояние производственной системы при выполнении тех же условий будем называть *квазиравновесием.*

Детализация этого общего определения будет дана далее в § 1.5.

Замечание 1.3. Отметим, что если $\{(\tilde{y}_j,\ \tilde{x}_j)\}$, $\tilde{x}_0$ — сбалансированное состояние системы, экономически реализуемое при произвольной системе квот $\hat{\eta}_{kj}$, $\hat{\xi}_{ij}$, $\hat{\xi}_{i0}$, $k \in K$, $i \in I$, $j \in \Omega$, то

[1]) Действительно, как уже отмечалось, с содержательной точки зрения, например, на поведении потребителя может отражаться сам факт «дефицитности», т. е. «репутация» данного продукта, а тем более «наблюдаемые» им количественные уровни выпуска.

в силу достаточно очевидного свойства экстремальных задач (а также при постулировании аналогичных свойств рационального потребителя, если он описывается неоптимизационной моделью) это же состояние системы останется экономически реализуемым при новой системе квот $\tilde{\eta}_{kj}$, $\tilde{\xi}_{ij}$, $\tilde{\xi}_{i0}$, $k \in K$, $i \in I$, $j \in \Omega$, по определению удовлетворяющей условиям согласованности, и, следовательно, будет реализовано как равновесие.

Замечание 1.4. В силу предыдущего замечания возможность экономической реализации сбалансированного состояния системы при каких-либо произвольных квотах влечет за собой реализуемость этого состояния как равновесия. Поэтому проблема равновесия упирается в существование экономически реализуемого, при каких-либо квотах, сбалансированного состояния. В модели общего вида, допускающей, в частности, многопродуктовые «комплектные» выпуски, балансируемость системы может оказаться неосуществимой: вспомним замечание 1.1 в § 1.2 о возможности существенно нестрогих балансов в рамках классических «ценностных» средств балансирования спроса и предложения. Подобная же ситуация возникает и теперь. Несбалансированность состояния $\{(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)\}$, $\tilde{x}_0$, экономически реализуемого при некоторых квотах $\hat{\eta}_{kj}$, $\hat{\xi}_{ij}$ $\hat{\xi}_{i0}$, означает теперь неизбежное нарушение некоторых или всех количественных условий Ко 1 — Ко 3. При этом всегда можно, например, как и в замечании 1.3, обеспечить «самосогласованность» всех квот в смысле условия Ко 3 — однако тогда будет нарушено Ко 2. Можно вместо этого пойти на модификацию постановки задачи, допуская нарушение даже самих ограничений (26) в Ко 1 ради сохранения условий согласованности квот (29), (30) в Ко 2 (об этом см. § 1.5). Всех этих трудностей, однако, не будет, если мы ограничимся рассмотрением производственных элементов с однопродуктовыми выпусками, как это и делается во всех последующих главах книги.

Мы рассмотрели содержательные и формализованные требования к согласованности состояния экономической системы при произвольных ценах, но регулируемых ограничениях-квотах. Остановимся в заключение этого параграфа на регулирующей роли квот в производстве. Отметим, что хотя квоты на выпуски и на затраты продуктов выполняют, казалось бы, противоположные функции — первые сдерживают избыток продуктов, вторые ограничивают их нехватку — однако на производстве и те и другие проявляются качественно одинаковым образом: они «подавляют», «угнетают» производство. Неудивительно поэтому, что введение любых квот, вообще говоря, снижает эффективность производства. Тем не менее мы были вынуждены ввести квоты как средство борьбы с материальными дисбалансами, обусловленными неравновесностью существующих цен.

Но, быть может, лучше было бы испробовать другой тип средств воздействия на производственные элементы: не ограничивать их допустимые множества, снижая их технологический «потенциал», а изменить «систему стимулирования» — вид целевых функций? Почему, собственно, мы сохраняем в модели «классическую» форму целевой функции производителя — прибыль? Для того чтобы хотя бы частично ответить на эти вопросы, следует предварительно разобраться в роли прибыли в «классической» ситуации равновесных (или «свободно устанавливаемых») цен. Это мы и намерены сделать в следующем параграфе.

А в заключение этого параграфа сделаем несколько общих замечаний о характере нашей постановки задачи, после того как здесь была описана общая форма модели. Основным объектом дальнейшего исследования будут экономически реализуемые и сбалансированные состояния системы при ограничениях-квотах и в особенности «согласованные» состояния — равновесия и квазиравновесия. Как мы видели, требование согласованности предполагает выполнение ряда условий — прежде всего качественного разбиения номенклатуры продуктов на дефицитные и недефицитные, а затем установления количественных уровней соответствующих квот. Откуда же берутся эти качественные и количественные параметры?

Проблема установления согласованных номенклатур и квот того же типа, что и проблема установления равновесных цен в классических моделях. В рамках классической экономико-математической теории равновесия имеются многочисленные работы, изучающие процедуры и динамику установления цен, но существенное место занимают и работы, изучающие свойства равновесия в предположении, что равновесные цены так или иначе уже установлены (таким свойствам и был посвящен наш краткий обзор в § 1.2). В этом последнем случае можно уже не интересоваться, каким именно механизмом были установлены цены — в частности, если говорить о содержательной стороне, сформировались ли они в ходе адаптивных поисковых процедур, «горизонтальных» взаимодействий между объектами, например, в духе моделей «совершенной конкуренции» [29] либо были получены в результате «централизованного» решения соответствующей вычислительной задачи на верхнем уровне «вертикально» организованной процедуры [31, 34].

Точно так же мы в этой работе можем принимать дефицитную и недефицитную номенклатуру I, K и квоты $\hat{\eta}_{kj}$, $\hat{\xi}_{ij}$, ξ_{i0} как заданные, предполагая, что они установлены так, что соответствующее экономически реализуемое состояние 1) сбалансировано и 2) согласовано с квотами (как мы показали выше, если выполнено первое, то легко добиться и второго — «количественным» подбором квот без изменения состояния системы

$\{(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)\}$, $\tilde{x}_0$). Предметом изучения с этого момента становятся свойства такого состояния (см. гл. II — IV), а также возможные изменения параметров — цен (гл. V) и квот (вся часть II — гл. VI — XI) с сопутствующими этому изменениями согласованных состояний, т. е. изучение статики, динамики и «сравнительной статики» согласованных состояний. Предварительный этап установления исходного согласованного состояния при таком подходе не рассматривается[1]).

Можно, однако, задаться следующим вопросом. Пусть дано состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$ экономической системы, о котором известно, что оно — согласованное, т. е. сбалансированное и экономически реализуемое при некоторой дефицитной (и соответственно недефицитной) номенклатуре и системе квот. Можно ли по виду «натуральных» компонент этого состояния установить, какие продукты в этом состоянии являются дефицитными, а какие — нет? (Знание «качественного» ответа на этот вопрос немедленно дало бы и количественные величины квот — их надо взять равными соответствующим натуральным компонентам состояния.) Прототипом этого вопроса в классической модели экономического равновесия было бы восстановление равновесных цен по наблюдаемым значениям материальных потоков продуктов, такая задача там имеет, как правило (с точностью до «вырожденных случаев» неединственности равновесных цен), однозначное решение. Теперь же, в нашей «неклассической» модели, ситуация не такова: одному и тому же состоянию равновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, $\tilde{x}_0$, рассматриваемому лишь по своим натуральным (материальным) компонентам, в общем случае соответствует много различных дефицитных (и недефицитных) номенклатур, а значит, и систем квот, согласованных с данным состоянием[2]).

---

[1]) В некоторых работах по моделям равновесия при неравновесных ценах и натуральных ограничениях рассматриваются своеобразные операторы, которые имитируют содержательные процедуры формирования таких равновесий и неподвижные точки которых дают искомые равновесия (см., в частности, [35, 36] и обзор [40]). Подобные же конструкции используются и в классических моделях экономики при доказательстве существования равновесных цен. В настоящей работе конструкции такого же рода используются в доказательствах теорем второй части книги, где по существу и устанавливается существование искомых согласованных состояний. Мы, однако, не настаиваем на экономической интерпретации этих конструкций, хотя в них и можно увидеть достаточно отчетливое «управленческое» содержание.

[2]) Это можно увидеть, например, взяв любое технологически реализуемое и сбалансированное состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы (в частности, классическое квазиравновесие при некоторых ценах c), где состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ каждого элемента P_i эффективно (максимально) по вектору доходов-издержек $(cy_i, -cx_i)$ (по аналогии с определением 1,9 в следующем § 1.4). Тогда можно убедиться, что согласованная система квот получится и в том случае, если все продукты объявить дефицитными: $I=\Omega$, и в том случае, если все продукты объявить недефицитными: $I=\varnothing$.

Это замечание показывает, что в общем случае вопрос, какие продукты в этом состоянии системы дефицитны на самом деле, может не иметь определенного ответа, даже если речь идет о согласованном состоянии с учетом нашей довольно жесткой системы требований Ка 1 — Ка 3 и Ко 1 — Ко 3 к определению дефицитов и квот. А это служит оправданием применяемого нами далее подхода, когда мы наряду с данным согласованным состоянием системы «в натуре» (равновесием или квазиравновесием) считаем заданными также разбиение номенклатуры продуктов на дефицитную и недефицитную, а тем самым и квоты.

§ 1.4. «Классические» модели экономического равновесия: роль цен и прибыли в достижении эффективности

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, чем специфичен тот механизм «экономической реализации» состояний элементов и системы в целом, который опирается на использование стоимостных величин — в первую очередь цен и прибыли. Для нас этот вопрос важен в связи с использованием дополнительных средств воздействия — натуральных ограничений-квот, и основной нашей задачей будет исследование «эффективности» использования всех этих средств в неравновесных экономических моделях. Однако для суждения о влиянии на «эффективность» со стороны этих «неклассических» средств управления по сравнению с «классическими» (стоимостными) прежде всего необходимо иметь исходные, опорные суждения об эффективности классических средств. С этой целью мы вернемся сейчас к анализу классических ситуаций экономического равновесия (квазиравновесия) из § 1.2 и рассмотрим, как можно оценивать «эффективность» («качество») состояния системы и какую роль в достижении «эффективных» состояний играет использование стоимостных величин.

Для суждения об эффективности (качестве) реализовавшегося состояния экономической системы мы привлечем две достаточно естественные характеристики состояния. Первая из них применима к общему случаю замкнутой производственно-потребительской системы, когда описание потребителя дано в самой абстрактной форме постулируемой функции выбора f, или даже потребитель вообще отсутствует в модели, и рассматривается одна только производственная система (даже, быть может, открытая). В этом случае оценивать «качество» состояния $\{(y_i, x_i)\}$ мы будем по вектору чистых выпусков z (он же вектор конечного потребления x_0, если имеется потребитель — при этом необходимо $x_0 \geqq 0$). Вторая характеристика применима лишь в более частном случае, когда в модель включен потребитель, выбор которого порождается максимизацией (20) его целевой функции потребления $U(x_0)$ на бюджетном множестве $B(c, b)$. В этом частном случае естественно принять $U(x_0)$ за скалярную меру качества замкнутой системы в целом.

Начнем с общего случая, когда мы используем векторный показатель эффективности (качества) z, где компоненты вектора z — это количества (в случае открытой системы они могут быть и отрицательными) продуктов во внешнем выпуске производственной системы; считая каждый продукт «полезным», мы будем стремиться к «по возможности бо́льшим» значениям всех компонент вектора z. Обозначим через H множество всех технологически реализуемых векторов z (чистых выпусков производственной системы), т. е.

$$H = \left\{z : z = \sum_{i=1}^{N'} y_i - \sum_{i=1}^{N'} x_i,\ (y_i, x_i) \in G_i,\ i = 1, \ldots, N'\right\}. \quad (34)$$

Через H_+ обозначим множество всех векторов чистых выпусков, технологически реализуемых в сбалансированных состояниях производственной системы (т. е. при условии $z \geqq 0$):

$$H_+ = H \cap R_+^N. \quad (35)$$

Определение 1.8. Состояние $\{(y_i, x_i)\}$ экономической (производственной) системы с вектором чистых выпусков z будем называть *эффективным*, если вектор z максимален на множестве H в векторно-покомпонентном смысле (по Парето), т. е. если не существует вектора $z' \in H$ такого, что $z' \geq z$.

Для оценки эффективности технологически реализуемых состояний системы по вектору чистых выпусков и для установления связи такой оценки с экономической реализуемостью центральную роль играет следующее простое соотношение:

$$cz = \sum_{i \in \mathrm{M}} c(y_i - x_i), \quad (36)$$

где через M обозначено множество индексов производителей: $\mathrm{M} = \{1, \ldots, N'\}$. Используя обозначение $\Pi_i = c(y_i - x_i)$ для прибыли производителя P_i в состоянии (y_i, x_i) в правой части (36) и переходя к покомпонентной записи $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$, $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ в левой части (36), получаем экономически легко интерпретируемое соотношение

$$\sum_{l \in \Omega} \gamma_l \zeta_l = \sum_{i \in \mathrm{M}} \Pi_i \quad (37)$$

(см., например, [29] применительно к линейным моделям), означающее равенство суммарной стоимости чистых выпусков (слева) и суммарного чистого дохода, или прибыли (справа). Величина слева есть «скалярная мера» (взвешенная сумма компонент ζ_l в текущих ценах γ_l) векторного показателя z, а величина справа есть суммарная мера «эффективности» функционирования отдельных производственных элементов.

Воспроизведем теперь хорошо известное утверждение о свойстве вектора чистых выпусков, получаемого максимизацией прибыли (в произвольных ценах!), применительно к рассматриваемой системе производственных элементов.

Утверждение 1.1. *Пусть состояние* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *производственной системы с вектором чистых выпусков* $\tilde{z}$ *экономически реализуемо в классическом смысле при каком-либо неотрицательном векторе цен* c; *тогда оно эффективно (в смысле векторной максимальности на* H *вектора* $\tilde{z}$*).*

Действительно, в силу экономической реализуемости состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ соответствующее значение прибыли $\tilde{\Pi}_i$ элемента P_i в состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ превышает значение прибыли Π_i в любом другом технологически реализуемом состоянии $(y_i, x_i) \in G_i$ (превышает строго — в силу предположения о единственности решения задачи (17) элемента P_i). Поэтому для любого отличного от $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ технологически реализуемого состояния $\{(y_i, x_i)\}$ система в целом будет удовлетворять соотношению $\sum_{i \in M} \Pi_i < \sum_{i \in M} \tilde{\Pi}_i$, а значит, для вектора z чистых выпусков в этом состоянии в силу соотношения (37) даже полустрогое неравенство $z \gneq \tilde{z}$ невозможно при каких бы то ни было неотрицательных ценах c.

Заметим, что это утверждение останется в силе (а приведенное доказательство потребует небольших очевидных изменений), если не предполагать единственности решений задач (17) производственных элементов, но зато предположить строгую положительность вектора цен c.

Если же мы рассматриваем не просто экономически реализуемое состояние, но состояние равновесия в замкнутой системе с «классическим» потребителем (7), то имеет место другое, более сильное утверждение об «оптимальности» [1]) этого состояния.

Утверждение 1.2. *Пусть* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *— равновесие с вектором* $\tilde{z}$ $(=\tilde{x}_0)$ *чистых выпусков (и конечного потребления) при некотором неотрицательном векторе цен* c *в замкнутой экономической системе с потребителем, выбор* $\tilde{x}_0$ *которого порождается максимизацией функции* $U(x)$ *на бюджетном множестве* $B(c, b)$ *при бюджете* $b = c\tilde{z}$. *Тогда* $\tilde{x}_0$ *максимизирует* $U(x)$ *на множестве* H_+ *всех неотрицательных технологически реализуемых векторов чистых выпусков в этой системе.*

---

[1]) Утверждение 1.2 естественным образом обобщается на случай нескольких «классических» потребителей (в этом случае утверждается оптимальность по Парето экономически реализуемого распределения конечных продуктов между ними), но здесь мы такой случай не рассматриваем.

Действительно, для любого $z \in H$ должно иметь место $cz \leq c\tilde{z}$, поскольку в силу соотношения (37)

$$cz = \sum_{i \in M} \Pi_i, \quad c\tilde{z} = \sum_{i \in M} \tilde{\Pi}_i,$$

а $\Pi_i \leqslant \tilde{\Pi}_i$ для любого технологически реализуемого состояния (y_i, x_i) элемента P_i в силу экономической реализуемости состояния $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$. Поэтому и подавно $cz \leqslant c\tilde{z}$ для любого $z \in H_+$. Но это означает, что $H_+ \subseteq B(c, b)$ при $b = c\tilde{z}$. По предположению вектор $\tilde{x}_0$ доставляет $\max U(x)$ на множестве $B(c, b)$ и в то же время $\tilde{x}_0 = \tilde{z} \in H_+ \subseteq B(c, b)$, где $b = c\tilde{z}$. Поэтому и подавно $\tilde{x}_0$ доставляет $\max U(x)$ на множестве H_+.

Отметим, что в утверждении 1.2 фигурирует предположение о наличии в состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ не только материального баланса $\tilde{z} = \tilde{x}_0$, но и стоимостного («финансового») баланса $c\tilde{z} = b$ между сферами производства и потребления.

Доказательства утверждений 1.1 и 1.2 не требуют никаких дополнительных математических предположений о моделях производства и потребления, помимо предположений о существовании (и, быть может, единственности) решений задач элементов («классических» производителей и потребителей). Что же касается вопроса, обратного к тому, который рассматривается в утверждениях 1.1 и 1.2, а именно вопроса о существовании вектора цен c, обеспечивающего экономическую реализацию данного эффективного (оптимального) состояния системы, то для положительного ответа на этот вопрос нужно принять определенные дополнительные предположения. Так, для этой цели достаточно предположить, как обычно делается, выпуклость и компактность технологических множеств G_i, а также (квази)вогнутость функции полезности U, и применить стандартные теоремы о выпуклой отделимости (см., например, [17])[1]).

Отметим также, что вектор цен, фигурирующий в утверждении 1.2, существенно специфичен — это вектор равновесных цен (при некоторых естественных предположениях он единствен). В то же время в качестве вектора цен в утверждении 1.1 можно брать произвольный полуположительный вектор c.

Эффективность состояния производственной системы, экономически реализуемого при произвольном векторе $c \gneqq 0$, гарантируется утверждением 1.1. Если же мы рассматриваем квазиравновесие, т. е. дополнительно требуем, чтобы состояние производственной системы было не только экономически реализуемым, но и сбалансированным: $\tilde{z} \geqq 0$, то возникает «промежуточная» ситуация

---

[1]) Подобные доказательства существования вектора цен для экономической реализуемости более общей ситуации (при ограничениях-квотах) будут приведены ниже в гл. IV.

между двумя только что указанными. А именно, вектор цен, обеспечивающий экономическую реализацию неотрицательного (а в остальном — произвольного) вектора чистых выпусков, при естественных общих предположениях хотя и не произволен, но и не единствен, а пробегает целое множество (в выпуклой модели — конус) возможных векторов таких «квазиравновесных» цен[1]).

Далее в этом параграфе (а также всюду в дальнейшем, кроме гл. IV, V) мы будем предполагать, что вектор цен (произвольный или обладающий некоторыми оговоренными свойствами) задан и фиксирован. Поскольку «оптимизационная» модель потребителя будет для нас лишь частным случаем при анализе, сосредоточим внимание на общем критерии эффективности системы — а конкретно, производственной системы — как «векторной максимальности» набора чистых выпусков $\tilde{z}$ из утверждения 1.1. Это утверждение 1.1 можно рассматривать как точную формулировку утверждения о том, что в экономически реализуемом состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ производственной системы выпуски и затраты всех продуктов оказываются скоординированными (согласованными) «разумным» (или даже «наилучшим») образом; разность между вектором полных выпусков $\tilde{y} = \sum\limits_{i \in M} \tilde{y}_i$ и вектором полных затрат $\tilde{x} = \sum\limits_{i \in M} \tilde{x}_i$ достигает наивысшего (точнее, одного из максимальных в векторном смысле) значения на множестве технологически реализуемых состояний системы.

Остается вопрос: насколько существенно для справедливости этого свойства при экономической реализации производственных процессов (состояний) использование именно критерия прибыли, а не какого-либо иного? Форма соотношения (37), лежащего в основе доказательства утверждения 1.1 (а также более сильного утверждения 1.2), в котором существенно используются величины и свойства прибыли, показывает, что то соизмерение «затрат и результатов», которое осуществляет критерий производственности прибыли $\Pi_i = cy_i - cx_i$, как раз и обеспечивает «общесистемное соизмерение» затрат и выпусков продуктов в виде эффективности по чистым выпускам.

Однако в принципе это еще не исключает возможности того, что и какой-либо другой критерий, также учитывающий («соизмеряющий») и издержки и результаты производства, будет приводить к такой же общесистемной эффективности. Не решая

[1]) Укажем, что проблема реализуемости неотрицательного вектора чистых выпусков — проблемы «балансируемости» затрат и выпусков — чрезвычайно близка к проблеме реализуемости положительного вектора чистых выпусков, т. е. проблеме «продуктивности» (или «нетривиальной реализуемости») производственной системы, которой посвящена значительная часть этой книги.

здесь этот вопрос в общем виде, мы продемонстрируем сейчас как на абстрактной модели, так и на простейшем примере, почему именно линейный, «разностно-аддитивный» критерий прибыли в рамках принятой модели производства адекватен выбору эффективного состояния и почему отклонения от свойств критерия прибыли могут приводить к потере эффективности.

Рассмотрим абстрактную модель производства «выпуск-затраты», не конкретизируя, идет ли речь о системе взаимосвязанных элементов или об одном элементе. Будем, как и ранее, обозначать через $x=(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ вектор (полных) затрат, через $y=(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ — вектор (полных) выпусков продуктов, и пусть $G \subseteq R^N_+ \times R^N_+$ — множество «допустимых состояний» (y, x) в такой модели производства. Введем, как и ранее, вектор чистых выпусков $z=y-x$ и будем по-прежнему трактовать векторную максимальность вектора $\tilde{z}=\tilde{y}-\tilde{x}$ по всевозможным $(y, x) \in G$ как *эффективность* состояния $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in G$ (по вектору чистых выпусков). Кроме этого, введем еще одно, более слабое понятие эффективности.

Определение 1.9. Состояние $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in G$ модели производства будем называть *эффективным по вектору выпусков-затрат*, если вектор $(\tilde{y}, -\tilde{x})$ максимален (в векторном смысле) среди всех векторов $(y, -x)$ таких, что $(y, x) \in G$, т. е. если не существует вектора $(y, x) \in G$ такого, что

$$y \geq \tilde{y} \quad \text{и} \quad x \leqq \tilde{x} \tag{38}$$

или

$$y \geqq \tilde{y} \quad \text{и} \quad x \leq \tilde{x}. \tag{39}$$

Замечание 1.5. Можно определить отдельно эффективность по выпускам и эффективность по затратам, исключая возможность ситуаций (38) и (39) порознь.

Легко видеть, что из эффективности по вектору чистых выпусков (мы часто будем называть ее просто эффективностью) вытекает эффективность по вектору выпусков-затрат. Обратное, вообще говоря, неверно, в чем мы убедимся несколько позже.

Рассмотрим теперь некоторую «неклассическую» постановку задачи производителя в форме

$$\begin{gathered} \mu(y, x) = \max, \\ (y, x) \in G, \end{gathered} \tag{40}$$

где $\mu(y, x)$ — критериальная функция, отличная от прибыли $\Pi = cy - cx$ (о возможности включения в задачу (40) дополнительных ограничений мы пока не говорим). Из естественного содержательного предположения о качественном факте «полезности» всех рассматриваемых продуктов вытекает, что функция μ должна быть возрастающей (или хотя бы неубывающей) по y и убывающей (или хотя бы невозрастающей) по x — точнее, по каждой компоненте η_i вектора y и по каждой компоненте ξ_j вектора x соответственно. Функция прибыли $\mu = \Pi = cy - cx$ (при $c > 0$ или хотя бы $c \geqq 0$), очевидно, именно такова, но такими же свойствами обладает и $\mu = \frac{cy - cx}{cx}$ («рентабельность»), $\mu = cy$ («валовой выпуск в стоимостном выражении»), $\mu = \frac{cy}{cx}$ (аналог «фондоотдачи») и т. п.— даже если ограничиться только «стоимостным» соизмерением затрат и выпусков-результатов. Легко видеть, что справедливо

Утверждение 1.3. *Если функция $\mu(y, x)$ не убывает по каждой компоненте y и не возрастает по каждой компоненте x и если существует единственное решение $(\tilde{y}, \tilde{x})$ задачи (40), то состояние $(\tilde{y}, \tilde{x})$ эффективно по вектору выпусков-затрат.*

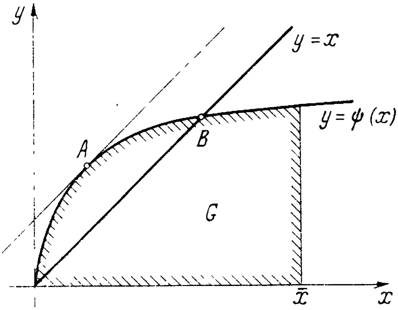


Рис. 1.1.

Таким образом, эффективность по выпускам-затратам обеспечивается любым критерием $\mu(y, x)$ указанного качественного вида. А обеспечивается ли при этом эффективность по чистым выпускам? Для ответа на этот вопрос рассмотрим простейший пример однопродуктовой модели «затраты — выпуск»[1]), которая описывается скалярной производственной функцией $y = \psi(x)$ скалярного аргумента x на некотором отрезке $[0, \bar{x}]$ (рис. 1.1). Множество допустимых состояний — точек (y, x) (технологическое множество) — при этом имеет вид

$$G = \{(y, x)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \bar{x},\ 0 \leqslant y \leqslant \psi(x)\};$$

на рис. 1.1 границы множества G показаны штриховкой.

Однопродуктовая модель удобна, помимо прочего, еще и тем, что цен в ней по существу нет: цену на единственный продукт можно принять равной единице. При этом прибыль Π численно совпадает с величиной z чистого выпуска (единственного) продукта: $\Pi = z = y - x$. На рис. 1.1 выделена точка A, в которой достигается (скалярный) максимум чистого выпуска $\tilde{z} = \tilde{y} - \tilde{x}$

[1]) В такой однопродуктовой форме обычно рассматриваются «макромодели» экономики в целом или, например, промышленного производства в целом (при рассмотрении скалярного «валового» или совокупного продукта системы). Мы же здесь рассматриваем «микромодели»; примером модели однопродуктового производства на «микроуровне» может служить простейшая модель производства зерна: «посев — жатва».

и одновременно максимум прибыли[1]). В другой выделенной точке B выпуск совпадает с затратами и чистый выпуск равен нулю; производство затрачивает на свои нужды весь продукт, который оно выпускает. В то же время точка B, очевидно, как и каждая точка на «производственной кривой» $y=\psi(x)$, представляет состояние, эффективное по выпуску-затратам. Отсюда сразу вытекает, что эффективность по выпуску-затратам в общем случае слабее, чем просто эффективность (эффективность по чистым выпускам).

Заметим теперь, что критерии $\mu(y, x)$, отличные от критерия прибыли, будут приводить, вообще говоря, к иным состояниям модели, нежели эффективное состояние A. В частности, критерий «вала», в данном случае просто равного количеству выпускаемого продукта y, всегда стремится «увести» производство в состояние с большей интенсивностью, т. е. с бо́льшим полным выпуском y и с большей величиной затрат x, чем в эффективном состоянии A. При этом чистый выпуск $z=y-x$ будет не возрастать, а падать. В частности, в точке B, в которой достигается максимальный валовой выпуск y среди всех возможных при условии сбалансированности (замкнутости) производства (т. е. при условии $y \geqq x$), чистый выпуск равен нулю!

Таким образом, критерий выбора режима производства в общей форме целевой функции $\mu(y, x)$ не гарантирует того, что всегда гарантирует критерий прибыли: эффективности производства. Более того, если рассматривать систему производственных элементов P_i, то использование критерия общего вида $\mu(y, x)$ для выбора состояний (y_i, x_i) отдельных ее элементов не гарантирует даже эффективности по вектору выпусков-затрат (y, x), где y — полный (суммарный) выпуск: $y=\sum\limits_{i\in M} y_i$ и, аналогично, $x=\sum\limits_{i\in M} x_i$. Это легко увидеть снова на однопродуктовом примере двух параллельно работающих производственных элементов того же типа, что и в вышеприведенном примере[2]).

Все проиллюстрированное на этих однопродуктовых примерах тем более относится к общему многопродуктовому случаю в нашей модели производственной системы: произвольные критерии $\mu(y, x)$, отличные от критерия прибыли, не могут гарантировать

---

[1]) Для простоты мы взяли строго вогнутую функцию $\psi(x)$, так что точка максимума функции $\psi(x)-x$ единственна.

[2]) Для этого следует подобрать функции $\psi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_2)$ для заданных критериев $\mu_i(y_i, x_i)$ так, чтобы выбираемые состояния $(\tilde{y}_1, \tilde{x}_1)$ и $(\tilde{y}_2, \tilde{x}_2)$ были таковы, что $\frac{d\psi_1(\tilde{x}_1)}{dx_1} \neq \frac{d\psi_2(\tilde{x}_2)}{dx_2}$. Это будет означать, что при той же сумме затрат $\tilde{x}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2$ можно получить бо́льшую сумму выпусков $y=y_1+y_2=\psi_1(x_1)+\psi_2(x_2)$.

эффективности состояния производственной системы в целом. То качественное «соизмерение» затрат и результатов (выпусков), которое дает произвольный критерий $\mu(y, x)$, достаточно лишь для обеспечения эффективности по выпуску-затратам, причем для каждого элемента по отдельности, а не для системы в целом. В то же время критерий прибыли $\Pi(y, x; c) = cy - cx$ в силу своей линейности (и «разностной» структуры соизмерения выпусков и затрат «разнокачественных» продуктов в единых ценах c) гарантирует эффективность производства в сильном смысле — эффективность по вектору чистых выпусков системы в целом. Подчеркнем, что это относится к прибыли, исчисляемой в произвольных, но единых по всей системе ценах $c > 0$; произвольность цен сказывается на том, какой именно из эффективных (векторно-максимальных) векторов чистых выпусков z будет реализован, но не на самóм факте эффективности такого вектора.

Введение в экономическую модель дополнительных ограничений — а такая ситуация и будет далее основным предметом нашего исследования — разумеется, не оставит картину неизменной. Эффективный, в прежнем «безусловном» смысле, вектор чистых выпусков теперь, вообще говоря, может оказаться не реализуемым даже технологически (т. е. без нарушения ограничений). Однако и при этом вышеуказанные недостатки произвольных производственных критериев в сравнении с критерием прибыли по-прежнему будут проявляться; критерий иного вида, например критерий «вала», в общем случае будет, так сказать, «еще хуже», чем критерий прибыли, если судить о «качестве» состояния производственной системы только по величине вектора чистых выпусков. Для однопродуктовой модели это снова можно увидеть из анализа примера на рис. 1.1, а общий случай многопродуктовой многоэлементной производственной системы при произвольных ограничениях-квотах будет рассмотрен в гл. IV.

Там же будет показано, в частности, что при использовании критерия прибыли выбираемое состояние системы может оказаться «неэкономичным»: того же уровня чистого выпуска можно добиться при меньших валовых выпусках и меньших затратах (ср. точки A и B на рис. 1.1). Здесь же мы ограничимся этим предварительным обсуждением как аргументом в пользу того, почему мы взяли в качестве основного критерия выбора состояний производственных элементов именно критерий прибыли.

§ 1.5. «Неклассические» согласованные состояния в модели экономики: равновесие и квазиравновесие

В этом параграфе мы конкретизируем тот вид модели экономической системы — точнее, ее производственной подсистемы — который рассматривается в книге всюду далее, и приведем полные формулировки соответствующих определений согласованных состояний при ограничениях-квотах в такой системе.

Будем рассматривать в качестве производственного элемента P_i модель «отраслевого» производства, в котором выпускается ровно один продукт, причем разные элементы P_i производят разные продукты. Таким образом, число N' производственных элементов равно числу N различных продуктов, и далее мы считаем, что элемент P_i производит продукт i $(i=1, \ldots, N)$. Ради простоты мы откажемся от представления выпуска элемента P_i как вектора y_i с единственной ненулевой компонентой η_{ii} $(\eta_{ji}=0$ при $j\neq i)$, а вместо этого будем называть выпуском скалярное количество производимого продукта i, обозначая его по-прежнему через y_i. Таким образом, состояние элемента P_i представляется парой «скаляр — вектор» $(y_i, x_i)=(y_i, \xi_{1i}, \ldots, \xi_{Ni})$, а технологическое множество G_i — это множество в $R_+^1\times R_+^N$. Задача элемента P_i при допустимом множестве $\widehat{G}_i$ (где $\widehat{G}_i\subseteq G_i$), имеет вид

$$\Pi_i=\gamma_i y_i-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\xi_{ji}=\max,\qquad (y_i, x_i)\in\widehat{G}_i. \tag{41}$$

В конкретных рассматриваемых нами теперь и всюду далее случаях множество $\widehat{G}_i$ принимает несколько различный вид в зависимости от того, производит ли элемент P_i дефицитный или же недефицитный продукт. Пусть, как мы договорились, вся номенклатура Ω продуктов разделена на номенклатуру дефицитных продуктов I и номенклатуру недефицитных продуктов K (причем эти номенклатуры не пересекаются). Пусть также введены ограничения-квоты $\{\widehat{y}_i, \widehat{\xi}_{ji}\}$ на производство недефицитных и потребление дефицитных продуктов. Тогда задача (41) конкретизируется так:

Если $i\in I$, то

$$\Pi_i=\gamma_i y_i-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\xi_{ji}=\max, \tag{42}$$
$$(y_i, x_i)\in G_i,$$
$$\xi_{ji}\leqslant\widehat{\xi}_{ji},\quad i\in I,$$

и если $i\in K$, то

$$\Pi_i=\gamma_i y_i-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\xi_{ji}=\max,$$
$$(y_i, x_i)\in G_i, \tag{43}$$
$$\xi_{ji}\leqslant\widehat{\xi}_{ji},\quad j\in I,$$
$$y_i\leqslant\widehat{y}_i.$$

Обозначим решение задачи вида (41) (т. е. задачи вида (42) или (43)) через $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$. Вектор $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ есть экономически реализуемое состояние производственного элемента P_i при ограничениях $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I$, а если $i \in K$, то и при дополнительном ограничении $\hat{y}_i$. Через $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, как и прежде, обозначим соответствующее экономически реализуемое состояние производственной системы при ограничениях $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I$, $i \in \Omega$, а также $\hat{y}_i$, если $i \in K$.

Ниже приводятся определения квазиравновесия и равновесия системы элементов рассматриваемого вида. Такого рода состояния системы будут основным объектом изучения в этой книге.

Определение 1.10. Состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ и номенклатурами дефицитных продуктов I и недефицитных продуктов $K = \Omega \backslash I$ в системе производственных элементов P_i назовем *квазиравновесием*, если оно удовлетворяет двум условиям:

1°. Если $i \in I$, то вектор $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ является решением задачи (42) и удовлетворяет равенствам

$$\tilde{\xi}_{ji} = \hat{\xi}_{ji} \quad \text{при всех} \quad j \in I, \tag{44}$$

а если $i \in K$, то вектор $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ является решением задачи (43) и удовлетворяет равенствам

$$\tilde{\xi}_{ji} = \hat{\xi}_{ji} \quad \text{при всех} \quad j \in I, \tag{45}$$

$$\tilde{y}_i = \hat{y}_i. \tag{46}$$

2°. Состояние этой производственной системы является сбалансированным, т. е. компоненты вектора чистых выпусков $\tilde{x}_0$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{y}_i - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\xi}_{ik} = \tilde{\xi}_{i0} \geqslant 0 \text{ для всех } i \in \Omega. \tag{47}$$

Определение 1.11. Состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ и номенклатурами дефицитных продуктов I и недефицитных продуктов $K = \Omega \backslash I$ в системе производителей P_i и потребителя с функцией выбора $f(x, I)$ назовем *равновесием*, если это состояние является квазиравновесием (при тех же I и K) и удовлетворяет условию

$$\tilde{x}_0 = f(\tilde{x}_0, I), \tag{48}$$

т. е. вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ потребительски согласован.

Данные определения квазиравновесия и равновесия системы полностью соответствуют общим требованиям к соответствующим согласованным состояниям системы из § 1.3 применительно к «отраслевым» однопродуктовым производственным элементам.

Поэтому мы не будем давать здесь детального описания этих состояний, и сделаем лишь отдельные пояснения.

Во-первых, выполнение равенств (44) и (45), (46) как раз и означает, что все имеющиеся ограничения-квоты использованы полностью, т. е. квоты и разбиение номенклатуры продуктов Ω на I и K согласованы между собой.

Во-вторых, такое согласование обеспечивает неотрицательность всех чистых выпусков, а в равновесии — еще и согласованность производственной системы с «внешним» потребителем (соотношения (47), (48)).

В дальнейшем мы, рассматривая состояния $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ производственных элементов P_i, $i \in \Omega$, образующие квазиравновесие, будем задачи (42), (43) записывать, имея в виду совпадение квот и соответствующих компонент решений $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, при $i \in I$ как задачу

$$\begin{gathered} \Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j \in \Omega} \gamma_i \xi_{ji} = \max, \\ (y_i, x_i) \in G_i, \\ \xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad j \in I, \end{gathered} \tag{49}$$

и соответственно при $i \in K$ — как задачу (49) с дополнительным условием

$$y_i \leqslant \tilde{y}_i.$$

Кроме того, в ряде случаев само квазиравновесие (равновесие) из определения 1.10 (1.11) будем обозначать как $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}_I$, $\tilde{x}_0$, явно указывая на «дефицитную номенклатуру» I (а следовательно, и $K = \{\Omega \backslash I\}$), или вообще опускать указание на I и K и (или) $\tilde{x}_0$, если явной конкретизации этих множеств и вектора не требуется, т. е. обозначать это состояние как $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$.

Прежде чем закончить настоящую главу, попытаемся применить требования к согласованным состояниям с ограничениями-квотами из § 1.3, дав обобщающее определение квазиравновесия (равновесия) на случай, когда каждый производственный элемент производит не один продукт, как это предполагалось ранее, а вообще говоря, несколько или даже все продукты, причем одни и те же продукты могут производиться разными производственными элементами.

Пусть вся номенклатура продуктов Ω разделена на две номенклатуры — дефицитную I и недефицитную K, и пусть на потребление дефицитных и производство недефицитных продуктов заданы квоты

$$\{\hat{\xi}_{ji},\ j \in I;\ \hat{\eta}_{ki},\ k \in K\}.$$

Определим теперь следующую экстремальную задачу, решаемую

i-м производственным элементом:

$$\Pi_i = \sum_{j\in I} \gamma_j (\eta_{ji} - \xi_{ji}) + \sum_{k\in K} \gamma_k \left(\min\{\eta_{ki}, \hat{\eta}_{ki}\} - \xi_{ki}\right) = \max, \tag{50}$$

$$(y_i, \ x_i) \in G_i, \tag{51}$$

$$\xi_{ji} \leqslant \hat{\xi}_{ji}, \qquad j \in I. \tag{52}$$

В соответствии с соотношением (50) прибыль Π_i элемента исчисляется в данном случае как разность стоимостей проданных и купленных им продуктов. При этом, если продукт K недефицитен, то объем его продажи ограничен квотой η_{ki}. Другими словами, элемент *может превышать квоты на выпуск*, но такое превышение ему не оплачивается. В то же время, в соответствии с ограничениями (52), элемент не имеет права превышать квоты на потребление дефицитных продуктов.

Состояние $\{(\tilde{y}_i, \ \tilde{x}_i)\}$ системы общих производственных элементов (51)—(52) с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$, номенклатурами дефицитных продуктов I и недефицитных K и системой квот $\{\hat{\xi}_{ji}, \ j \in I; \ \hat{\eta}_{ki}, \ k \in K\}$ можно назвать квазиравновесием, если это состояние удовлетворяет условиям:

1°. Для каждого $i \in \Omega$ вектор $(\tilde{y}_i, \ \tilde{x}_i)$ является решением задачи (50), (51), (52) и удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{\xi}_{ji} = \hat{\xi}_{ji} \quad \text{для всех} \quad j \in I, \tag{53}$$

$$\tilde{\eta}_{ki} \geqslant \hat{\eta}_{ki} \quad \text{для всех} \quad k \in K. \tag{54}$$

2°. Вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{i\in\Omega} (\tilde{\eta}_{ji} - \tilde{\xi}_{ji}) = \tilde{\xi}_{j0} \geqslant 0, \qquad j \in I, \tag{55}$$

$$\sum_{i\in\Omega} (\hat{\eta}_{ki} - \tilde{\xi}_{ki}) = \tilde{\xi}_{k0} \geqslant 0, \qquad k \in K. \tag{56}$$

(Равновесие с потребителем $f(x, \ I)$ естественно определить, подобно предыдущему, как квазиравновесие производственной системы плюс условие потребительской сбалансированности.)

В соответствии с таким определением в квазиравновесии (и в равновесии, естественно) квота на потребление каждого дефицитного продукта всегда используется полностью (см. равенства (53)), а выпуск недефицитного продукта находится на уровне соответствующей квоты (54) или даже превышает ее, причем (как уже отмечалось выше) превышение реального выпуска ($\tilde{\eta}_{ki}$) над квотой ($\hat{\eta}_{ki}$) «бесполезно» с точки зрения максимизации прибыли Π_i. Подчеркнем, что, в отличие от случая однопродуктовых «отраслевых» производственных элементов, в этом общем случае возможность такого превышения приходится допускать: мы выполняем требования, обусловленные квотами на затраты дефицитных продуктов, но ввиду возможности «комплектного» производства нескольких продуктов и, в частности, недефицитного в комплекте с дефицитным[1]) мы не можем требовать безусловного одновременного выполнения требований (запрета превышений) по всем квотам на выпуски недефицитных продуктов. Ослабление этих последних требований дано здесь в форме модификации подсчета прибыли при допущении превышения таких квот. Таким образом, удовлетворить всем требованиям к согласованности состояний и квот в общей многопродуктовой модели производства не удается.

Возвращаясь к нашей основной модели производственных элементов с однопродуктовыми выпусками, отметим, что и здесь можно было бы, в соответствии с альтернативной трактовкой квот, допускать неоплачиваемое превышение квот на выпуски. Однако, как легко видеть, естественное предположение о возможности снизить выпуск, снизив при этом и затраты[2]), гарантирует, что однопродуктовый производитель в действительности превышать квоту на выпуск все равно не будет. Поэтому принятая нами трактовка квоты на выпуск (как и на затраты) как абсолютного запрета ее превышения в этом случае вполне адекватна существу ситуации.

Этими замечаниями мы и завершим данную, по существу вводную, главу. В следующей и дальнейших главах книги мы будем иметь дело только с производственными элементами с однопродуктовыми выпусками; детальному описанию моделей таких производственных элементов и их систем, а затем моделей потребителей и моделей замкнутых систем и посвящена вся остальная часть книги.

---

[1]) См. пример «металл — шлак» в § 1.3.

[2]) Это предположение заведомо выполнено в рамках модельных предположений «гладкость — выпуклость» технологий, принимаемых в дальнейшем.

Глава II
ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТ И ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ СИСТЕМА

§ 2.1. Технологические и экономические аспекты производства

В этой главе мы конкретизируем те предположения относительно производственных элементов и систем, составленных из таких элементов, на которые мы будем существенно опираться далее при анализе модели. Некоторые из этих основных предположений (§ 2.2) скорее формальны, чем содержательны; такие предположения обычно вводятся при экономико-математическом моделировании, с тем чтобы задача стала доступной анализу. Таковы предположения о виде множеств всех технологических допустимых состояний элемента (множеств в векторном пространстве затрат-выпуска) — замкнутость, выпуклость и т. д., предположения о характере оптимального состояния элемента как решения задачи максимизации прибыли — существование, единственность, «регулярная» зависимость от параметров-ограничений.

Более интересны содержательные аспекты принимаемых предположений, которые с этой точки зрения можно разделить на два типа: технологические и экономические. Технологические аспекты касаются, так сказать, материальных закономерностей и ограничений, связанных с производством продуктов. Экономические же аспекты, сверх этого, учитывают дополнительные стоимостные показатели и соотношения и их воздействие как на поведение каждого элемента в отдельности, так и на функционирование системы в целом. Такой «экономический» характер имеют и введенная в гл. I гипотеза о максимизации прибыли и вводимое в настоящей главе предположение о «прибыльности» каждого отдельного производства при существующей системе цен. Оказывается, что такое экономическое предположение (неявно содержащее в себе предположение о «продуктивности» системы в целом) является, вместе с остальными, достаточным для существования экономически реализуемых состояний с положительными выпусками конечной продукции. Точнее, принятые предположения позволяют обосновывать существование нетривиальных (ненулевых) согласованных состояний производственной системы (квазиравновесий), а также согласованных состояний замкнутой экономической системы, включающей конечное потребление (равновесий).

Формулировки, а частично и доказательства этих утверждений приводятся в § 2.3 (недостающие доказательства будут получены как частные следствия более общих результатов во второй части книги).

§ 2.2. Производственный элемент и его свойства

В этом параграфе мы вводим ряд предположений о характере «технологии» производства, т. е. о связи между затратами и выпусками продуктов, дополняем их гипотезой о поведении производственного элемента как о стремлении элемента к максимизации прибыли и анализируем следствия, вытекающие из выдвинутых предположений.

Напомним, что каждый производственный элемент P_i производит один продукт i (и является единственным производителем этого продукта) в количестве, обозначаемом y_i, а затрачивает при этом, вообще говоря, все продукты j в количествах ξ_{ji}, $j = 1, \ldots, N$. Вектор «выпуска-затрат» $(y_i, \xi_{1i}, \ldots, \xi_{Ni}) = (y_i, x_i)$ характеризует текущее состояние (производственный процесс) элемента P_i. С каждым элементом P_i мы связываем множество G_i производственных процессов (y_i, x_i), допустимых в силу технологических возможностей производства i-го продукта. В дальнейшем допустимое множество G_i будем именовать «технологическим множеством» элемента P_i.

Сделаем ряд предположений, уточняющих структуру технологических множеств. В дальнейшем изложении в каждом конкретном случае будет оговорено, какие именно из этих предположений считаются выполненными.

Предположение 1. Технологическое множество $G_i \subset R_+^{N+1}$ а) ограничено; б) замкнуто; в) выпукло; г) содержит начало координат, т. е.

$$(0,\ 0) \in G_i; \tag{1}$$

д) содержит хотя бы один вектор (y_i, x_i) с $y_i > 0$; е) удовлетворяет условию: если $(y_i, x_i) \in G_i$ и $x_i = 0$, то $y_i = 0$.

Каждому из пунктов предположения 1 обычно дают простую интерпретацию в терминах свойств производственных процессов, допустимых при заданной технологии:

а) ограниченность технологического множества соответствует предположению, что элемент не может производить и потреблять продукты в сколь угодно больших количествах;

б) требование замкнутости технологического множества означает, что если некоторый процесс, характеризующийся вектором выпуска-затрат, можно с любой точностью приблизить технологически допустимым процессом, то и данный процесс также технологически допустим;

в) выпуклость множества G_i интерпретируется обычно как реализуемость любых «смесей» (выпуклых комбинаций) технологических процессов;

г) интерпретация соотношения (1) очевидна: предприятие может «бездействовать», т. е. ничего не производить, ничего при этом не потребляя;

д) это условие очевидно: элемент может не только затрачивать «чужие» продукты, но и выпускать свой продукт;

е) это условие (иногда называемое «неосуществимостью рога изобилия» [29]) означает, что элемент не может произвести ненулевое количество продукции, ничего при этом не затратив[1]).

Пусть на все продукты, производимые элементами, назначены цены; мы обозначаем цену i-го продукта через γ_i, а вектор

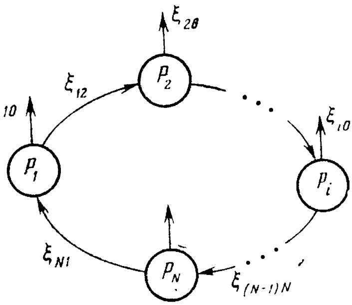


Рис. 2.1.

цен $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ — через c. Как уже отмечалось выше, всюду в дальнейшем, кроме гл. IV, V, будем считать, что вектор цен c фиксирован и положителен.

Пусть также заданы номенклатуры дефицитных продуктов $I \subseteq \Omega$ и соответственно недефицитных продуктов $K = \Omega \backslash I$.

Как уже говорилось в гл. I, предметом нашего изучения будут состояния элементов, являющиеся решениями задач на максимум прибыли при ограничениях-квотах на потребление де-

[1]) Заметим, несколько забегая вперед, что система производственных элементов, рассматриваемая как одно целое, вообще говоря, может производить и выпускать вовне положительные количества продукции, не используя поставок продуктов извне. Примером системы такого типа может служить система, изображенная на рис. 2.1. Это системное свойство, называемое продуктивностью, будет играть ключевую роль в дальнейшем.

фицитных продуктов, а также производство недефицитных:

$$\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max, \tag{2}$$

$$(y_i, \ x_i) \in G_i, \tag{3}$$

$$\xi_{ji} \leqslant \widehat{\xi}_{ji}, \quad j \in I, \tag{4}$$

а также

$$y_i \leqslant \widehat{y}_i. \tag{5}$$

Задачу вида (2), (3), (4), (5) будем обозначать через $\langle i;\ \widehat{y}_i,\ \widehat{\xi}_{ji},\ I\rangle$, задачу (2), (3), (4) — через $\langle i;\ \widehat{\xi}_{ji},\ I\rangle$, задачу (2), (3), (5) — через $\langle i;\ \widehat{y}_i\rangle$, а задачу (2), (3) — через $\langle i\rangle$. В тех же случаях, когда нам важно лишь указать, что речь идет о задаче элемента P_i, имеющей любую из перечисленных выше форм, т. е. о задаче максимизации прибыли (2) при ограничении (3) и, быть может, при ограничениях (4), а также (5), будем такую задачу[1]) обозначать через $\langle i;\ \cdot\rangle$.

Отметим, что в силу компактности множества G_i и непрерывности линейной функции $\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji}$ решение любой задачи вида $\langle i;\ \cdot\rangle$ всегда существует.

Определение 2.1. Состояние $(\widetilde{y}_i,\ \widetilde{x}_i)$ элемента P_i будем называть *экономически реализуемым*, если оно является решением некоторой экстремальной задачи вида $\langle i;\ \cdot\rangle$.

Предположение 2. Решение каждой задачи $\langle i;\ \cdot\rangle$ единственно при любых ограничениях вида (4), (5), т. е. при произвольной номенклатуре $I \subseteq \Omega$ и при любых квотах $\widehat{y}_i,\ \widehat{\xi}_{ji},\ j \in I$.

Предположение 2 будем трактовать как чисто формальное требование[2]).

Предположение 3. Каждая ξ_{li}-я компонента решения $(\widetilde{y}_i, \widetilde{\xi}_{1i}, \ldots$ $\ldots, \widetilde{\xi}_{li}, \ldots, \widetilde{\xi}_{Ni})$ задачи $\langle i;\ \widehat{y}_i,\ \widehat{\xi}_{ji},\ I\rangle$ есть неубывающая функция ограничения $\widehat{y}_i$ при заданных ограничениях $\widehat{\xi}_{ji},\ j \in I$, где I $(I \subseteq \Omega)$ — произвольная номенклатура.

Предположение 3 означает, что если рассматривать лишь экономически реализуемые состояния элемента P_i и интересоваться зависимостью его затрат ξ_{ji} от параметра-ограничения на выпуск $\widehat{y}_i$ (такая зависимость однозначно определена в силу

---

[1]) В силу ограниченности множеств G_i любую из перечисленных задач можно было бы формально представить в форме (2), (3), (4), (5), взяв в «лишних» ограничениях — в (4) и (5) — достаточно большие величины $\widehat{\xi}_{ji}$ и $\widehat{y}_i$.

[2]) Многие из полученных далее результатов сохраняются с надлежащими изменениями и без предположения 2, однако при этом их формулировки и доказательства могут значительно усложняться и терять наглядность.

предположения 2), то в силу этой зависимости увеличение квоты на выпуск $\hat{y}_i$ влечет за собой увеличение (точнее, неуменьшение) элементом P_i своих затрат ξ_{ji} каждого из продуктов $j \in \Omega$. Это свойство напоминает характерный для моделей леонтьевского типа «комплектный» качественный вид зависимости выпуска от затрат: увеличение выпуска требует увеличения затрат всех используемых продуктов «в комплекте» («взаимокомплектующие поставки»). В отличие от этого, в общем случае увеличение выпуска может быть достигнуто даже при уменьшении части затрат, если это уменьшение компенсируется увеличением затрат других, «заменяющих» продуктов. Подчеркнем, однако, что в предположении 3 утверждается неубывающая зависимость затрат ξ_{ji} не от реального выпуска y_i, а от ограничения сверху $\hat{y}_i$ на этот выпуск; впрочем, сочетанием предположения 3 с предположениями 1 и 2 такое утверждение распространяется (см. ниже свойство Н.1) на зависимость затрат ξ_{ji} от реального выпуска y_i элемента P_i.

Существенную роль в дальнейшем будут играть решения следующих задач: задачи $\langle i \rangle$, т. е. задачи элемента P_i на максимум прибыли на множестве G_i без каких-либо дополнительных ограничений, и задачи $\langle i;\ \hat{\xi}_{ji},\ I \rangle$ при дополнительных ограничениях на потребление дефицитных продуктов. Введем для них специальные обозначения.

Определение 2.2. Решение задачи $\langle i \rangle$ будем называть *абсолютно-оптимальным* для P_i и обозначать его через

$$(y_{i\,\max},\ x_{i\,\max}).$$

Решение задачи $\langle i;\ \hat{\xi}_{ji},\ I \rangle$ будем называть *условно-оптимальным* для P_i (при условиях-квотах $\hat{\xi}_{ji}$ на дефицитную номенклатуру I). Для обозначения этого решения будем ставить над символами $y_{i\,\max}$, $x_{i\,\max}$ тот же знак, что и над символами квот [1]):

$$(\hat{y}_{i\,\max},\ \hat{x}_{i\,\max}).$$

Отметим, что вектор $(y_{i\,\max},\ x_{i\,\max})$ целиком определяется технологическим множеством G_i, в то время как вектор $(\hat{y}_{i\,\max},\ \hat{x}_{i\,\max})$ определяется еще и дополнительными ограничениями вида $\hat{\xi}_{ji}$, $j \in I$.

Замечание 2.1. Согласованное состояние системы производственных элементов, как уже говорилось в гл. I, подразумевает внутреннюю согласованность между параметрами состояния: разбиением номенклатуры продуктов Ω на дефицитную I и недефицитную K, назначением квот на затраты $\tilde{\xi}_{ji}$ и выпуски

---

[1]) При других квотах, обозначенных как-либо иначе, например $\tilde{\xi}_{ji}$, $\bar{\xi}_{ji}$ и т. д., соответственно будем писать $(\tilde{y}_{i\,\max},\ \tilde{x}_{i\,\max})$, $(\bar{y}_{i\,\max},\ \bar{x}_{i\,\max})$ и т. д.

$\tilde{y}_i$, с одной стороны, и состояниями $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, которые реализуются элементами системы, с другой стороны. В частности, используя определение 2.2, можно теперь уточнить, что для всех недефицитных продуктов $k \in K$, и только для них, должно иметь место неравенство

$$\tilde{y}_k < \tilde{y}_{k\,\max}, \tag{6}$$

тогда как для всех дефицитных продуктов $i \in I$, и только для них, имеет место равенство

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i\,\max}. \tag{7}$$

В самом деле, если равенство (7) выполняется для некоторого продукта i, то, следуя соглашению, указанному в § 1.3 в пояснении к условию Ка 3, мы не можем рассматривать продукт i как недефицитный; справедливость остальных утверждений здесь очевидна.

Объединив предположения 1 — 3, выделим тот общий тип производственного элемента, который будет основным предметом дальнейшего исследования.

Определение 2.3. Производственный элемент P_i, $i \in \Omega$, назовем *нормальным* элементом, если его технологическое множество G_i удовлетворяет предположениям 1, 2 и 3.

Наряду с производственными системами, составленными из нормальных элементов «общего» вида, мы будем в гл. V и XI рассматривать системы производственных элементов более частного вида — элементов с комплектной характеристикой.

Определение 2.4. Нормальный элемент P_i, $i \in \Omega$, назовем элементом *с комплектной характеристикой* (для краткости, К-*элементом*), если его технологическое множество G_i удовлетворяет следующему условию комплектности:

Условие комплектности. На некотором отрезке $[0, y_i']$ заданы неотрицательные функции $\varphi_{ji}(y_i)$, $j = 1, \ldots, N$, такие, что каждый вектор (y_i, x_i), удовлетворяющий соотношениям

$$\xi_{ji} = \varphi_{ji}(y_i), \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{8}$$

принадлежит множеству G_i и каждый вектор $(y_i, x_i) \in G_i$ удовлетворяет соотношениям

$$\xi_{ji} \geqslant \varphi_{ji}(y_i), \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Это определение по существу представляет собой непосредственное нелинейное обобщение технологий леонтьевского типа [13, 29], предусматривающих необходимость «заданного комплекта» затрат $(\xi_{ji}) = (\varphi_{ji}(y_i))$, $j = 1, \ldots, N$, для выпуска y_i.

Из определения элемента с комплектной характеристикой следует, с учетом предположений 1 — 3, выполнение двух достаточно очевидных свойств таких элементов.

Свойство К.1. Для решения задачи $\langle i; \cdot\rangle$ соотношения (9) выполняются как равенства.

Свойство К.2. Все функции $\varphi_{ji}(y_i)$ — выпуклые неубывающие, и для любых i, j существует $y_i^j \in [0, y']$ такое, что $\varphi_{ji}(y_i) \equiv 0$ на $[0, y_i^j]$, и если $y_i^j < y_i'$, то $\varphi_{ji}(y_i) > 0$ на $(y_i^j, y_i']$. При этом $\varphi_{ji}(y_i)$ строго возрастает на $(y_i^j, y_i']$, а функция $\varphi_{ji}^{-1}(\xi_{ji})$, обратная к функции $\varphi_{ji}(y_i)$, определена при всех $\xi_{ji} : \varphi_{ji}(y_i^j) \leqslant \xi_{ji} \leqslant \varphi_{ji}(y_i')$ и является вогнутой, непрерывной и возрастающей $(j = 1, \ldots, N)$.

Свойство К.2 иллюстрируется рис. 2.2. Заметим, что в силу предположения 1, е) для P_i обязательно должно быть $y_i^j = 0$ хотя бы при одном j.

Свойствами К.1, К.2 оправдывается само название элемента с комплектной характеристикой: потребление элементом всех продуктов однозначно определено величиной выпуска y_i; оно не зависит ни от цен, ни от дополнительных ограничений типа $\hat{y}_i$, $\hat{\xi}_{ij}$, $j \in I$ (свойство К.1); с ростом потребления одного продукта потребление всех остальных продуктов не падает и однозначно определяется величиной потребления первого продукта, т. е. продукты потребляются элементом «в комплекте».

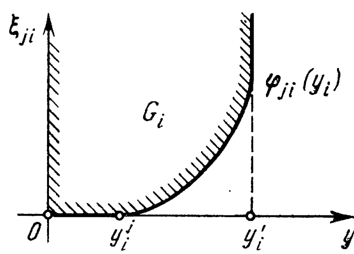


Рис. 2.2.

Ряд дополнительных свойств элементов с комплектной характеристикой рассматривается в гл. XI.

Ниже изучаются свойства задачи $\langle i; \cdot\rangle$ для нормального элемента P_i.

Свойство Н.1. Пусть P_i — нормальный элемент. Тогда:

а) $\overline{\Pi}_i = \Pi_i(\bar{y}_i)$ — значение экстремальной задачи $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$ — есть вогнутая, непрерывная, монотонно возрастающая функция от ограничения $\bar{y}_i$ при $\bar{y}_i \in [0, \hat{y}_{i\,\max}]$;

б) y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \hat{\xi}_{ji},\ I\rangle$ равна $\bar{y}_i$ для всех $\bar{y}_i \in [0, \hat{y}_{i\,\max}]$;

в) вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ — решение задачи $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \hat{\xi}_{ji},\ I\rangle$ — есть непрерывная вектор-функция от ограничений $\bar{y}_i$, $\hat{\xi}_{ji}$.

Заметим, что свойство Н.1 б) фактически указывает явную зависимость y_i-й компоненты решения $\langle y_i^*, x_i^*\rangle$ задачи $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$ от ограничения $\bar{y}_i$:

$$y_i^* = \begin{cases} \bar{y}_i & \text{при } \bar{y}_i < \hat{y}_{i\,\max}, \\ \hat{y}_{i\,\max} & \text{при } \bar{y}_i \geqslant \hat{y}_{i\,\max}. \end{cases}$$

Доказательству свойства Н.1 предпошлем лемму, которая будет использована также в гл. III при доказательстве теоремы 3.7.

Лемма 2.1. *Рассмотрим экстремальную задачу*

$$U(z) = \max, \tag{10}$$

$$z \in Z, \tag{11}$$

$$0 \leqq z \leqq x, \tag{12}$$

где z и x — n-мерные векторы, $Z \subseteq R^n$, а $U(z)$ — скалярная функция.

Пусть $U(z)$ — непрерывная вогнутая на R^n функция, Z — выпуклое компактное множество, причем $0 \in Z$; пусть также решение задачи (10), (11), (12) *единственно при каждом фиксированном x. Тогда $V(x)$ — значение задачи* (10), (11), (12) — *непрерывная вогнутая скалярная функция, а $z^*(x)$ — решение этой задачи — непрерывная вектор-функция от ограничения x.*

Доказательство леммы 2.1. Докажем сначала, что точечно-множественное отображение $\varphi(x)$ неотрицательного ортанта R^n_+ в себя, определенное соотношением

$$\varphi(x) = \{z\colon\ z \in Z,\ 0 \leqq z \leqq x\}, \tag{13}$$

является замкнутым полунепрерывным снизу [1]).

Замкнутость. Из соотношений $z^n \in \varphi(x^n)$, т. е. $z^n \in Z$ и $0 \leqq \leqq z^n \leqq x^n$, сразу же следует, что $0 \leqq z^0 = \lim\limits_{n\to\infty} z^n \leqq \lim\limits_{n\to\infty} x^n = x^0$, причем в силу замкнутости множества Z следует $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z^n \in Z$. Итак, $z^0 \in \varphi(x^0)$. Замкнутость $\varphi(z)$ показана.

Полунепрерывность снизу. Пусть $x^n \to x^0$ при $n \to \infty$ (x^0, $x^n \in \in R^n_+$), и пусть $z^0 \in \varphi(x^0)$. Покажем, что найдутся

$$z^n \in \varphi(x^n), \quad z^n \to z^0 \quad (n \to \infty). \tag{14}$$

Положим $I^+ = \{i\colon\ \zeta_i^0 > 0\}$ и рассмотрим последовательность

$$z^n = \lambda^n \cdot z^0, \tag{15}$$

где числа λ^n определены соотношениями

$$\lambda^n = \min\left\{\min_{i\in I^+}\left(\frac{\xi_i^n}{\zeta_i^0}\right),\ 1\right\}, \qquad n = 1, \ldots, \tag{16}$$

---

[1]) Точечно-множественное отображение $g\colon X \to 2^Z$ множества $X \subseteq R^n$ в множество $Z \subseteq R^m$ (переводящее точки $x \in X$ в множества $g(x) \subseteq Z$) называется *замкнутым*, если для любой последовательности точек x^n в X такой, что $x^n \to x^0$ $(x^0 \in X)$, $z^n \in g(x^n)$ и $z^n \to z^0$, имеет место $z^0 \in g(x^0)$ [29]. Отображение $g(x)$ называется *полунепрерывным снизу*, если из $x^n \to \to x^0$ (x^n, $x^0 \in X$) и $z^0 \in g(x^0)$ следует существование $z^n \in g(x^n)$ таких, что $z^n \to z^0$ [17].

так что

$$0 \leqslant \lambda^n \leqslant 1. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) следует, что $0 \leqq z^n \leqq x^n$ и $z^n \in Z$, как выпуклая комбинация точек $0 \in Z$ и $z^0 \in Z$, и, следовательно, $z^n \in \varphi(x^n)$.

Докажем, что предел последовательности $\{\lambda^n\}$ существует и равен 1. Отсюда в силу (15) будет следовать, что последовательность z^n сходится к z^0; тем самым полунепрерывность снизу будет доказана. Выберем (с учетом (17)) произвольную сходящуюся подпоследовательность $\{\lambda^{n_k}\}$; положим

$$\lim_{n \to \infty} \lambda^{n_k} = \bar{\lambda}. \tag{18}$$

В силу (17) $0 \leqslant \bar{\lambda} \leqslant 1$. Предположим, что $\bar{\lambda} < 1$, т. е. найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\bar{\lambda} < 1 - \delta. \tag{19}$$

Из (19) следует, что для некоторого номера N

$$\lambda^{n_k} = \min_{i \in I^+} \frac{\xi_i^n}{\zeta_i^0} < 1 - \delta, \qquad n_k \geqslant N. \tag{20}$$

Из (20) вытекает, что найдется такой индекс $l \in I^+$, что для некоторой подпоследовательности $\left\{\lambda^{n_{k_l}}\right\}$ последовательности $\{\lambda^{n_k}\}$ при всех n_{k_l}, бо́льших некоторого N_l, имеют место соотношения

$$\lambda^{n_{k_l}} = \frac{\xi_l^{n_{k_l}}}{\zeta_l^0}.$$

Тогда в силу (18) и (19)

$$\bar{\lambda} = \lim_{k_l \to \infty} \lambda^{n_{k_l}} = \frac{1}{\zeta_l^0} \lim_{k_l \to \infty} \xi^{n_{k_l}} = \frac{\xi_l^0}{\zeta_l^0} < 1 - \delta.$$

Из последнего неравенства вытекает неравенство $\xi_l^0 < (1 - \delta) \zeta_l^0 < \xi_l^0$, противоречащее тому, что $x^0 \geqq z^0$, поскольку $z^0 \leqq \varphi(x^0)$. Из этого противоречия следует, что $\bar{\lambda} = 1$, а потому все сходящиеся подпоследовательности последовательности $\{\lambda^n\}$ имеют один и тот же предел $\bar{\lambda} = 1$, и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda^n = \bar{\lambda} = 1$. Таким образом, отображение $\varphi(x)$ полунепрерывно снизу.

Из определения (13) и ограниченности множества Z вытекает, что отображение $\varphi(x)$ является ограниченным[1]). Из замк-

---

[1]) Отображение называется *ограниченным*, если оно переводит ограниченное множество в ограниченное.

нутости, полунепрерывности снизу и ограниченности отображения $\varphi(x)$, а также компактности множества $Z \supseteq \varphi(x) (x \in R^n_+)$, сразу же следует справедливость доказываемой леммы, если воспользоваться предложением 17.1 из [24], обеспечивающим непрерывность функции $V(z)$ и замкнутость точечно-множественного отображения $x \to Z^*$, где Z^* — множество решений задачи (10), (11), (12) при данном фиксированном $x \in R^n_+$ (в нашем случае множество Z^* — одноэлементное: $Z^* = \{z^*\}$).

Вогнутость функции $V(x)$ сразу же следует из вогнутости функции $U(z)$ и выпуклости множества $\varphi(x)$ (см. (13)) при каждом x. Поскольку множество Z ($\supseteq Z^*$) компактно, а решение задачи (10), (11), (12) единственно ($Z^* \equiv \{z^*\}$), то (точечное) замкнутое отображение $z^*(x)$ является (см., например, лемму 4.4 из [29]) непрерывным на R^n_+. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство свойства Н.1. Вогнутость и непрерывность функции $\Pi_i(\bar{y}_i)$ (см. утверждение а)) и справедливость утверждения в) непосредственно следуют из утверждения леммы 2.1 с учетом выполнения предположений 1 и 2. Докажем утверждение б) в свойстве Н.1, а затем утверждение а) полностью. Заметим, что y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \hat{y}_{i\,\max},\ \hat{\xi}_{ji},\ I\rangle$ равна $\hat{y}_{i\,\max}$, т. е. в данном случае эта компонента совпадает с ограничением. Поэтому рассмотрим случай $0 \leqslant \bar{y}_i < \hat{y}_{i\,\max}$. Предположим, что тогда y-я компонента решения (y_i^*, x_i^*) задачи $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \hat{\xi}_{ji},\ I\rangle$ не равна $\bar{y}_i$ при некотором $\bar{y}_i$, так что

$$y_i^* < \bar{y}_i < \hat{y}_{i\,\max}. \tag{21}$$

Из соотношения (21) следует, что

$$(y_i^*, x_i^*) \neq (\hat{y}_{i\,\max}, \hat{x}_{i\,\max}). \tag{22}$$

Поскольку вектор (y_i^*, x_i^*) допустим для задачи $\langle i;\ \hat{y}_{i\,\max},\ \hat{\xi}_{ji},\ I\rangle$, а вектор $(\hat{y}_{i\,\max}, \hat{x}_{i\,\max})$ — решение этой задачи, то в силу (22) и единственности решения задачи $\langle i;\ \cdot\rangle$ при заданных ограничениях (см. предположение 2)

$$\Pi_i(\bar{y}_i) < \Pi_i(\hat{y}_{i\,\max}). \tag{23}$$

Из определения вектора (y_i^*, x_i^*) следует, что этот вектор является решением также задачи $\langle i;\ y_i^*,\ \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$, т. е. (с учетом (23))

$$\Pi_i(y_i^*) = \Pi_i(\bar{y}_i) < \Pi_i(\hat{y}_{i\,\max}). \tag{24}$$

Однако соотношения (24) не могут иметь места для вогнутой функции $\Pi_i(\bar{y}_i)$ (вогнутость функции $\Pi_i(\bar{y}_i)$ доказана выше), если числа y_i^*, $\bar{y}_i$ и $\hat{y}_{i\,\max}$ удовлетворяют неравенствам (21). Утверждение б) доказано.

Докажем теперь, что функция $\Pi_i(\bar{y}_i)$ возрастает на отрезке $[0, \hat{y}_{i\,\max}]$. Пусть числа $\bar{y}_i^1$ и $\bar{y}_i^2$ удовлетворяют неравенству

$$0 \leqslant \bar{y}_i^1 < \bar{y}_i^2 \leqslant \hat{y}_{i\,\max}. \tag{25}$$

Тогда решение задачи $\langle i;\ \bar{y}_i^1, \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$ — обозначим его через $(\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1)$ — допустимо для задачи $\langle i;\ \bar{y}_i^2, \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$, решение которой обозначим через $(\bar{y}_i^2, \bar{x}_i^2)$. (В этих обозначениях решений задач $\langle i;\ \bar{y}_i, \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$ при $\bar{y}_i = \bar{y}_i^1$ и $\bar{y}_i = \bar{y}_i^2$ учтено утверждение б), доказанное выше.) В то же время, согласно соотношению (25), $(\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1) \neq (\bar{y}_i^2, \bar{x}_i^2)$, причем вектор $(\bar{y}_i^1, \bar{x}_j^1)$ допустим для задачи $\langle i;\ \bar{y}_i^2, \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$. В силу единственности решения последней задачи имеем $\Pi_i(\bar{y}_i^1) < \Pi_i(\bar{y}_i^2)$. Тем самым монотонность функции $\Pi_i(\bar{y}_i)$ и вместе с тем утверждение а) доказаны. Свойство Н.1 доказано.

Отметим, что если в задаче $\langle i;\ y_i, \hat{\xi}_{ji}, I\rangle$ положить $I = \varnothing$, то эта задача есть не что иное, как задача $\langle i;\ \bar{y}_i\rangle$. Поэтому из свойства Н.1 непосредственно вытекает справедливость следующего свойства нормального элемента.

Свойство Н.2. Пусть $\bar{y}_i$ — произвольное число из отрезка $[0, y_{i\,\max}]$. Тогда:

а) $\Pi_i = \Pi_i(\bar{y}_i)$ — значение экстремальной задачи $\langle i;\ \bar{y}_i\rangle$ — есть вогнутая, непрерывная, возрастающая функция ограничения $\bar{y}_i$;

б) y_i-я компонента решения $\langle i;\ \bar{y}_i\rangle$ равна $\bar{y}_i$.

Следующее свойство нормального элемента указывает на возможность рассматривать один и тот же вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ как решение разных задач типа $\langle i;\ \cdot\rangle$, различающихся ограничениями-квотами.

Свойство Н.3. Пусть нормальный элемент P_i находится в состоянии $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$, являющемся решением задачи $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$ или $\langle i;\ \bar{y}_i, \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$. Тогда вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ является также решением задачи $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji}, \Omega\rangle$.

Доказательство свойства Н.3. Тот факт, что решение задачи $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$ — вектор $(\bar{y}_i;\ \bar{\xi}_{1i}, \ldots, \bar{\xi}_{Ni})$ — является решением задачи $\langle i;\ \bar{y}_i, \bar{\xi}_{ji}, \Omega\rangle$, очевиден. Докажем теперь, что если вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ является решением задачи $\langle i;\ \bar{y}_i, \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$, $I \subseteq \Omega$, то этот же вектор есть решение задачи $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji}, \Omega\rangle$. Предположим противное, т. е. что для некоторого $i = i^*$ решением первой задачи является вектор $(\bar{y}_{i*}, \bar{x}_{i*})$, а решением второй — вектор $(\hat{y}_i^*, \hat{x}_i^*)$, причем

$$(\hat{y}_{i*}, \hat{x}_{i*}) \neq (\bar{y}_{i*}, \bar{x}_{i*}). \tag{26}$$

Поскольку вектор $(\bar{y}_{i*}, \bar{x}_{i*})$ допустим для задачи $\langle i; \bar{\xi}_{ji}, \Omega\rangle$, то согласно (26)

$$\gamma_i\hat{y}_{i*} - \sum_{j=1} \gamma_i\hat{\xi}_{ji*} > \gamma_i\bar{y}_{i*} - \sum_{j=1}^{N} \gamma_i\bar{\xi}_{ji*}. \tag{27}$$

Тогда имеем

$$\hat{y}_{i*} > \bar{y}_{i*}, \tag{28}$$

так как иначе вектор $(\hat{y}_{i*}, \hat{x}_{i*})$ был бы допустим для задачи $\langle i; \bar{y}_{i*}, \bar{\xi}_{ji*}, I\rangle$, а потому соотношение (27) было бы невозможно.

С другой стороны, неравенство (28) не может иметь места. Действительно, пусть соотношение (28) имеет место. Так как множество G_{i*} выпукло и включает начало координат, то вектор

$$\frac{\bar{y}_{i*}}{\hat{y}_{i*}}(\hat{y}_{i*}, \hat{x}_{i*}) \equiv \left(\bar{y}_i, \frac{\bar{y}_{i*}}{\hat{y}_{i*}}\hat{x}_{i*}\right)$$

допустим для задачи $\langle i; \bar{y}_{i*}, \bar{\xi}_{ji*}, I\rangle$; вместе с тем, учитывая, что для элемента P_{i*} выполнено предположение 1, е) и, следовательно, $\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\hat{\xi}_{ji*} > 0$, имеем

$$\gamma_{i*}\bar{y}_{i*} - \frac{\bar{y}_{i*}}{\hat{y}_{i*}}\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\hat{\xi}_{ji*} > \gamma_{j*}\bar{y}_{i*} - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j\bar{\xi}_{ji*}, \tag{29}$$

так как в силу ограничений задачи $\langle i^*; \xi_{ji*}, \Omega\rangle$

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_j\hat{\xi}_{ji*} < \sum_{j=1}^{N} \gamma_j\bar{\xi}_{ji*}.$$

Из неравенства (29) следует, что вектор $(\bar{y}_{i*}, \bar{x}_{i*})$ не может быть решением задачи $\langle i^*; \bar{y}_{i*}, \bar{\xi}_{ji*}, I\rangle$. Это противоречие и доказывает, что предположение (26) неверно. Свойство Н.3 доказано.

Замечание 2.2. Свойство Н.3 означает, что если объявить все продукты дефицитными и для произвольного элемента P_i, находившегося в экономически реализуемом состоянии $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, ввести квоты на потребление всех продуктов $j \in \Omega$, равные $\tilde{\xi}_{ji}$, а квоту на выпуск его продукта (если таковая была) снять, то состояние элемента P_i останется прежним. В частности, его реальные уровни потребления продуктов $j \in \Omega$ будут совпадать с квотами на них.

§ 2.3. Свойства системы нормальных производственных элементов

В этом параграфе рассматриваются такие свойства системы нормальных элементов, как существование нетривиальных согласованных состояний и общий вид множеств таких состояний.

В дальнейшем нам понадобится предположить относительно каждого производственного элемента P_i, что он будет технологически способен не только производить, но и выпускать вовне (т. е. сверх собственной потребности) положительное количество своей продукции:

$$\zeta_{i0} = y_i - \xi_{ii} > 0. \tag{30}$$

Мы, однако, потребуем выполнение более сильного предположения, обеспечивающего экономическую реализуемость положительного выпуска (30) элемента P_i. А именно, будем требовать, чтобы цены $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, обеспечивали выполнение следующего предположения.

Предположение 4. Для любого i-го продукта y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \cdot\rangle$ положительна, т. е.

$$y_{i\,\max} > 0. \tag{31}$$

Это предположение является очевидным усилением предположения 1, д). Легко видеть также, что предположение 4, т. е. (31), заведомо обеспечивает экономическую реализуемость состояния элемента P_i, удовлетворяющего условию (30).

Предположение 4 представляет собой характеристику не только технологических множеств G_i, но и цен[1]) c. Поскольку цены на один и тот же продукт одинаковы во всей производственной системе и, значит, одни и те же цены должны обеспечивать экономическую реализуемость положительного выпуска (30) каждого производителя P_i, $i = 1, \ldots, N$, предположение 4 имеет «общесистемный» характер.

Для дальнейшего удобно представить предположение 4 в эквивалентной форме, явным образом указывающей на «прибыльность» производства положительных количеств продукции для отдельных элементов.

Предположение 4′. (*Прибыльность производства.*) Для любого элемента P_i, $i = 1, \ldots, N$, существует состояние $(\bar{y}_i, \bar{x}_i) \in G_i$, дающее положительную прибыль:

$$\bar{\Pi}_i = \gamma_i \bar{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \bar{\xi}_{ji} > 0. \tag{32}$$

---

[1]) Это предположение используется далее всюду, где цены $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ задаются и фиксируются изначально, а не вводятся или изменяются по ходу рассмотрения, т. е. всюду, кроме теоремы 4.2 в § 4.2, теоремы 4.4 в § 4.3, а также всей гл. V.

Далее мы увидим, что «экономическое» предположение 4 (или 4′) совместно с «технологическими» предположениями 1, 2, 3 обеспечивает «технологическую возможность» одновременных положительных чистых выпусков всех продуктов, или *технологическую продуктивность* производственной системы.

Тем самым связь между понятиями продуктивности и прибыльности в системе линейных леонтьевских элементов [29] оказывается возможным частично распространить и на более общие «системы нормальных элементов».

Покажем, что предположения 4 и 4′ действительно эквивалентны. Сначала покажем, что из предположения 4 следует $\Pi_{i\,\max} = \gamma_i y_{i\,\max} - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji\,\max} > 0$. Действительно, в противном случае в силу единственности решения экстремальной задачи $\langle i;\ \cdot\rangle$ и технологической допустимости вектора $(0,\ 0)$, при котором $\Pi_i(0,\ 0) = 0$, мы имели бы $\Pi_{i\,\max} = 0$ и $y_{i\,\max} = 0$, что и противоречит (31). Пусть теперь выполнено условие (32) для некоторого $(\bar{y}_i,\ \bar{x}_i) \in G_i$. Тогда

$$\Pi_{i\,\max} \geqslant \bar{\Pi}_i = \gamma_i \bar{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_i \bar{\xi}_{ij} > 0,$$

а значит, $y_{i\,\max} > 0$.

Определение 2.5. Будем называть *системой нормальных элементов* систему, составленную из нормальных производственных элементов и удовлетворяющую предположению 4.

З а м е ч а н и е 2.3. Определение 2.5 относится к производственной системе, т. е. в ней внешний потребитель явно не фигурирует. Если же внешний потребитель фигурирует явно (например, когда речь идет о равновесиях, а не только о квазиравновесиях), то под системой нормальных элементов будем понимать замкнутую экономическую систему, состоящую из «нормальной» производственной системы и «нормального» внешнего потребителя (см. гл. III). В дальнейшем каждый раз из контекста будет ясно, о какой системе нормальных элементов (с потребителем или без) идет речь.

Теперь, используя эквивалентность предположений 4 и 4′, докажем следующую теорему о технологической продуктивности системы нормальных элементов.

Теорема 2.1. *В системе нормальных элементов существует технологически реализуемое состояние* $\{(\tilde{y}_i,\ \tilde{x}_i)\}$ *с положительным вектором чистых выпусков* $\tilde{x}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Введем, используя предположение 4, неотрицательную матрицу $A = (\alpha_{ji})$ следующим образом:

$$\alpha_{ji} = \xi_{ji\,\max}/y_{i\,\max}, \qquad i,\ j = 1,\ \ldots,\ N.$$

Линейная модель «затраты — выпуск» с такой матрицей технологических коэффициентов A прибыльна при ценах $c > 0$ [29], поскольку $\Pi_{i\,\max} > 0$ для каждого $i = 1, \ldots, N$ в силу предположения 4', а потому в силу теоремы 2.4 из [29] существуют такой вектор валовых выпусков $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N)$ и такой вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0 = (\tilde{\xi}_{10}, \ldots, \tilde{\xi}_{N0})$, что имеют место соотношения

$$\tilde{\xi}_{i0} = \tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}\tilde{y}_j, \qquad 0 < \tilde{y}_i \leqslant y_{i\,\max},$$

$$\tilde{\xi}_{i0} > 0, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Поскольку в силу предположения 1 векторы $(0, 0)$ и $(y_{i\,\max}, x_{i\,\max})$ принадлежат множеству G_i, то в силу выпуклости G_i вектор

$$(y_i, x_i) = (\tilde{y}_i, \alpha_{1i}\tilde{y}_i, \ldots, \alpha_{Ni}\tilde{y}_i) = (\tilde{y}_i/y_{i\,\max}) \cdot (y_{i\,\max}, x_{i\,\max})$$

также принадлежит этому же технологическому множеству, а потому процесс $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с положительным вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ технологически реализуем. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.4. В дальнейшем мы часто будем использовать следующее свойство системы нормальных элементов:

Если для произвольно заданного состояния квазиравновесия системы нормальных элементов объявить все продукты дефицитными, т. е. положить $I = \Omega$ и зафиксировать соответствующие квоты, то это состояние системы останется квазиравновесием.

Справедливость этого свойства вытекает из замечания 2.2. Аналогичное утверждение будет справедливо и для равновесий систем нормальных элементов при выполнении предположений о свойствах «нормального» потребителя из гл. III.

Замечание 2.5. Возвращаясь к замечанию 2.1 из § 2.2, сформулируем в виде отдельного предположения дополнительное условие «согласованности» состояния $\{(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)\}$ системы нормальных элементов. Это свойство связывает разбиение номенклатуры продуктов Ω на дефицитную I и недефицитную K, с одной стороны, и превышения условно-оптимальных уровней выпусков $\tilde{y}_{j\,\max}$ (в смысле определения 2.2) над $\tilde{y}_j$, с другой.

Предположение 5. Если $\{(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)\}$ — квазиравновесие системы нормальных элементов с дефицитной номенклатурой I и недефицитной $K = \Omega \backslash I$, то

$$\tilde{y}_k < \tilde{y}_{k\,\max} \quad \text{для всех} \quad k \in K.$$

Нетрудно убедиться, что для любого состояния системы нормальных элементов, удовлетворяющего определению квазиравновесия 1.10, всегда можно добиться выполнения вышеуказанного свойства путем перевода некоторых недефицитных продуктов в категорию дефицитных. В дальнейшем, говоря о квазиравновесиях системы нормальных элементов, мы всегда будем подразумевать выполнение предположения 5 в дополнение к условиям 1° и 2° из определения квазиравновесия 1.10.

Рассмотрим теперь вопрос об экономической реализуемости положительных векторов чистых выпусков, или об *экономической продуктивности* производственной системы. Как указывает нижеследующая теорема, для систем нормальных элементов всегда существуют квазиравновесия, в которых векторы чистых выпусков положительны. Это и означает, что такие системы экономически продуктивны.

Теорема 2.2. *Для каждой системы нормальных элементов существует такой положительный вектор* $\bar{x}_0=(\bar{\xi}_{10}, \ldots, \bar{\xi}_{N0})$, *что любой вектор* $\tilde{x}_0$, *удовлетворяющий условию*

$$0 \leqq \tilde{x}_0 \leqq \bar{x}_0, \tag{33}$$

может быть реализован как вектор чистых выпусков в некотором квазиравновесии системы.

Доказательство этой теоремы[1]) отложим до гл. VII (см. § 7.2).

Следствие теоремы 2.2. *Если для некоторого вектора* $\tilde{x}_0$, *удовлетворяющего условию* (33) *теоремы* 2.2, *имеет место равенство* $\tilde{x}_0=f(\tilde{x}_0, \Omega)$, *где* f — *функция потребительского выбора при ограничениях, то* $\tilde{x}_0$ *может быть реализован как вектор чистых выпусков в некотором равновесии замкнутой системы.*

Для получения этого следствия достаточно сослаться на замечание 2.4 о возможности оставить данное состояние системы квазиравновесием, объявив все продукты дефицитными.

Это следствие можно также рассматривать как достаточное условие существования нетривиального равновесия.

В заключение главы рассмотрим вопрос о «топологическом» характере состояний, реализуемых в системе нормальных элементов. Легко видеть, что как множество технологически реализуемых, так и множество экономически реализуемых состояний компактно. Первое, очевидно, есть прямое произведение $G_1 \times \times G_2 \times \ldots \times G_N$, а второе выделяется из него как подмножество наборов решений задач максимизации линейных функций Π_i на $\hat{G}_i$ (где $\hat{G}_i$ получается из G_i наложением дополнительных линейных ограничений), непрерывно зависящих от параметров (ограничений). Несколько сложнее устанавливается компактность множества всевозможных согласованных состояний.

Теорема 2.3. *В любой системе нормальных элементов множество ее состояний, которые могут быть реализованы как квазиравновесия, компактно.*

Доказательство теоремы 2.3. Обозначим множество состояний $\{(y_i, x_i)\}$, которые могут быть реализованы как квази-

---

[1]) В отличие от теоремы 2.1 о «технологической продуктивности», доказательство теоремы 2.2 требует привлечения менее элементарных математических средств — теоремы о неподвижной точке или какого-либо «эквивалента» такой теоремы (например, имеющей непосредственный содержательный смысл теоремы «о согласованных действиях в натуральной системе» [25]).

равновесия, через Z. Ограниченность множества Z сразу же следует из ограниченности технологических множеств G_i.

Докажем замкнутость множества Z. Рассмотрим сходящуюся последовательность состояний $z^l = \{(y_i^l, x_i^l)\}$ системы, каждое из которых является квазиравновесием с вектором чистых выпусков x_0^l и дефицитной номенклатурой I^l. В соответствии с замечанием 2.4 можно объявить все продукты дефицитными, т. е. положить $I^l = \Omega$ для всех $l = 1, 2, \ldots$ Тогда каждое квазиравновесие z^l может быть реализовано как совокупность решений (y_i^l, x_i^l) N экстремальных задач вида

$$\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max, \tag{34}$$

$$(y_i, x_i) \in G_i, \tag{35}$$

$$\xi_{ji} \leqslant \xi_{ji}^l, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{36}$$

удовлетворяющих условию

$$y_i^l - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l = \xi_{i0}^l \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{37}$$

Обозначим через $\bar{z}$ предел последовательности z^l, т. е.

$$\lim_{l\to\infty} (y_i^l, x_i^l) = (\bar{y}_i, \bar{x}_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Из условий (37) тогда немедленно следует

$$\bar{y}_i - \sum_{k=1}^{N} \bar{\xi}_{ik} = \bar{\xi}_{i0} \geqslant 0, \quad \bar{\xi}_{i0} = \lim_{l\to\infty} \xi_{i0}^l, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{38}$$

Обозначим через (y_i^*, x_i^*) решение задачи

$$\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max,$$

$$(y_i, x_i) \in G_i, \quad \xi_{ji} \leqslant \bar{\xi}_{ji}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{39}$$

Если теперь показать, что

$$\lim_{l\to\infty} (y_i^l, x_i^l) = (\bar{y}_i, \bar{x}_i) = (y_i^*, x_i^*), \quad j = 1, \ldots, N, \tag{40}$$

то с учетом равенств (38) это будет означать, что совокупность векторов $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ является квазиравновесием с вектором чистых выпусков $\bar{x}_0$ и дефицитной номенклатурой $I = \Omega$, а этим и будет доказана замкнутость множества Z. Согласно лемме 2.1 зависимость решения задачи (34), (35), (36) от ограничений является непрерывной $(N+1)$-мерной вектор-функцией

$$(\tilde{y}_i(\cdot), \tilde{\xi}_{1i}(\cdot), \ldots, \tilde{\xi}_{Ni}(\cdot)),$$

удовлетворяющей, в силу определения квазиравновесия, условию

$$\tilde{y}_i(x_i^l) = y_i^l, \tilde{\xi}_{ji}(x_i^l) = \xi_{ji}^l, j = 1, \ldots, N. \qquad (41)$$

Переходя в (41) к пределу при $l \to \infty$, получим по непрерывности,

$$y_i^* = \bar{y}_i, \quad \xi_{ji}^* = \bar{\xi}_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

что и дает соотношения (40). Теорема 2.3 доказана.

Следствие 1 теоремы 2.3. *В системе нормальных элементов, включающей потребителя с непрерывной функцией выбора $f(x_0, I)$, множество состояний, реализуемых как равновесия, компактно.*

Доказательство следствия 1. Рассмотрим множество $(N+1)N$-мерных векторов $((y_1, x_1), \ldots, (y_N, x_N))$, где $(y_i, x_i) \in G_i$, $i = 1, \ldots, N$, и

$$y_i - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik} = \xi_{i0}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где вектор $x_0 = (\xi_{10}, \ldots, \xi_{N0})$ удовлетворяет условию $x_0 = f(x_0, \Omega)$. (Здесь мы вновь пользуемся тем, что согласно замечанию 2.4 все продукты в квазиравновесии можно объявить дефицитными.) Это множество компактно в силу компактности множеств G_i, $i = 1, \ldots, N$, и непрерывности функции $f(x_0, \Omega)$ по x_0, а потому компактно его пересечение с компактным, в силу утверждения теоремы 2.3, множеством квазиравновесий. Это пересечение и есть множество равновесий системы нормальных элементов. Следствие 1 доказано.

Следствие 2 теоремы 2.3. *В системе нормальных элементов (включающей — если речь идет о равновесии — потребителя с непрерывной функцией выбора $f(x_0, I)$) множество векторов x_0, которые могут быть реализованы как векторы чистых выпусков в квазиравновесиях или равновесиях, компактно.*

Обозначим эти множества через X_0 и X_0^f соответственно.

Справедливость следствия 2 сразу же следует из теоремы 2.3 (или следствия 1), поскольку любой вектор чистых выпусков x_0 в квазиравновесии (или равновесии) может быть представлен в виде значения непрерывной функции от $(N+1)N$-мерного вектора состояний элементов системы, находящейся в квазиравновесии (или равновесии) $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, а непрерывный образ компакта есть компакт.

Глава III

МОДЕЛЬ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА В УСЛОВИЯХ ДЕФИЦИТА ПРОДУКТОВ

§ 3.1. Особенности поведения потребителя: реальный выбор и потенциальный спрос

В этой главе, в отличие от почти всей остальной книги, рассматривается не производственная, а исключительно потребительская сфера экономики. Обсуждение специфики потребительского выбора в условиях дефицита всех или части продуктов уже проводилось и во введении, и в гл. I. В § 1.3 мы привели общую форму описания потребительского поведения в терминах «функции выбора». Функция выбора определяет тот набор продуктов, который будет использован потребителем в данной экономической ситуации. Описание экономической ситуации включает, вообще говоря, и указание цен на продукты, и указание количеств имеющихся (т. е. произведенных для конечного потребления) продуктов, и указание дефицитной номенклатуры продуктов. Для определения понятия экономического равновесия (в условиях дефицита) нам было достаточно лишь такого самого общего представления о потребительском выборе.

Дальнейшее исследование неравновесной модели экономики требует более углубленного обсуждения свойств потребительского выбора. Мы могли бы просто постулировать эти свойства и использовать их далее в «готовом виде» в тех последующих разделах книги, где анализ производственной системы переходит в анализ замкнутой (производственно-потребительской) экономической системы путем «подсоединения» внешнего потребителя к производственной сфере. Поэтому читатель, интересующийся главным образом моделью производства в условиях дефицита, может так и поступить, ограничившись исходными определениями функций выбора и функций спроса и формулировками основных свойств «нормальных» функций выбора и функций спроса. В этом отношении содержание настоящей главы в значительной степени носит самодовлеющий характер и лишь частично предназначено для «обслуживания» основного сюжета книги. Однако мы, предприняв самостоятельное исследование модели потребительского поведения и включив его результаты в полном объеме в эту книгу, исходили из того, что проблема функционирования экономики в условиях дефицита и несбалансированности, т. е. в ситуации «экономического неравновесия» в классическом смысле этого термина, требует расширения сложившихся представлений о «рациональном поведении» потребителя и заслуживает отдельного рассмотрения.

Классический «рациональный потребитель», согласно общеупотребительным модельным представлениям, осуществляет выбор наиболее удовлетворительного, со своей точки зрения, набора (вектора количеств) продуктов в пределах тех ограничений, которые налагаются на него текущей экономической ситуацией. В модели «свободного рыночного поведения» потребителя эти ограничения сводятся к бюджетному: потребитель может приобрести («купить») любой набор продуктов (из полной номенклатуры всевозможных продуктов, фигурирующих в системе), стоимость которого не превосходит потребительского бюджета.

В имеющихся моделях «рационирования» при потребительском выборе (см., например, [43]) к бюджетному ограничению присоединяются натуральные ограничения на часть продуктов. Однако, как правило, величины этих ограничений остаются вспомогательными параметрами, а в роли варьируемых переменных по-прежнему рассматриваются цены и бюджеты. На такую постановку ориентирован и другой, «феноменологический» подход к описанию потребительского поведения, когда непосредственно задается «функция выбора» потребителя; такая функция каждому конкретному «бюджетно-допустимому» множеству наборов (т. е. векторов) продуктов ставит в соответствие набор продуктов, выбираемый потребителем.

Отличие подхода к моделированию потребительского поведения, развиваемого в этой главе, от вышеупомянутого заключается в первую очередь в том, что мы сочетаем два обстоятельства: 1) «феноменологичность» описания поведения потребителя, т. е. указание «наблюдаемых результатов» его поведения, и 2) выдвижение в центр внимания натуральных ограничений-квот на потребление дефицитных продуктов, а не бюджетных (или каких-либо иных) ограничений, основных для моделей свободного рыночного поведения. Именно эти квоты становятся варьируемыми параметрами ситуации и формально рассматриваются как независимые переменные-аргументы функции выбора; цены и бюджет, наоборот, фактически уходят из явного рассмотрения (оставаясь подразумеваемыми, но, как правило, фиксированными параметрами). Описание «рационального поведения» потребителя в таких терминах требует выдвижения независимых предположений, что и делается в § 3.2. В этом параграфе приводится исходное определение функции выбора в условиях полной дефицитности всех продуктов как функции, которая каждому предъявленному набору (вектору количеств) продуктов сопоставляет выбираемый потребителем набор продуктов. Помимо общего требования — непревышения заданных количеств продуктов — вводятся постулаты «нормальности» функции выбора, которые устанавливают логически естественную связь между результатами выбора в различных ситуациях (§§ 3.2, 3.3). С ориентацией на понятие функции выбора вводится дополнительное понятие — функции спроса (§ 3.4) и устанавливаются взаимосвязи между этими понятиями, распространяемые далее (в § 3.5) на случай произвольной частичной дефицитности продуктов.

«Расхождение» понятий потребительского выбора и потребительского спроса — это, как уже отмечалось во введении, одна из специфических особенностей неклассической ситуации потребления в условиях дефицита. Дело в том, что в идеальных условиях модели свободного рыночного поведения потребителя его выбор и его спрос — это одно и то же. Если известен выбор потребителя, т. е. набор продуктов, который потребитель предпочел всем остальным, доступным ему, то уже нет надобности дополнительно интересоваться, каков «спрос» этого потребителя на некоторый конкретный продукт, т. е. какое количество этого продукта потребитель хотел бы приобрести (при своих прежних «внутренних» — бюджетных и прочих — ограничениях). Потребитель приобрел именно то, что он хотел бы приобрести. Не такова ситуация при появлении феномена дефицитности хотя бы части продуктов. На таком «несвободном рынке», с недостаточным количеством ряда продуктов, реальный потребительский выбор уже может отличаться от «спроса» — от того «потенциального» выбора, который осуществил бы потребитель при снятии «внешних» ограничений-квот на выделяемое ему количество дефицитных продуктов.

Появление ограничения на некоторый продукт, ставший дефицитным, может приводить, вообще говоря, к искажению выбираемого количества не только этого, но и других — в том числе недефицитных продуктов [1]).

Ввиду этого само определение понятия «потребительский спрос» становится далеко не простым. Отождествление потребительского спроса с текущим реализуемым выбором привело бы к тому, что такой «спрос» мог бы иметь мало общего с тем ре-

[1]) Например, ограничение потребления кофе может повысить потребление чая, а также изменить (понизить или, наоборот, повысить) потребления сахара, сливок и т. д.

альным выбором, который осуществился бы при снятии или хотя бы смягчении ограничений (всех или части) на потребление дефицитных продуктов. С другой стороны, немногим лучше рассматривать в качестве «истинного спроса» выбор в условиях «свободного рынка» (без дефицита) — такой «спрос» в общем случае не может служить ориентиром при анализе последствий «малых изменений» экономической ситуации. Мы останавливаемся на промежуточном подходе к понятию спроса, определяя функцию спроса в данной ситуации (т. е. при данных количествах продуктов и при данной дефицитной номенклатуре) на каждый продукт в отдельности. Грубо говоря, мы определяем величину спроса на рассматриваемый продукт как такое количество продукта, которое потребитель желал бы включить в свой выбор, если бы ограничения на все прочие продукты были фиксированы на текущем уровне, а приобретению данного продукта ограничения не препятствовали бы. Такое определение «величины спроса на продукт» представляется достаточно адекватным содержательному представлению о том, какое количество данного продукта взял бы потребитель «при прочих равных условиях». Разумеется, знание величины спроса на каждый продукт в данной фиксированной ситуации само по себе не позволяет даже «качественно» предвидеть характер реального потребительского выбора при изменении или, например, снятии ограничений сразу на несколько дефицитных продуктов. Наличие неудовлетворенного спроса (т. е. спроса, превышающего наличное количество продукта) по нескольким дефицитным продуктам еще не означает, что при ослаблении ограничений-квот на их потребление все эти продукты действительно будут потребляться в бóльших количествах [1]). И наоборот, даже если установленная квота на потребление некоторого продукта не используется потребителем полностью, т. е. «текущий спрос» на этот продукт оказывается ниже предложения, то это еще не означает, что данного продукта действительно «хватает» и ограничение на него излишне. Может случиться, что при ослаблении или снятии ограничений на этот и одновременно на некоторые другие продукты, несмотря на наблюдавшееся ранее отсутствие неудовлетворенного спроса, потребление данного продукта возрастет [2]). Такая зависимость «текущего спроса» от той экономической си-

---

[1]) Так, например, переход двух видов продуктов из категории «дефицитных» в «недефицитные» может привести к увеличению реального потребления одного из них, но к уменьшению другого. (Примером могут служить такие «взаимозаменяемые» продукты, как, скажем, натуральные и синтетические ткани и т. п.)

[2]) Примером может служить потребительский выбор «взаимодополняющих» продуктов при разной степени их дефицитности. Так, кажущийся избыток предложения транзисторных радиоприемников может объясняться дефицитностью батареек и т. п.

туации, в которой этот спрос определяется,— от номенклатуры дефицитных продуктов и от величины ограничений на них — затрудняет применение понятия «спрос» в общем случае дефицитности продуктов.

Тем не менее, несмотря на ограниченность «прогностической силы» сведений о потребительском спросе в условиях дефицитности, использование функций спроса позволяет не только давать компактное описание текущего реального выбора (§ 3.4), но и делать определенные заключения о возможных последствиях «локальных» (малых) или даже «глобальных» (больших) изменений экономической ситуации. Характер этих заключений зависит от принимаемых предположений — о непрерывности, или «регулярности», или «нормальности» функций спроса и порождаемого выбора. Наиболее сильные результаты в этом направлении получаются для «оптимизационной» модели потребителя, описывающей потребительский выбор продуктовых наборов как результат максимизации целевой (критериальной) функции потребления на множестве допустимых наборов. Эта модель, послужившая прототипом для введения «нормальных» функций выбора в § 3.2, более подробно обсуждается в § 3.6 (она играет важную роль во второй части книги). В заключающем эту главу § 3.7 приводятся и обсуждаются свойства потребительски-согласованных наборов продуктов как основы для общего понятия экономического равновесия при наличии дефицитов, предварительно уже введенного в гл. I.

§ 3.2. Выбор в условиях полной дефицитности

Рассмотрим формальную схему выбора продуктов, осуществляемого потребителем; эта схема развивает предварительные представления об описании потребительского выбора из гл. I. Здесь для нас не имеет значения, откуда продукты берутся (в последующих главах это будет продукция, выпускаемая производственной системой). Пусть задан перечень (номенклатура) Ω всех N типов продуктов, фигурирующих в экономической системе: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$. Будем предполагать, что продукты могут быть предложены потребителю, вообще говоря, в ограниченных количествах. А именно, для продукта i считается заданной величина ξ_i — потребительская квота на этот продукт, в пределах которой, но не выше, потребителю разрешается взять любое количество данного продукта. Если такие квоты ξ_i установлены для всех продуктов $i \in \Omega$, будем говорить, что выбор производится в условиях полной дефицитности продуктов.

Пусть $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in R_+^N$ — N-мерный неотрицательный вектор, составленный из потребительских квот-ограничений на все продукты. Вектор x можно (хотя и не обязательно) интерпретировать как набор продуктов (в соответствующих количествах ξ_i, $i \in \Omega$), имеющийся в наличии или могущий быть представленным для потребления. Потребитель, исходя из заданного вектора ограничений x, выбирает некоторые количества (положительные или, быть может, нулевые) каждого из N продуктов $i \in \Omega$ в пределах данных ограничений. Обозначая выбранное потребителем количество продукта i через $f_i(x)$, представим весь набор продуктов, выбранный потребителем, в виде вектора

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)). \tag{1}$$

Подчеркнем, что, хотя на выбираемое количество $f_i(x)$ продукта i непосредственно наложено лишь одно ограничение $f_i(x) \leqslant \xi_i$ (помимо естественного требования неотрицательности $f_i(x) \geqslant 0$), потребитель при выборе этого количества в общем случае руководствуется также величинами ограничений-квот ξ_j на другие продукты $j \neq i$ (что и отражено в записи $f_i = f_i(x)$).

Определение 3.1. Будем называть *функцией потребительского выбора в условиях полной дефицитности* функцию $f(x)$, определенную на неотрицательном ортанте R_+^N и удовлетворяющую условию:

$$0 \leqq f(x) \leqq x \quad \text{при всех} \quad x \in R_+^N. \tag{2}$$

Относительно «поведения» функции потребительского выбора можно принимать те или иные предположения.

Предположение 1°. Функция потребительского выбора непрерывна и ограничена, т. е. существует константа $P > 0$ такая, что

$$f_i(x) < P, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Предположение 2°. Функция потребительского выбора удовлетворяет нижеследующему свойству «независимости выбора от отбрасывания ненужных альтернатив»[1]).

Свойство 1. *Если векторы* $x, y \in R_+^N$ *таковы, что*

$$f(x) \leqq y \leqq x, \tag{4}$$

то

$$f(y) = f(x). \tag{5}$$

Интерпретация предположений 1° и 2° достаточно естественна. Требование непрерывности функции $f(x)$ в предположении 1° означает, что малым изменениям предоставляемого потребителю набора продуктов (квот) должны соответствовать малые изменения выбираемого набора. Требование ограниченности $f(x)$ в предположении 1° нужно для того, чтобы дать возможность пе-

---

[1]) Это — известный в общей теории выбора постулат «рациональности» выбора (см., например, аксиому «независимости несвязанных альтернатив» в русском переводе [22]).

рехода к классическому случаю «бездефицитности» (для чего выбор должен оставаться определенным и при предельном переходе к «бесконечно большим» ограничениям [1])). Обосновать такую ограниченность потребительского выбора можно, например, ссылкой на ограниченность бюджета потребителя. Наконец, свойство «независимости выбора» в предположении 2° отражает логику рационального поведения потребителя в различных ситуациях выбора, получаемых одна из другой путем специфической деформации множества допустимых альтернатив выбора. Действительно, при заданном векторе ограничений-квот x потребитель может выбрать любой набор продуктов z из «прямоугольного» множества $\{z \in R^N : 0 \leqq z \leqq x\}$. Поэтому переход от заданного x к $y \leqq x$ означает для потребителя сужение множества имеющихся у него альтернатив. Однако, если при этом «старый» потребительский выбор $z = f(x)$ по-прежнему остается допустимым и в «новом» множестве альтернатив, что оговорено в предпосылке (4) свойства 1, т. е. если сужение допустимого множества произошло за счет отбрасывания «ненужных», «не понадобившихся» альтернатив, то естественно ожидать, что выбор в новом, суженном множестве останется прежним. Это требование и заключено в свойстве 1 — см. (5).

Указанное требование отражает в неявной, косвенной форме один из аспектов представления о том, что выбранный набор продуктов с точки зрения потребителя «превосходит» все прочие, отвергнутые альтернативные наборы. Конкретно, свойство «независимости выбора от отбрасывания ненужных альтернатив» является необходимым (хотя в общем случае и не достаточным) условием представимости потребительского выбора оптимизационной моделью. Как уже говорилось в гл. I, в классической оптимизационной модели потребительского выбора предполагается [2]), что потребитель выбирает набор продуктов, максимизирующий его критериальную функцию («функцию полезности») $U(x)$ на заданном допустимом множестве $G_0 \subseteq R^N_+$ (например, на бюджетном множестве $B(c, b)$). При обобщении этой модели на случай дефицитности [3]) дополнительно вводятся ограничения-квоты на потребление дефицитных продуктов, сужающие допустимое для потребителя множество продуктовых наборов.

Более подробное рассмотрение этой модели мы отложим до § 3.6, а сейчас ограничимся лишь общей формулировкой оптимизационной модели потребительского выбора в условиях полной дефицитности. В такой модели функция выбора $f(x)$ получа-

---

[1]) Подробнее об этом будет сказано далее в § 3.3.

[2]) См. задачу (7) в § 1.2.

[3]) См. задачу (20) в § 1.3.

ется как зависящее от параметра x решение задачи

$$U(z)=\max,$$
$$z\in G_0, \quad z\leqq x, \tag{6}$$

где предполагается, что при каждом $x\in R_+^N$ решение $z^*=f(x)$ задачи (6) существует и единственно. Легко убедиться, что для так определенной функции «оптимизационного» потребительского выбора $f(x)$ свойство 1 всегда выполняется. Действительно, если $z^*=f(x)$ и если y удовлетворяет условию (4), то z^* остается допустимым вектором в задаче (6) при замене x на y, а поскольку при такой замене допустимое множество в (6) лишь сузилось, то z^* заведомо остается оптимальным в (6). С учетом предполагаемой единственности решения это и означает, что $f(y)=z^*$, т. е. выполнено равенство (5).

Определение 3.2. Функцию потребительского выбора (в условиях полной дефицитности) $f(x)$ будем называть *нормальной*, если она удовлетворяет предположениям 1° и 2°.

Приступим теперь к дальнейшему исследованию роли и смысла предположений 1° и 2° как характеристик нормальных функций потребительского выбора. Обратимся к центральному предположению 2° и изучим возможности перехода к иным равносильным формулировкам.

Прежде всего заметим, что свойство 1, сформулированное в терминах «сужения» допустимого множества альтернатив выбора, можно непосредственно переформулировать в терминах «расширения» такого множества.

Свойство 1′. *Если векторы $x, y\in R_+^N$ таковы, что*

$$y\geqq x, \tag{7}$$

то

$$f(y)=f(x) \text{ либо } f(y) \text{ не } \leqq x. \tag{8}$$

Для того, чтобы убедиться в том, что свойство 1′ действительно является эквивалентной формулировкой свойства 1, достаточно заметить, что исключение второй возможности $f(y)$ не $\leqq x$ из утверждения (8) путем включения ее отрицания: $f(y)\leqq x$ в условие (7) как раз и дает, с точностью до переобозначения x на y и наоборот, исходную формулировку свойства 1.

Таким образом, в формулировке предположения 2° можно подменить свойство 1 свойством 1′. Однако наряду с возможностью такой тривиальной подмены оказывается возможным в определении нормальности функций выбора изменить предположение 2° и менее тривиальным образом. А именно, при определенных дополнительных условиях в формулировке свойства 1′ оказывается возможным полностью исключить случай $f(y)$ не $\leqq x$, предусмотренный в (8); при этом, однако, существенно используется также предположение 1°, а точнее, непрерывность функции $f(x)$.

Прежде чем сформулировать новое свойство, перепишем для большей наглядности свойство 1.

Свойство 1 в покомпонентной форме. *Пусть* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *и* $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ — *неотрицательные векторы такие, что*

$$\begin{gathered} \eta_i = \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon f_i(x) = \xi_i, \\ f_i(x) \leqslant \eta_i \leqslant \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon f_i(x) < \xi_i. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда

$$f_i(y) = f_i(x), \qquad i \in \Omega. \tag{10}$$

Выпишем теперь в аналогичной манере новое, самостоятельное требование к функции потребительского выбора.

Свойство 2. *Пусть* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *и* $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ — *неотрицательные векторы такие, что*

$$\begin{gathered} \eta_i = \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon f_i(x) = \xi_i, \\ \eta_i \geqslant \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon f_i(x) < \xi_i. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда

$$f_i(y) = f_i(x), \quad i \in \Omega. \tag{12}$$

Свойство 2 как раз и представляет собой покомпонентную формулировку модификации свойства 1′, устраняющей вторую возможность из (8), о которой говорилось ранее. Подчеркнем, что условие (11) в формулировке свойства 2 предусматривает, что строгое увеличение i-й компоненты вектора ограничений-квот при переходе от x к y: $\eta_i > \xi_i$ могло произойти только для такого продукта i, квота на который в исходной ситуации x не была исчерпана: $f_i(x) < \xi_i$. Свойство 2 утверждает, что при таком специальном способе расширения множества допустимых наборов продуктов — при «ослаблении» только тех ограничений-квот, которые и до того не были «напряжены» — выбор должен оставаться неизменным.

С содержательной точки зрения свойство 2 может представляться столь же естественным требованием к «рациональности» потребительского поведения в ситуациях выбора продуктов, как и свойство 1. Однако это не совсем так: свойство 2 может нарушаться, даже когда свойство 1 выполняется — как, впрочем, и наоборот, — так что свойства 1 и 2 на самом деле являются в общем случае независимыми. Для того чтобы понять возможные источники расхождений между этими требованиями к выбору, а также лучше уяснить природу каждого из них, рассмотрим простейшие примеры потребительского выбора при наличии всего лишь одного типа продукта ($N = 1$). Сохраним при этом обозначение x (и y) за величиной ограничения-квоты на этот единственный продукт и обозначение $f(x)$ (и $f(y)$) — за функцией выбора (выбираемым количеством продукта).

Для такой однопродуктовой модели потребительского выбора свойство 1 приобретает следующий вид[1]:

$$\text{Если} \quad f(x) \leqslant y < x, \text{ то } f(y) = f(x). \tag{13}$$

Содержательный смысл требования (13) очевиден: если предоставленная потребителю квота на продукт не реализуется полностью, т. е. выбираемое потребителем количество продукта $z = f(x)$ ниже установленного ограничения x, то любое снижение этого ограничения-квоты вплоть до реально выбираемого количества продукта z не должно изменить этого выбора. Это требование к «рациональности» потребительского выбора представляется довольно естественным; в то же время следует отметить, что оно отвергает некоторые формы потребительского поведения, которым нельзя отказать в определенной осмысленности. Приведем пример, к которому мы еще будем обращаться далее. Допустим, что при некотором уровне квоты $x \gg 1$ потребитель берет продукт в количестве $z = f(x) = 0{,}5$ — много меньшем квоты, так что наличие ограничения для него «практически неощутимо». Допустим теперь, что квота снижена до уровня, сравнимого с предыдущим потребительским выбором — скажем, до $y = 1$. Тогда можно представить себе резоны для такого нового решения потребителя, когда он сочтет нужным «выкупить» всю предоставляемую ему «жесткую» квоту, т. е. приобрести продукт в максимальном разрешенном теперь количестве[2]: $f(y) = y = 1$. Подчеркнем, однако, что логика такого выбора, не удовлетворяющего свойству 1, тем самым заведомо не может быть описана «оптимизационной» моделью потребителя (в которой критериальная функция есть функция только от потребляемого набора продуктов: $U = U(x)$).

Вернемся к ситуации снижения ограничения-квоты x, представленной в (13). Что произойдет, если теперь, наоборот, повышать ограничение-квоту x? Нетрудно заключить из свойства 1, что никакие «малые» изменения выбора $f(x)$ при этом невозможны — точнее, при $y > x$ невозможен новый выбор $f(y)$, отличный от $f(x)$, но такой, что $f(y) \leqslant x$ (см. свойство 1′). Однако свойство 1 само по себе не исключает возможности «скачка» потребительского выбора от величины $f(x) < x$ до некоторой величины $f(y) > x$. Реалистичность такого эффекта подтверждается следующим примером. Предположим, что потребитель нуждается в некотором строго определенном количестве продукта — для конкретности, $z = 1$. Любое меньшее количество $z < 1$ для него не представляет интереса, и любое z из $0 < z < 1$ для него даже хуже, чем $z = 0$ (за бесполезный продукт все же приходится

[1]) В своей нетривиальной части, т. е. без упоминания случая, когда $f(y) = f(x)$ уже потому только, что $y = x$.

[2]) Можно объяснить это, например, психологической реакцией потребителя на объявление типа «больше килограмма в одни руки не дают».

платить). В свою очередь, с ростом z выше $z=1$ потребительская оценка продукта падает (любое количество $z>1$ в чисто потребительском отношении равноценно единичному, а лишнее количество сверх 1 приходится оплачивать дополнительно)[1]. Простейшим условным примером критериальной функции такого рода может служить

$$U(z)=\begin{cases} -z, & 0\leqslant z<1, \\ 2-z, & z\geqslant 1, \end{cases} \tag{14}$$

достигающая своего максимума при $z=1$.

Функция выбора, получаемая из однопродуктовой оптимизационной модели потребителя с критериальной функцией (14), имеет вид, изображенный на рис. 3.1; она претерпевает разрыв[2]) при $x=1$. Эта функция выбора, очевидно, удовлетворяет свойству 1 (как это и должно быть для оптимизационного выбора). Однако «скачок» выбора при увеличении ограничения-квоты от начального значения $x<1$, происходящий в момент перехода через значение $y=1$ ($f(x)=0$, $f(y)=1$), означает реализацию второй из возможностей, предусмотренных свойством 1′ в (8): $f(y)>x$, но $f(y)\neq f(x)$. А это означает нарушение свойства 2.

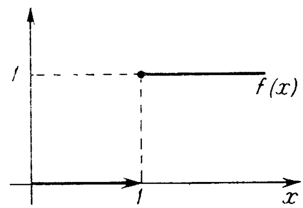


Рис. 3.1.

Свойство 2 для однопродуктовой модели потребительского выбора переходит в следующее требование:

$$\text{Если}\quad f(x)<x<y,\quad \text{то}\quad f(y)=f(x). \tag{15}$$

Как показал предыдущий пример, свойство 2 не вытекает из свойства 1 (и даже не гарантируется оптимизационной моделью потребительского выбора). Остается вопрос: не вытекает ли свойство 1 из свойства 2? Ответ на этот вопрос в общем случае — тоже отрицательный, что обнаруживается на следующем примере. Предположим, что потребитель берет количество продукта $z=0{,}5$ при всех достаточно больших квотах x — а именно, при $x>1$. При всех меньших квотах — при $x\leqslant 1$ — потребитель «выкупает» квоту полностью[3]): $z=x$. Так определяемая функция

---

[1]) Такая ситуация характерна для продукта, потребляемого «порциями». Например, покупатель костюмной ткани обычно стремится приобрести ровно такое ее количество, которое нужно для одного костюма.

[2]) В случае с костюмной тканью — потребитель покупает ткань на один костюм, если его квота это позволяет, и не покупает ткани вообще, если квота ниже.

[3]) Это — утрированная модель потребителя, реагирующего на ситуацию типа «больше килограмма в одни руки не дают» по принципу, описанному ранее.

выбора изображена на рис. 3.2. Нетрудно проверить непосредственно, что требование (15) здесь выполнено: действительно, $f(x) < x < y$ возможно только при $x > 1$, а при этом $f(x) = 0,5 = f(y)$. В то же время требование (13) нарушается при $x > 1$ и $y = 1$: в этом случае $f(x) = 0,5 < y < x$, но $f(y) = 1 \neq f(x)$.

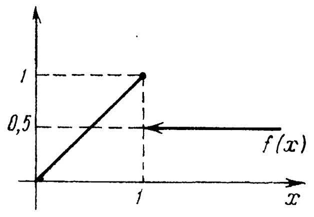


Рис. 3.2.

Таким образом, построенные примеры функции потребительского выбора показывают, что каждое из двух свойств 1 и 2 порознь может выполняться, в то время как другое нарушается, и, следовательно, ни одно из этих свойств не вытекает из другого. То обстоятельство, что в приведенных примерах функции выбора разрывны, не случайно. Дело в том, что для непрерывных функций потребительского выбора свойства 1 и 2 становятся эквивалентными. Это утверждение обосновывается следующими двумя леммами.

Лемма 3.1. *Если функция потребительского выбора $f(x)$ обладает свойством 1 и непрерывна, то она обладает свойством 2.*

Доказательство. Пусть x и y — векторы из формулировки свойства 2, удовлетворяющие условиям (11). Допустим, что (12) не выполнено: $f(y) \neq f(x)$. Положим $z(t) = x + t(y - x)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, так что $z(0) = x$, $z(1) = y$; пусть $z(t) = (\zeta_1(t), \ldots, \zeta_N(t))$. Возьмем

$$\tau = \sup \{t | f(z(\theta)) = f(x) \text{ для всех } \theta\colon 0 \leqslant \theta \leqslant t\}. \quad (16)$$

Из (16) в силу непрерывности $f(z(t))$ получаем $f(z(\tau)) = f(x)$, а поскольку согласно принятому допущению $f(z(1)) \neq f(x)$, то должно быть $\tau < 1$. Отсюда с учетом непрерывности $f(z(t))$ можем подобрать τ', $\tau < \tau' \leqslant 1$, столь близкое к τ, чтобы для каждого i такого, что $f_i(x) < \xi_i$, имело место $f_i(z(\tau')) \leqslant \xi_i$; с учетом (11) для всех таких i получим

$$f_i(z(\tau')) \leqslant \xi_i \leqslant \zeta_i(\tau'). \quad (17)$$

С другой стороны, для каждого i такого, что $f_i(x) = \xi_i$, в силу (11) должно быть $\eta_i = \xi_i$ и, значит, $\zeta_i(\tau') = \xi_i$, а по определению функции выбора $f_i(z(\tau')) \leqslant \zeta_i(\tau')$; следовательно, и для всех таких i также справедливо (17). В результате получаем

$$f(z(\tau')) \leqq x \leqq z(\tau'). \quad (18)$$

Применяя свойство 1 к векторам $z(\tau')$ и x (в качестве x и y, соответственно, в формулировке свойства 1), заключаем, что должно быть $f(x) = f(z(\tau'))$. Но это противоречит подбору τ': $\tau < \tau' \leqslant 1$ с учетом определения (16) для τ. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Если функция потребительского выбора $f(x)$ обладает свойством 2 и непрерывна, то она обладает свойством 1.*

Доказательство. Пусть x и y — векторы из формулировки свойства 1 в покомпонентной форме, удовлетворяющие условиям (9). Допустим, что (10) не выполнено: $f(y) \neq f(x)$. Как и в доказательстве леммы 3.1, положим $z(t) = x + t(y - x)$ и повторим дословно последующие рассуждения, включая определение (16) числа τ и заключение о том, что $f(z(\tau)) = f(x)$ и $\tau < 1$. Затем подберем, исходя из непрерывности $f(z(t))$, число τ', $\tau < \tau' \leqslant 1$, столь близкое к τ, чтобы для каждого i такого, что $f_i(x) < \xi_i$, имело место $f_i(z(\tau')) < \zeta_i$; с учетом (11) для всех таких i получим $\zeta_i(\tau') \leqslant \xi_i$. Для всех остальных i в силу (11) $\zeta_i(\tau') = \xi_i$. Таким образом, $z(\tau') \leqq x$, причем если $\zeta_i(\tau') < \xi_i$ то для такого i должно быть $f_i(z(\tau')) < \zeta_i(\tau')$. Это означает, что выполнено условие (11) из свойства 2 для векторов $z(\tau')$ и x, рассматриваемых в роли x и y в (11) соответственно. Поэтому по свойству 2 должно быть $f(z(\tau')) = f(x)$, что, как и в лемме 3.1, противоречит подбору числа τ: $\tau < \tau' \leqslant 1$. Лемма 3.2 доказана.

Таким образом, свойства 1 и 2 для произвольных функций потребительского выбора $f(x)$ являются независимыми, а для непрерывных $f(x)$ оказываются эквивалентными. Введем теперь еще одно «синтетическое» свойство функций выбора.

Свойство 3. *Пусть $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ — неотрицательные векторы такие, что*

$$\begin{aligned} \eta_i &= \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon f_i(x) = \xi_i, \\ \eta_i &\geqslant f_i(x) \quad \text{для} \quad i\colon f_i(x) < \xi_i. \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда

$$f_i(y) = f_i(x), \qquad i \in \Omega.$$

Условие (19) в формулировке свойства 3 разрешает изменять, как и в свойствах 1 и 2, только те i-е компоненты исходного вектора ограничений-квот x, для которых $f_i(x) < \xi_i$, т. е. квоты «недоиспользованы». Такие изменения компонент при переходе к новому вектору y возможны как в сторону увеличения (как в свойстве 2), так и в сторону уменьшения вплоть до уровня $f_i(x)$ (как в свойстве 1). Свойство 3 утверждает неизменность выбора при всевозможных таких изменениях.

Лемма 3.3. *Свойство 3 функций потребительского выбора эквивалентно конъюнкции свойств 1 и 2.*

Доказательство. Очевидно, что каждое из двух свойств 1 и 2 вытекает из свойства 3 как частный случай. Пусть теперь, обратно, выполнены оба свойства 1 и 2. Возьмем векторы $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ из формулировки свойства

3 и построим вектор $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ с компонентами

$$\zeta_i = \max\{\xi_i, \eta_i\}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Легко видеть, что вектор x и вектор z в роли вектора y удовлетворяют условию (11) в формулировке свойства 2 и поэтому согласно этому свойству $f(z) = f(x)$. Отсюда с учетом (19) имеем

$$f(z) \leqq y \leqq z,$$

что по свойству 1 дает $f(y) = f(z)$. Таким образом, получено $f(y) = f(x)$, что и означает выполнение свойства 3. Лемма 3.3 доказана.

Отметим, что в лемме 3.3 непрерывность функций потребительского выбора не предполагается. Поскольку в общем случае, как было показано ранее, свойства 1 и 2 независимы, то в силу леммы 3.3 свойство 3 является более сильным, чем каждое из свойств 1 и 2 по отдельности. Если же ограничиться рассмотрением непрерывных функций выбора, то из сочетания лемм 3.1, 3.2 и 3.3 немедленно обнаруживается эквивалентность всех этих трех свойств:

Теорема 3.1. *На классе непрерывных функций потребительского выбора свойства* 1, 2 *и* 3 *эквивалентны.*

Установленная таким образом теорема 3.1 позволяет вернуться к вопросу об аксиоматике нормальных функций выбора в полном объеме. Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает возможность видоизменять предположение 2°, при сохранении предположения 1°, в определении 3.2 нормальных функций потребительского выбора. А именно, в предположении 2° можно заменять свойство 1 на свойство 2 или на свойство 3, получая несколько иные, но эквивалентные формулировки свойства нормальности в целом. Это замечание позволяет проверять и использовать факт нормальности функций потребительского выбора, оперируя различными, каждый раз наиболее удобными формулировками.

§ 3.3. Дополнительные свойства функций выбора

Рассмотрим теперь нормальные функции потребительского выбора в условиях полной дефицитности, непосредственно изучая зависимость скалярных компонент функций выбора $f_i(x) = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N)$ от своих аргументов. Здесь, в частности, представляет интерес явная зависимость величины f_i — выбираемого количества продукта i — от «своей» переменной ξ_i, т. е. от ограничения сверху, налагаемого на это количество. Интересны также возможные типы зависимости f_i от «чужих» переменных ограничений ξ_j, $j \neq i$. Заметим сразу, что введенные в предыдущем параграфе свойства 1, 2, 3 функций выбора, общие формулировки которых дают своеобразные косвенные характеристики возможного поведения функций потребительского выбора, и в то же время позволяют немедленно указать некоторые очевидные частные следствия, относящиеся к зависимостям f_i от ξ_i и ξ_j, $j \neq i$. В самом деле, если $f_i(x) < \xi_i$ для данного x и данного i, то из свойства 1 следует, что величина f_i не изменится при уменьшении ξ_i вплоть до уровня $f_i(x)$, если остальные значения ξ_j, $j \neq i$, держать фиксированными. Аналогично, из свойства 2 следует, что в такой ситуации f_i не изменится, если ξ_i произвольно увеличивать при фиксированных ξ_j, $j \neq i$. Наконец, можно заметить, что в обоих этих случаях не будет изменяться также ни одна из величин f_j, $j \neq i$, что частично характеризует «перекрестные» зависимости между f_k и ξ_l.

Переходя к более систематическому анализу зависимостей, свойственных фукциям выбора, введем некоторые определения. Начнем с определения, относящегося к зависимости скалярной функции $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ от «своей» переменной ξ_i.

Определение 3.3. Функцию потребительского выбора $f(x)$ будем называть *субрегулярной*, если каждая ее скалярная компонента $f_i(x)$, рассматриваемая как функция от ξ_i, при произвольных фиксированных ξ_j, $j \neq i$, имеет вид

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) = \begin{cases} \xi_i & \text{при } 0 \leqslant \xi_i < \bar{\xi}_i, \\ \bar{\xi}_i & \text{при } \xi_i \geqslant \bar{\xi}_i, \end{cases} \tag{20}$$

где $\bar{\xi}_i$ — некоторая величина из $[0, \infty]$, вообще говоря, зависящая от ξ_j, $j \neq i$ (здесь случай $\bar{\xi}_i = \infty$ понимается как отсутствие второй строчки в (20)). Если здесь величина $\bar{\xi}_i$ конечна для каждого $x \geqq 0$ и каждого $i \in \Omega$, то будем называть функцию $f(x)$ *регулярной*.

Для регулярной функции выбора $f(x)$ зависимость величины $\bar{\xi}_i$ в определении 3.3 от аргументов ξ_j, $j \neq i$, будем символизировать записью

$$\bar{\xi}_i = \bar{f}_i(x) \equiv \bar{f}_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N). \tag{21}$$

Вид зависимости компоненты $f_i(x)$ регулярной функции выбора от «своей» переменной ξ_i представлен на рис. 3.3, *а*.

Теорема 3.2. *Если функция потребительского выбора $f(x)$ удовлетворяет свойству 3, то она субрегулярна. Если, сверх того, $f(x)$ ограничена, то она регулярна.*

Доказательство. Возьмем $i \in \Omega$, зафиксируем произвольные неотрицательные ξ_j, $j \neq i$, и положим

$$\bar{\xi}_i = \sup\{\chi\colon f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) = \xi_i \text{ при всех } \xi_i\colon 0 \leqslant \xi_i \leqslant \chi\}. \tag{22}$$

(Поскольку при $\xi_i = 0$ условие-равенство в (22) удовлетворяется, то определение (22) корректно.) Если $\bar{\xi}_i = \infty$, соотношение (20) выполняется по построению. Пусть теперь $\bar{\xi}_i < \infty$. Докажем сначала, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \bar{\xi}_i, \ldots, \xi_N) = \bar{\xi}_i. \tag{23}$$

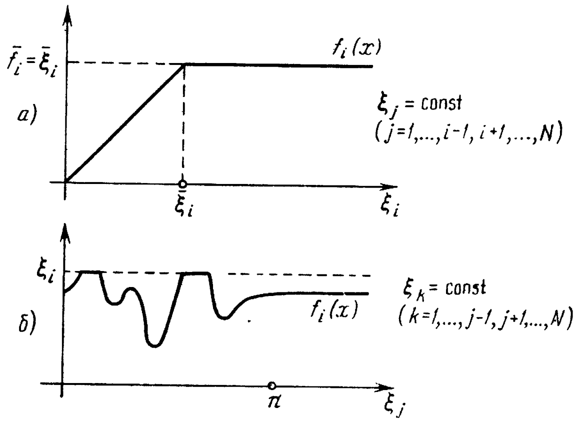


Рис. 3.3.

Допустим противное: $f_i(\xi_1, \ldots, \bar{\xi}_i, \ldots, \xi_N) < \bar{\xi}_i$ и возьмем произвольное ξ_i' такое, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \bar{\xi}_i, \ldots, \xi_N) < \xi_i' < \bar{\xi}_i. \tag{24}$$

Тогда согласно свойству 3 (а конкретнее, согласно входящему в него свойству 1)

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i', \ldots, \xi_N) = f_i(\xi_1, \ldots, \bar{\xi}_i, \ldots, \xi_N), \tag{25}$$

и, значит, $f_i(\xi_1, \ldots \xi_i', \ldots, \xi_N) < \xi_i'$, что при $\xi_i' < \bar{\xi}_i$ противоречит определению (22) числа $\bar{\xi}_i$.

Остается доказать, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) = \bar{\xi}_i \text{ при любом } \xi_i > \bar{\xi}_i. \tag{26}$$

Зафиксируем произвольное $\xi_i > \bar{\xi}_i$. В соответствии с определением (22), для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\xi_i(\varepsilon)$ такое, что

$$\xi_i(\varepsilon) \leqslant \bar{\xi}_i + \varepsilon \tag{27}$$

и

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i(\varepsilon), \ldots, \xi_N) < \xi_i(\varepsilon). \tag{28}$$

Возьмем ε настолько малым, что

$$\xi_i(\varepsilon) < \xi_i. \tag{29}$$

Из условий (28) и (29) по свойству 3 (а конкретнее, по входящему в него свойству 2) находим, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i(\varepsilon), \ldots, \xi_N). \qquad (30)$$

Сопоставляя (30) с (27), (28) и учитывая произвольную малость ε, заключаем, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) \leqslant \bar{\xi}_i. \qquad (31)$$

Поскольку

$$\bar{\xi}_i < \xi_i, \qquad (32)$$

то, применяя к ситуации (31), (32) свойство 3 (а конкретнее, вновь свойство 1), получаем

$$f_i(\xi_1, \ldots, \bar{\xi}_i, \ldots, \xi_N) = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N). \qquad (33)$$

Отсюда с учетом равенства (23), а также произвольности рассматриваемого $\xi_i > \bar{\xi}_i$ получаем требуемое соотношение (26).

Таким образом, функция выбора $f(x)$ субрегулярна. Остается заметить, что для ограниченной функции f случай $\bar{\xi}_i = \infty$ невозможен и, значит, f регулярна. Теорема 3.2 полностью доказана.

Следствие. *Нормальные функции потребительского выбора регулярны.*

Зависимость компонент $f_i(x)$ от «чужих» переменных ξ_j, $j \neq i$, даже у нормальных функций выбора может быть существенно более сложной. Введем еще одно определение.

Определение 3.4. Функцию потребительского выбора $f(x)$ будем называть *финитарной*, если можно указать число $\pi \geqslant 0$ такое, что для каждого $j \in \Omega$

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \tilde{f}^{(j)}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N) \qquad (34)$$

$$\text{при любых } \xi_j \geqslant \pi,$$

где $\tilde{f}^{(j)}$ — функция от $N-1$ переменной ξ_i, $i \neq j$, не зависящая от ξ_j. Число π будем называть *показателем финитарности* функции f.

Определение 3.4 требует по существу, чтобы значение функции выбора переставало зависеть от любого аргумента ξ_j, как только этот аргумент становится «достаточно большим». Возможный вид i-й скалярной компоненты финитарной функции выбора $f_i(x)$ как функции от ξ_j, $j \neq i$, при фиксированных ξ_k, $k \neq j$, изображен на рис. 3.3, *б*.

Непосредственно из определения финитарности вытекает следующее

Свойство редукции финитарных функций выбора. *Если $f(x)$ — финитарная функция выбора с показателем π, то для любых M индексов из Ω — без ограничения общности, M первых индексов*

$j=1, \ldots, M$ — *эта функция представима в виде*

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \tilde{f}^{(1,\ldots,M)}(\xi_{M+1}, \ldots, \xi_N)$$
$$\text{при любых } \xi_1, \ldots, \xi_M \geqslant \pi, \qquad (35)$$

где $\tilde{f}^{(1,\ldots,M)}$ — *функция от* M *переменных* ξ_i, $i=1, \ldots, M$.

Иначе говоря, финитарная функция выбора перестает зависеть от всех тех своих аргументов, которые превышают показатель финитарности π. Явный вид «редуцированной» функции $\tilde{f}^{(j)}$ в (34) и, более общо, $\tilde{f}^{(1,\ldots,M)}$ в (35), очевидно, таков:

$$\tilde{f}^{(j)}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \pi, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N),$$

$$\tilde{f}^{(1,\ldots,M)}(\xi_1, \ldots, \xi_M) = f(\underbrace{\pi, \ldots, \pi}_{M \text{ раз}}, \xi_{M+1}, \ldots, \xi_N),$$

и вообще для финитарной функции выбора $f(x)$ справедливо представление

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_N) \equiv f(\eta_1, \ldots, \eta_N), \qquad (36)$$

где

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } \xi_i \leqslant \pi, \\ \pi, & \text{если } \xi_i > \pi, \end{cases} \qquad (37)$$

для $i=1, \ldots, N$. Соотношение (37) удобно записать в виде

$$\eta_i = \min\{\xi_i, \pi\}, \quad i \in \Omega. \qquad (38)$$

Это можно также переписать в символической векторной форме

$$y = \min\{x, p\}, \qquad (39)$$

где $p=(\pi, \ldots, \pi)$, а минимизация понимается как покомпонентная. С использованием этой символики окончательно получаем для финитарной функции $f(x)$ представление

$$f(x) \equiv f(\min\{x, p\}). \qquad (40)$$

Таким образом, финитарная функция полностью определяется заданием ее на гиперкубе $\{x | 0 \leqq x \leqq p\}$. В точке x вне этого гиперкуба она, согласно (40), принимает то же значение, что и в соответствующей точке $y = \min\{x, p\}$ этого гиперкуба. Наконец, из (40) с учетом условия $0 \leqq f(y) \leqq y$ для функции выбора немедленно получаем, что финитарная функция выбора заведомо ограничена:

$$f(x) \leqq p \quad \text{для всех} \quad x \geqq 0. \qquad (41)$$

Приведем теперь достаточное условие финитарности.

Теорема 3.3. *Если функция потребительского выбора* $f(x)$ *удовлетворяет свойству* 2 *и ограничена, то она финитарна.*

Доказательство. Возьмем некоторый индекс $j \in \Omega$, зафиксируем произвольные неотрицательные ξ_i, $i \neq j$. Пусть $P > 0$ —

заданная константа, ограничивающая компоненты вектор-функции $f(x)$:

$$f_i(x) < P \quad \text{для всех} \quad i \in \Omega,\ x \geqq 0. \tag{42}$$

Тогда, в частности,

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, P, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N) < P \tag{43}$$

и поэтому для всякого $\xi_j \geqslant P$ по свойству 2 имеем

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_N) = f_j(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, P, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N), \tag{44}$$

что и означает выполнение условия финитарности (34) с показателем $\pi = P$. Теорема 3.3 доказана.

Следствие. *Нормальные функции потребительского выбора финитарны.*

Замечание. Предположение об ограниченности функции выбора, введенное в условие теоремы 3.3, существенно. Функция выбора, удовлетворяющая свойству 2 и даже непрерывная, но неограниченная, может не быть финитарной. Это показывает простой двумерный пример:

$$f_1(\xi_1, \xi_2) = f_2(\xi_1, \xi_2) = \min\{\xi_1, \xi_2\}. \tag{45}$$

Так определенная функция потребительского выбора содержательно интерпретируется как выбор «жестко взаимодополнительных» («комплектных») продуктов [1]). Легко видеть, что свойство 2 здесь выполняется, но условие финитарности не соблюдается.

Отметим также, что ввиду непрерывности данной функции выбора выполнение свойства 2 здесь равносильно выполнению свойства 3 (в чем нетрудно также убедиться непосредственно), а значит, по теореме 3.2, эта функция выбора регулярна (что тоже легко проверяется). Таким образом, функция потребительского выбора может быть регулярной, но не финитарной. Разумеется, финитарность функции выбора и подавно не гарантирует ее регулярности.

§ 3.4. Функции спроса и порождение функций выбора

Рассмотрим теперь новое понятие — функции потребительского спроса в условиях полной дефицитности. Как уже указывалось, в отличие от ситуации «классической бездефицитности», где потребительский спрос отождествляется с реальным выбором, в условиях дефицитности приходится эти два понятия различать. «Истинный спрос» становится, вообще говоря, не наблюдаемым непосредственно, а наблюдаемый реальный выбор может претен-

---

[1]) Иллюстрацией может служить приобретение проявителя и фиксажа фотолюбителем; предполагается, что единицы измерения таковы, что требуемая пропорция этих реактивов — 1 : 1.

довать лишь на косвенное выражение скрытого спроса, если под «спросом» понимать «пожелания» потребителя, а не их деформированные, в силу ограничений из-за дефицитности, проявления в виде реализованного выбора. В этом параграфе мы вводим общее модельное представление о потребительском спросе как о желаемом для потребителя количестве данного продукта в данной ситуации. Эта внутренняя характеристика потребителя может быть восстановлена по его наблюдаемому внешнему поведению — реальному выбору — однако, вообще говоря, не в полном объеме, а лишь частично [1]). Для однозначного восстановления характеристики «спроса» само понятие спроса должно быть введено в более жесткие рамки [2]), что и делается позже в этом параграфе.

Будем считать, что если желаемое для потребителя количество продукта i в данной ситуации равно F_i, то в зависимости от величины ограничения-квоты ξ_i на продукт i в данной ситуации $x=(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, реально взятое потребителем количество продукта i равно

$$\zeta_i = \begin{cases} F_i, & \text{если } F_i \leqslant \xi_i, \\ \xi_i, & \text{если } F_i \geqslant \xi_i. \end{cases} \tag{46}$$

Другими словами, потребитель берет столько продукта, сколько он желает в данном состоянии, если это позволяет ограничение-квота, и берет квоту целиком, если его желание ее превышает. Само желаемое количество F_i может, вообще говоря, произвольным образом зависеть от величин ограничений-квот на все продукты: $F_i = F_i(x)$. Вектор $F(x)$, составленный из компонент $F_i(x)$: $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_N(x))$, будем рассматривать как исходно заданную вектор-функцию спроса, а правило (46) определит реальный выбор, «порождаемый» заданным спросом. Подведем итог этого предварительного обсуждения в следующих формальных определениях.

Определение 3.5. Будем называть *вектор-функцией потребительского спроса в условиях полной дефицитности* произвольную N-мерную вектор-функцию $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_N(x))$, определенную на всевозможных N-мерных неотрицательных векторах («на-

---

[1]) Эта ситуация аналогична более традиционной коллизии в теории потребительского выбора и в общей теории решений, когда используется оптимизационная модель выбора: обычная критериальная функция («функция полезности») не наблюдается (не «измеряется») непосредственно, а может быть лишь частично восстановлена (например, как это часто бывает, с точностью до произвольных монотонных преобразований) по наблюдаемым результатам выбора.

[2]) Подобным же образом «рафинируется» оптимизационная модель выбора, когда отказ от количественной — и чрезмерно произвольной — «функции полезности» и переход к модели с более «жесткими» качественными «отношениями предпочтения» позволяет однозначно выявлять эти отношения из доступных наблюдений.

борах продуктов») и отображающую R_+^N в себя. Компоненту $F_i(x)$ будем называть *функцией спроса на продукт* i, $i \in \Omega$.

Определение 3.6. Если $F(x)$ — вектор-функция потребительского спроса, то вектор-функцию $f(x)$ с компонентами

$$f_i(x) = \min\{\xi_i,\ F_i(x)\} \tag{47}$$

назовем *функцией потребительского выбора, порождаемой функцией спроса* $F(x)$. В символической векторной форме будем записывать (47) как

$$f(x) = \min\{x,\ F(x)\}. \tag{48}$$

Легко видеть, что функция (48) действительно является функцией потребительского выбора; она удовлетворяет требованию $0 \leqq f(x) \leqq x$. Обратно, для любой функции выбора $f(x)$ заведомо можно указать порождающую функцию спроса $F(x)$ — в этом качестве всегда можно взять хотя бы саму данную функцию выбора $f(x)$. Более того, помимо этой «тривиально порождающей» функции спроса $F(x) \equiv f(x)$, всегда можно указать целый континуум таких функций спроса: достаточно заметить, что от значений $F_i(x)$, превышающих ξ_i, порождаемая функция выбора не зависит. Для выделения нетривиальных, содержательных функций спроса целесообразно распространить на функции спроса ряд определений, введенных для функций выбора в §§ 3.2, 3.3.

Определение 3.7. Вектор-функцию потребительского спроса $F(x)$ будем называть *нормальной*, либо *субрегулярной*, либо *регулярной*, либо *финитарной*, если таковой является порождаемая ею функция потребительского выбора $f(x) = \min\{x, F(x)\}$.

«Косвенное» определение 3.7 оставляет открытой возможность равносильного «прямого» определения перечисленных выше свойств функции спроса непосредственно в терминах самой функции $F(x)$. Так, в силу определения 3.3 функция спроса $F(x)$ субрегулярна, если каждая ее скалярная компонента $F_i(x)$, рассматриваемая как функция от ξ_i, при произвольных фиксированных ξ_j, $j \neq i$, удовлетворяет условию

$$F_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) \begin{cases} \geqslant \xi_i & \text{при } 0 \leqslant \xi_i < \bar{\xi}_i, \\ = \bar{\xi}_i & \text{при } \xi_i \geqslant \bar{\xi}_i, \end{cases} \tag{49}$$

где $\bar{\xi}_i$ — некоторая величина из $[0, \infty]$, вообще говоря, зависящая от ξ_j, $i \neq j$; если $\bar{\xi}_i < \infty$ для всех $i \in \Omega$ и $x \geqq 0$, то функция $F(x)$ регулярна. Возможный вид регулярной функции спроса $F_i(x)$ на продукт i как функции от ξ_i вместе с порождаемой ею i-й компонентой функции выбора $f_i(x)$ изображен на рис. 3.4.

Ясно, что поведение порождающей функции спроса $F_i(x)$ в ее «ненаблюдаемой» части, где $F_i(x) \geqslant \xi_i$, никак не определяется «наблюдаемой» функцией выбора $f_i(x)$, чем по существу и обусловлена неоднозначность в «восстановлении» порождающей функции спроса по функции выбора. Поэтому для устранения такой неопределенности, неоднозначности, нужно функцию спроса в области, где $F_i(x) \geqslant \bar{\xi}_i$, разумным образом доопределить, «регламентировать». Естественный способ такого доопределения подсказывается характером регулярной функции спроса (см. рис. 3.4) — следует «продолжить» значение функции $F_i = \bar{\xi}_i$ с области $\xi_i \geqslant \bar{\xi}_i$ на область $\xi_i < \bar{\xi}_i$, сделав ее тем самым не зависящей от «своей» переменной ξ_i, но оставив произвольную зависимость от «чужих» переменных ξ_j, $j \neq i$.

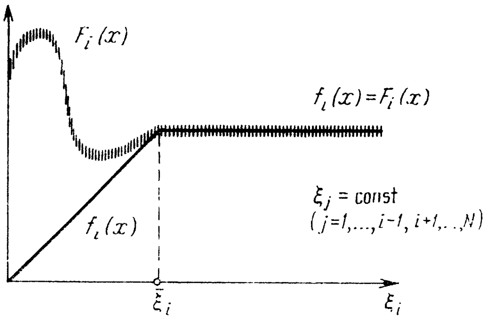


Рис. 3.4.

Определение 3.8. Вектор-функцию потребительского спроса $F(x)$ будем называть *канонической*, если спрос на продукт i есть

$$F_i(x) \equiv F_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N) \qquad (50)$$

— функция, не зависящая от ограничения-квоты на этот продукт ($i \in \Omega$).

Очевидно, свойство каноничности функции спроса есть усиление свойства регулярности, так что функция выбора, порождаемая канонической функцией спроса, заведомо регулярна. И более того, в терминах функции $\bar{f}_i$ из (21) при этом имеем совпадение величин $F_i(x) \equiv F_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N)$ и $\bar{f}_i(x) \equiv \bar{f}_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N)$ или, в терминах самой функции выбора $f(x)$, имеем

$$F_i(x) \equiv F_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \ldots, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N) = \\ = \lim_{\xi_i \to \infty} f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N) = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N)\Big|_{\xi_i \geqslant \bar{\xi}_i}. \qquad (51)$$

Таким образом, при порождении функции выбора $f(x)$ канонической вектор-функцией спроса $F(x)$ сама порождающая функция спроса в свою очередь однозначно определяется по порожденной ею функцией выбора соотношением (51). Легко видеть, что соотношение (51) может быть применено к любой регулярной функции выбора, безотносительно к ее «происхождению», и что получаемая функция $F_i(x)$ будет канонической функцией спроса, а также что полученная функция спроса $F_i(x)$ порождает, согласно (47), как раз исходную компоненту функции выбора $f_i(x)$. Взаимно однозначное соответствие между каноническими функциями спроса и регулярными функциями выбора, порождаемое преобразованиями (47) (прямым) и (51) (обратным), будем называть *каноническим сопряжением*, а соответствующую пару функций выбора $f(x)$ и спроса $F(x)$ (как и каждую пару $f_i(x)$, $F_i(x)$, $i \in \Omega$, их одноименных компонент) — *канонически сопряженными*.

Согласно (51), величина функции спроса на продукт i, канонически сопряженной с данной функцией выбора, есть не что иное, как количество продукта i, выбираемое при «достаточно (сколь угодно) большой» величине ограничения-квоты на этот продукт i и при фиксированных уровнях ограничений-квот на все остальные продукты. Такое *каноническое определение* величины $F_i(x)$ спроса на продукт i (в условиях полного дефицита) представляет собой достаточно естественное уточнение — правда, лишь для регулярных функций выбора — понятия «желаемое количество продукта в данной ситуации», с которого мы начали настоящий параграф. Грубо говоря, «желаемое количество продукта» — это то количество продукта, которое взял бы «регулярный» потребитель, если бы ограничение на этот продукт для него стало бы несущественным (при неизменных прочих ограничениях).

Подчеркнем, однако, что хотя каждую отдельную компоненту $F_i(x)$ вектор-функции спроса $F(x)$ можно, таким образом, интерпретировать как «потенциальный выбор» продукта i потребителем в ситуации x, но для вектора $F(x)$ в целом подобная трактовка была бы неправильной. Дело в том, что «потенциальный выбор» $F_i(x)$ относится к предполагаемой ситуации, когда ограничения $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_N$ остаются неизменными, а ограничение ξ_i по существу устраняется; аналогичный «потенциальный выбор» $F_j(x)$ другого продукта $j \neq i$ должен рассчитываться для иной предполагаемой ситуации, где остается неизменным ограничение ξ_i, а ослабляется ξ_j. Поэтому не удивительно, что решения для таких различных воображаемых ситуаций несогласованы и даже могут быть несовместимыми. Приведем простой пример. Пусть имеются два «взаимозаменимых» продукта, например, два сорта колбасы, и пусть потребитель желал бы получить, скажем, 10 единиц этих продуктов в сумме: $\zeta_1 + \zeta_2 = 10$. Допустим, однако, что на каждый из продуктов установлена единичная квота: $\xi_1 = \xi_2 = 1$. Тогда реальный потребительский выбор будет иметь вид $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (1, 1)$, а вектор спроса — вид $F(x) = (F_1(x), F_2(x)) = (9, 9)$, поскольку желаемое дополнительное количество первого продукта (как, независимо от этого, и второго) для потребителя составляет 8 единиц. Однако, если бы потребителю и в самом деле была бы представлена возможность получить набор продуктов (9, 9), он бы его не взял, поскольку тот почти вдвое превышает его «подлинное» намерение.

Интересно отметить, что эффект «раздувания» спроса в таком примере станет еще более ярким, если рассмотреть, скажем, 9 сортов колбасы. При прежних прочих параметрах задачи потребитель изъявит спрос в виде 9-мерного вектора (2, 2, ..., 2), осуществив реальный выбор (1, 1, ..., 1) и недобрав до желаемых 10 единиц лишь 1. Таким образом, кажущаяся нехватка (суммарный неудовлетворенный спрос) составит $18-9=9$ единиц, т. е. в 9 раз больше истинной[1]).

Вернемся к абстрактным функциям потребительского спроса, канонически сопряженным с порождаемыми ими функциями выбора.

Очевидно, что в паре канонически сопряженных функций выбора и спроса одна из них непрерывна (или ограничена) тогда и только тогда, когда непрерывна (соответственно ограничена, причем той же константой P) другая. Поэтому требование непрерывности и ограниченности из предположения 1° в определении нормальных функций выбора в том же виде можно перенести на функции спроса.

Для получения «явного» эквивалентного определения нормальных функций спроса, т. е. непосредственного критерия нормальности функций спроса, остается указать эквивалент свойства 1 (или свойства 2, или свойства 3) функции выбора применительно к порождающей функции спроса. Для того чтобы сделать это, достаточно подставить выражение $f(x)=\min\{x, F(x)\}$ в формулировку данного свойства и «расписать» получаемые соотношения в терминах функции $F(x)$ (это удобнее делать в покомпонентной форме). Приведем окончательные формулировки свойств функций потребительского спроса $F(x)$; отметим, что здесь не предполагается каноничность этих функций.

Свойство 1 функций спроса — для сужения допустимого множества (эквивалент свойства 1 функций выбора). *Пусть неотрицательные векторы $x=(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и $y=(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ таковы, что*

$$\begin{gathered} \eta_i=\xi_i \text{ для } i\colon F_i(x)\geqslant \xi_i, \\ F_i(x)\leqslant \eta_i \leqslant \xi_i \text{ для } i\colon F_i(x)<\xi_i. \end{gathered} \tag{52}$$

Тогда

$$F_i(y)\geqslant \eta_i \text{ для } i\colon F_i(x)\geqslant \xi_i,$$

$$\text{или} \quad \left.\begin{aligned} F_i(y)=F_i(x)\leqslant \eta_i \\ F_i(y)>\eta_i=F_i(x) \end{aligned}\right\} \text{ для } i\colon F_i(x)<\xi_i. \tag{53}$$

[1]) Еще более красочная иллюстрация к этому феномену получается, если рассмотреть 1000 видов продуктов с единичной квотой по каждому из них (или, что равносильно, 1000-кратный визит покупателя к прилавку) при суммарной потребности у покупателя в 1001 единиц. Легко видеть, что произойдет удвоение спроса против реального выбора (квоты), по каждому из продуктов и по их сумме, и утысячерение суммарного не-

Свойство 2 функций спроса — для расширения допустимого множества (эквивалент свойства 2 функций выбора). *Пусть неотрицательные векторы* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *и* $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ *таковы, что*

$$\begin{aligned} &\eta_i = \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon F_i(x) \geqslant \xi_i,\\ &\eta_i \geqslant \xi_i \quad \text{для} \quad i\colon F_i(x) < \xi_i. \end{aligned} \tag{54}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &F_i(y) \geqslant \eta_i && \text{для} \quad i\colon F_i(x) \geqslant \xi_i,\\ &F_i(y) = F_i(x) < \eta_i && \text{для} \quad i\colon F_i(x) < \xi_i. \end{aligned} \tag{55}$$

Свойство 3 функций спроса — синтетическое (эквивалент свойства 3 функций выбора). *Пусть неотрицательные векторы* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *и* $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ *таковы, что*

$$\begin{aligned} &\eta_i = \xi_i && \text{для} \quad i\colon F_i(x) \geqslant \xi_i,\\ &\eta_i \geqslant F_i(x) && \text{для} \quad i\colon F_i(x) < \xi_i. \end{aligned} \tag{56}$$

Тогда

$$F_i(y) \geqslant \eta_i \quad \text{для} \quad i\colon F_i(x) \geqslant \xi_i,$$

$$\text{или} \quad \left.\begin{aligned} F_i(y) = F_i(x) \leqslant \eta_i\\ F_i(y) > \eta_i = F_i(x) \end{aligned}\right\} \text{для } i\colon F_i(x) < \xi_i. \tag{57}$$

Логическое соотношение: свойство 3 $\leftrightarrow$ (свойство 1 и свойство 2), как и эквивалентность всех этих трех свойств при непрерывности функции спроса F, непосредственно вытекают из соответствующих утверждений для функции выбора f.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сформулировать «самостоятельное» эквивалентное определение (критерий) нормальности функций потребительского спроса. Выпишем, параллельно изложению в § 3.2 для функций выбора, два предположения.

Предположение I о функциях спроса. Вектор-функция потребительского спроса $F(x)$ непрерывна и ограничена:

$$F_i(x) < P, \qquad i \in \Omega. \tag{58}$$

Предположение II о функциях спроса. Вектор-функция потребительского спроса $F(x)$ удовлетворяет свойству 1 функций спроса.

Теорема 3.4. *Для того чтобы вектор-функция потребительского спроса* $F(x)$ *была нормальной (т. е. порождала нормальную функцию выбора* $f(x)$*), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла предположениям* I *и* II.

§ 3.5. Выбор в условиях частичной дефицитности

До сих пор мы рассматривали ситуации, когда ограничения-квоты наложены на все продукты $i \in \Omega$ — ситуации «полной дефицитности». Впрочем, и среди таких ситуаций обычно не все

удовлетворенного спроса против действительной нехватки одной-единственной единицы. Возможно, это наблюдение отчасти объясняет качественное изменение характера потребителя при первых признаках дефицита.

продукты были «существенно» дефицитны — не каждая квота «исчерпывалась» при потребительском выборе («достигалась» потребительским спросом). Более того, рассматривая канонические функции спроса и выражая их через функции выбора в (51), мы пользовались специфическим приемом установления столь высоких квот, что это было по существу, говоря неформально, равносильно снятию этих квот вообще. Теперь нам предстоит рассмотреть общий тип ситуаций, когда дефицитными, ограниченными для потребления объявляются, быть может, только некоторые из продуктов $i \in \Omega$, которые составляют «дефицитную номенклатуру» $I \subseteq \Omega$, а на потребление остальных продуктов $k \in K = \Omega \setminus I$ не налагается никаких явных ограничений.

Мы рассмотрим два подхода к описанию общих ситуаций потребительского выбора. При первом подходе мы постулируем, что отсутствие ограничения-квоты на потребление продукта $k \in K$ равносильно предоставлению, грубо говоря, «очень большой» квоты ξ_k и что выбор в условиях частичной дефицитности, так понимаемой, полностью определяется заданием единственной функции выбора $f(x)$ (или порождающей вектор-функции спроса $F(x)$). При этом для описания выбора (спроса) в условиях частичной дефицитности — с дефицитной номенклатурой $I \subset \Omega$ — используются специальные функции выбора (спроса) вида $f^I(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_s})$ или $F^I(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_s})$, где $\{i_1, \ldots, i_s\} = I$, которые зависят только от реально имеющихся квот на дефицитные (ограниченные) продукты из номенклатуры I. Однако эти функции не задаются самостоятельно, а выводятся из «базовой» функции $f(x)$ (или $F(x)$), для чего указанные базовые функции должны обладать определенными свойствами (финитарностью).

Второй подход более глубок. Он не требует, чтобы с самого начала постулировались какие-либо явные связи между потребительским поведением при полной дефицитности продуктов, хотя бы и с «большими» квотами, и поведением при частичной дефицитности. Вместо этого для каждой дефицитной номенклатуры $I \subseteq \Omega$ задается своя функция выбора $f^I(x)$ (функция спроса $F^I(x)$), причем заранее не требуется, чтобы $f^I(x)$ (и $F^I(x)$) зависела только от ξ_i с $i \in I$; тем самым предусматривается возможность описания потребительского поведения в общих ситуациях, когда потребителю предоставляется набор продуктов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и потребление некоторых продуктов $i \in I$ он обязан удержать в пределах предоставленных уровней ξ_i, а остальные уровни ξ_k, $k \notin I$, он волен превышать[1]). Таким образом, при этом подходе поведение потребителя описывается семейством $\{f^I(x)\}$ из 2^N функций выбора и (или) семейством $\{F^I(x)\}$ из 2^N функций спро-

[1]) Тем самым ξ_k имеют смысл не жестких ограничений-квот, а скорее «ориентировочных» или рекомендованных уровней потребления.

са с параметром-номенклатурой $I \subseteq \Omega$, пробегающим 2^N возможных «значений» — подмножеств множества $\Omega = \{1, \ldots, N\}$. В несколько иной форме, поведение потребителя описывается универсальной функцией выбора $f(x, I)$ и (или) универсальной функцией спроса $F(x, I)$, зависящей от $I \subseteq \Omega$ как от параметра; разумеется, это эквивалентно предыдущему при отождествлении $f^I(x) \equiv \equiv f(x, I)$ и $F^I(x) \equiv F(x, I)$. При таком подходе явное выражение одних функций $f^I(x)$ (при одних значениях параметра I) через другие заранее может не постулироваться (то же для $F^I(x)$). Вместо этого может использоваться аксиоматический метод для задания косвенных взаимосвязей между выбором и (или) спросом в различных ситуациях x, I в духе предположений о «рациональности» выбора, рассмотренных для случая полной дефицитности в § 3.2. Тем интереснее оказывается, что при проведении этой «аксиоматической» программы мы вновь возвращаемся фактически в рамки первого подхода — но зато уже на новом, более обоснованном уровне.

Начнем с первого подхода. Вспомним, что возможность определения спроса $F_i(x)$ через выбор $f_i(x)$ при «достаточно больших» квотах ξ_i в (51) покоилась на «хорошем поведении» — а именно, регулярности — величины $f_i(x)$ как функции от «своей» переменной ξ_i. Для того чтобы распространить подобное определение на случай «достаточно больших» квот по произвольным продуктам, мы воспользуемся заготовленным в § 3.3 определением 3.4 финитарных функций выбора (а также переносом его в определении 3.7 на порождающие функции спроса).

Итак, пусть задана финитарная функция выбора в условиях полной дефицитности $f(x)$; пусть π — показатель финитарности. Введем в рассмотрение функции выбора в условиях частичной дефицитности $I \subset \Omega$, обозначаемые символами $f^I(x) \equiv \equiv f^I(\xi_i|_{i \in I}) \equiv f^I(x_I)$ (через x_I обозначается подвектор вектора x, составленный из компонент ξ_i, $i \in I$). С этой целью положим по определению

$$f^I(x) \equiv f^I(x_I) = f(\xi_1, \ldots, \xi_N)\big|_{\xi_k = \pi, k \notin I}. \tag{59}$$

Далее, исходя из той же функции выбора $f(x)$, введем в рассмотрение функции спроса в условиях полной дефицитности $F_i(x)$, полагая по определению, согласно (51) и с учетом (59),

$$F_i(x) = f(\xi_1, \ldots, \xi_N)\big|_{\xi_i = \pi} = f_i^{\Omega \setminus i}(x_{\Omega \setminus i}). \tag{60}$$

(для упрощения обозначений мы пишем $\Omega \setminus i$ вместо $\Omega \setminus \{i\}$). Для удобства последующих манипуляций введем следующее обозначение для *оператора подстановки значения* π: будем символом Lx, где $L \subseteq \Omega$, обозначать N-мерный вектор, который получается из $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ подстановкой $\xi_k = \pi$ для всех $k \notin L$. При такой символике

$$f^I(x) = f(Ix) \tag{61}$$

и

$$F_i(x) = f_i((\Omega\backslash i)x), \qquad i \in \Omega. \tag{62}$$

Введем теперь в рассмотрение, наконец, функции спроса в условиях частичной дефицитности $I \subset \Omega$, обозначаемые $F_i^I(x)$. Это можно попытаться сделать двояким образом, положив по определению

$$F_i^I(x) = F_i(Ix) \tag{63}$$

в духе определения (61) (т. е. полагая в «базовой» функции спроса $F_i(x)$ квоты на недефицитные продукты достаточно большими) или, другим путем, положив

$$F_i^I(x) = f_i^{I\setminus i}(x) \tag{64}$$

в духе определения «базовой» функции спроса $F_i(x)$ через выбор $f_i^{\Omega\setminus i}(x)$ (т. е. полагая в функции выбора при частичной дефицитности $f_i^I(x)$ i-ю переменную «достаточно большой» дополнительно [1]) к k-м переменным $k \in \Omega\backslash I$). К счастью, оба определения (63) и (64) дают одно и то же (в силу коммутативности оператора подстановки):

$$F_i^I(x) = f_i((I\setminus i)\,x). \tag{65}$$

Этим завершается построение параметрических семейств функций выбора $\{f^I(x)\}$ и спроса $\{F^I(x)\}$, $I \subset \Omega$, при первом, конструктивном подходе к описанию выбора и спроса в условиях частичной дефицитности.

Обратимся теперь ко второму, аксиоматическому подходу.

Определение 3.9. Будем называть *параметрическим семейством функций выбора в условиях частичной дефицитности*, или *универсальной* (*параметрической*) *функцией выбора*, семейство неотрицательных функций $\{f^I(x)\}$, $I \subseteq \Omega$, отображающих неотрицательный ортант R_+^N в себя и удовлетворяющих условию [2]):

$$f_I^I(x) \leqq x_I \text{ для всех } x \geqq 0, \ I \subseteq \Omega. \tag{66}$$

Определение 3.10. Будем называть универсальную (параметрическую) функцию выбора $f^I(x)$ ($I \subseteq \Omega$, $x \in R_+^N$) *нормальной*, если она ограничена и непрерывна по $x \in$ при каждом $I \subseteq \Omega$ и если выполнено следующее свойство.

[1]) Заметим, что эта операция оказывается излишней, если $i \in \Omega\backslash I$.

[2]) В соответствии с принятыми обозначениями, $f_I^I(x)$ — подвектор вектор вектора $f^I(x)$, составленный из компонент $f_i^I(x)$, $i \in I$.

Обобщенное свойство 1 для универсальной функции выбора. *Если x, y — два вектора из R_+^N и если*

$$I \subseteq J \subseteq \Omega, \quad y_I \leqq x_I \text{ и } f_J^I(x) \leqq y_J, \tag{67}$$

то

$$f^J(y) = f^I(x). \tag{68}$$

Обобщенное свойство 1 для универсальной функции выбора $f^I(x)$ в соответствии со своим названием представляет собой обобщение свойства 1 для функции выбора в условиях полной дефицитности из § 3.2. Оно точно так же интерпретируется как свойство неизменности выбора при сужении допустимого множества путем отбрасывания ненужных альтернатив. Действительно, в условии (67) оговорен переход от допустимого множества векторов — продуктовых наборов $\{z \in R_+^N \mid z_I \leqq x_I\}$ к новому, «более узкому» допустимому множеству $\{z \in R_+^N \mid z_J \leqq y_J\}$, целиком лежащему в «старом» множестве, однако включающему в себя «старый» выбранный вектор $z = f^I(x)$. Требование (68) означает, что при этом в новом множестве должен быть выбран тот же вектор z. На рис. 3.5 эта ситуация иллюстрируется для двумерного случая $N = 2$, когда $I = \{1\}$, $J = \Omega = \{1, 2\}$.

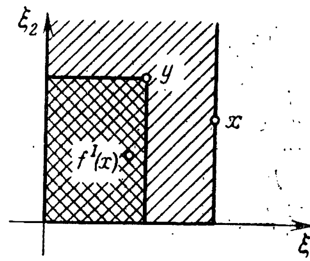


Рис. 3.5.

Легко видеть, что в прежнем случае полной дефицитности, когда возможно только $I = J = \Omega$, обобщенное свойство 1 для универсальной функции выбора переходит в свойство 1 из § 3.2: функция выбора $f(x)$, естественно отождествляемая в этом случае с $f^\Omega(x)$, удовлетворяет свойству 1 для условий полной дефицитности тогда и только тогда, когда $f^\Omega(x)$ удовлетворяет требованиям (67), (68) обобщенного свойствами 1 при $I = J = \Omega$. Однако связь между этими свойствами значительно более глубокая, что демонстрируют следующие две теоремы.

Теорема 3.5. *Пусть функция выбора в условиях полной дефицитности $f(x)$ — нормальная, и пусть по ней построено параметрическое семейство функций $f^I(x)$, $I \subseteq \Omega$, согласно соотношению (61), где в качестве показателя финитарности π взята граница P для $f(x)$. Тогда $\{f^I(x)\}$, $I \subseteq \Omega$,— нормальное параметрическое семейство функций выбора в условиях частичной дефицитности.*

Доказательство. Тот факт, что функции $f^I(x)$ из (61) являются функциями выбора при частичной дефицитности, т. е. выполнение требования (66), сразу следует из их определения. Далее, непрерывность и ограниченность $f^I(x)$ тривиально вытекает из таковых для $f(x)$ в (61). Остается проверить выполнение обобщенного свойства 1. Пусть выполнено условие (67); тогда

$$J\bar{y} \leqq Ix \text{ и } f(Ix) \leqq J\bar{y}, \text{ где } \bar{y} = \min\{y, p\},\ p = (P, P, \ldots, P), \tag{69}$$

в силу (61) и ограниченности функций f_i константой $P = \pi$. Теперь в силу свойства 1 для нормальной функции выбора f из (69) с учетом финитарности нормальной функции выбора следует

$$f(Jy) = f(J\bar{y}) = f(Ix), \tag{70}$$

т. е. равенство (68). Теорема 3.5 доказана.

Теорема 3.6. *Пусть $f^I(x)$, $I \subseteq \Omega$,— универсальная (параметрическая) функция выбора, и пусть она нормальна. Тогда $f(x) = f^\Omega(x)$ является нормальной функцией выбора в условиях полной дефицитности и все функции $f^I(x)$ при $I \subset \Omega$ выражаются через $f(x) = f^\Omega(x)$ соотношением* (61).

Доказательство. Нужно проверить лишь последнюю часть утверждения теоремы: справедливость (61) при $f(x) = f^\Omega(x)$. Возьмем произвольные x и I и покажем, что

$$f^I(x) = f^\Omega(Ix). \tag{71}$$

С этой целью возьмем в качестве J в формулировке обобщенного свойства 1 $J = \Omega$, а в качестве y возьмем $y = Ix$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$y_I = x_I \text{ и } f^I_\Omega(x) \leqq y_\Omega, \tag{72}$$

так что в силу обобщенного свойства 1 выполнено

$$f^\Omega(y) = f^I(x),$$

т. е. $f^\Omega(Ix) = f^I(x)$. Теорема 3.6 доказана.

Теоремы 3.5 и 3.6 показывают, что второй, аксиоматический путь построения параметрического семейства функций выбора для условий частичной дефицитности приводит в точности к тем же результатам, что и первый путь — путь конструктивного построения функций выбора для частичной дефицитности $f^I(x)$ на основе «соотношения редукции» (61), исходя из заданной нормальной (а значит, и финитарной) функции выбора для полной дефицитности $f(x)$. Теорема 3.6 означает, что нормальное параметрическое семейство функций выбора $\{f^I(x)\}$, $I \subseteq \Omega$, фактически полностью определяется заданием «базовой» функции выбора $f^\Omega(x)$, играющей роль функции выбора в условиях полной дефицитности.

Как при конструктивном, так и при эквивалентном аксиоматическом подходе наряду с параметрическим семейством функций выбора $\{f^I(x)\}$, $I \subseteq \Omega$, можно рассматривать соответствующее семейство функций спроса $\{F^I(x)\}$, $I \subseteq \Omega$. При этом, как явствует из проведенного выше анализа конструктивного подхода (а в силу теорем 3.5, 3.6 снимается необходимость заново проводить такой же анализ для аксиоматического подхода), для функций спроса выполняется свое соотношение редукции (63), а также условие связи между функциями спроса и функциями выбора (64). Для канонически сопряженной пары функций выбора и спроса в условиях полной дефицитности мы имели, кроме того, другое соотношение «сопряжения»:

$$f(x) = \min(x, F(x)), \tag{73}$$

которое определяет порождение функции выбора f функцией спроса F. Возникает вопрос: остается ли подобное соотношение для «порождения» функции выбора $f^I(x)$ функцией спроса $F^I(x)$?

В рамках конструктивного подхода ответ на этот вопрос легко выводится из определений функций f^I и F^I соотношениями редукции (61) и (63) и из соотношения (73) для порождения функции f функцией F, и ответ оказывается положительным. В самом деле, в силу (73) для $f_i(Ix)$ и $F_i(Ix)$ имеем связь: $f_i(Ix) = \min\{\xi_i, F_i(Ix)\}$. Пусть числовой параметр π в операциях редукции (при подстановке в Ix и т. п.) не меньше константы P, ограничивающей функции f_i и F_i. Тогда для $i \notin I$ имеем $\min\{\xi_i, F_i(Ix)\} = \min\{\pi, F_i(Ix)\}$. Воспользовавшись теперь определениями (61) и (63), в результате получаем следующее общее соотношение порождения выбора спросом в условиях частичной дефицитности:

$$f_i^I(x) = \begin{cases} \min\{\xi_i, F_i^I(x)\} & \text{для } i \in I, \\ F_i^I(x) & \text{для } i \notin I. \end{cases} \tag{74}$$

В рамках аксиоматического подхода соотношение (74) можно постулировать; тогда при требовании каноничности всех функций спроса F^I и нормальности порождаемого семейства функций выбора f^I мы в силу теоремы 3.6 снова приходим к соотношениям связи (61), (63), (64). Подстановка постулируемого соотношения (74) в формулировку обобщенного свойства 1 при этом дала бы эквивалентное определение нормальности универсальной функции выбора f^I, $I \subseteq \Omega$, в терминах порождающей функции спроса F^I, $I \subseteq \Omega$; ввиду громоздкости получаемой формулировки она здесь не приводится.

§ 3.6. Однокритериальная оптимизационная модель выбора: поведение потребителя, характеризуемого функцией полезности

Как уже говорилось ранее, в частности в § 3.2, при изучении поведения потребителя в отношении выбора продуктов часто исходят из «оптимизационной» предпосылки. Эта предпосылка предполагает существование критериальной функции, оценивающей каждый набор $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_i, \ldots, \zeta_N)$ предоставляемых потребителю или потребляемых им продуктов. Такую критериальную функцию часто именуют функцией полезности [29].

При этом считается, что потребитель стремится максимизировать функцию полезности $U(z)$ ($z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$) путем выбора соответствующего набора продуктов из некоторого заданного множества G_0. Множество G_0 в свою очередь может зависеть, например, от цен, как это имеет место для «бюджетного» множества $G_0 = B$:

$$B = \left\{z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) : \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \zeta_i \leqslant d\right\},$$

где $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N) \geqq 0$ — вектор цен, а число $d > 0$ — бюджет потребителя.

В соответствии с основными представлениями о потребительском выборе в условиях дефицитности ряда продуктов можно считать, что наряду с множеством G_0 имеются еще ограничения-квоты на потребление дефицитных продуктов, образующих номенклатуру $I \subseteq \Omega$. Тогда в рамках данной модели функция выбора $f^I(x)$ есть зависящее от параметра x решение $z^* = f^I(x)$ следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered} U(z) = \max, \\ z \in G_0, \quad z \geqq 0, \\ z_I \leqq x_I. \end{gathered} \tag{75}$$

Для того чтобы обеспечить существование однозначной функции выбора, определяемой как решение задачи вида (75), будем в дальнейшем предполагать, что функция $U(z)$ — строго вогнутая непрерывная неотрицательная функция, G_0 — выпуклое компактное множество.

При этих предположениях, как известно из теории вогнутого программирования, решение $z^* = f^I(x)$ экстремальной задачи (75) существует и единственно [15].

Функция спроса на i-й продукт $F_i^I(x)$, $i = 1, \ldots, N$, в этом случае определяется, согласно соотношению (64), как i-я компонента зависящего от x решения экстремальной задачи типа (75) (своей для каждого i) при замене I на $I \setminus \{i\}$, т. е. задачи вида

$$\begin{gathered} U(z) = \max, \\ z \in G_0, \quad z \geqq 0, \\ z_{I \setminus \{i\}} \leqq x_{I \setminus \{i\}}. \end{gathered} \tag{76}$$

Определение 3.11. Функцию выбора $f^I(x)$, определенную как решение экстремальной задачи (75), и функцию спроса $F_i^I(x)$, $i = 1, \ldots, N$, определенную как i-я компонента решения задачи

(76), будем именовать соответственно *однокритериальной функцией выбора* и *однокритериальной функцией спроса.*

Легко видеть в силу ограниченности множества G_0, что так определенные функции f^I и F^I удовлетворяют соотношениям (61)—(65) конструктивного подхода (в качестве показателя финитарности π здесь можно взять, например, $\max\|z\|$ по всем $z \in G_0$).

Теорема 3.7. *Однокритериальные функции выбора и спроса нормальны.*

Доказательство этой теоремы сводится к замечанию об однозначной определенности, непрерывности и ограниченности указанных функций и проверке выполнения свойства 1, такой, которая уже была проделана в § 3.2 при первом рассмотрении оптимизационной модели потребления. Подчеркнем, что сейчас, при рассмотрении универсальной функции выбора $f^I(x)$, $I \subseteq \Omega$, в силу теоремы 3.6 достаточно проверить нормальность одной только функции $f^\Omega(x)$ — функции выбора в условиях полной дефицитности, так что действительно можно ограничиваться проверкой свойства 1 из § 3.2, а не проверять более сложно выглядящее обобщенное свойство 1 из § 3.5.

Следствие. *Однокритериальные функции выбора и спроса связаны соотношением порождения* (74).

Интересно отметить, что если для однокритериальных функций выбора и спроса как решений задач (75), (76) попытаться провести прямое доказательство соотношений, фигурирующих в свойстве 1 и его эквивалентах, то такое доказательство окажется довольно громоздким.

Итак, для однокритериальных функций выбора и однокритериальных функций спроса сохраняются в силе все указанные в §§ 3.2—3.5 утверждения относительно свойств нормальных функций выбора и функций спроса. В то же время, как будет показано в гл. IX, эти однокритериальные функции выбора и спроса обладают рядом специфических свойств, которые используются при исследовании эффективных квазиравновесий и равновесий в гл. X.

§ 3.7. Согласованные состояния потребления и их изменения

Рассмотрим функции выбора и спроса в условиях полной дефицитности (f и F) или частичной дефицитности (f^I и F^I) и обсудим, чем примечательна реакция потребителя на ту или иную экономическую ситуацию, описываемая этими характеристиками. Под экономической ситуацией мы сейчас подразумеваем задание набора продуктов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, предоставляемого потребителю, с указанием номенклатуры I дефицитных продуктов, заданные количества которых ξ_i, $i \in I$, следует трактовать как жесткие ограничения-квоты на потребление.

Пусть сначала имеется ситуация полной дефицитности: $I = \Omega$. Тогда в условии $f(x) \leqq x$ возможны два случая:

$$f(x) \leq x \qquad (77)$$

(т. е. хотя бы по одной компоненте здесь неравенство — строгое) и

$$f(x) = x. \qquad (78)$$

В случае (77) квота хотя бы на один продукт j используется не полностью: $f_j(x) < \xi_j$; это обстоятельство можно расценивать как симптом несогласованности квот с «желаниями» потребителя в терминах порождающей функции спроса $F_j(x) < \xi_j$. В случае же (78) все квоты используются и в терминах порождающего спроса согласно (73) имеем $F_i(x) \geqslant \xi_i$ для всех $i \in \Omega$. В первом случае с содержательной точки зрения продукт j был отчасти «лишним», тогда как во втором случае, хотя, возможно, имеется неудовлетворенный спрос, но нет «лишних» продуктов. Этот второй случай, по-видимому, лучше соответствует логике «разумной» организации распределения продуктов в условиях дефицитности, нежели первый.

Общий случай частичной дефицитности: $I \subseteq \Omega$ отличается от $I = \Omega$ тем, что при наличии прежних двух случаев типа (77) и (78) для сравнения I-х подвекторов $f^I_I(x) \leqq x_I$ возможны различные, «в обе стороны», несовпадения $f^I_k(x) \neq \xi_k$ для $k \notin I$. Обсудим признаки «согласованности» потребительского выбора $f^I(x)$ с предоставленным набором продуктов x. Для дефицитных продуктов $i \in I$ мы по-прежнему может считать таким признаком совпадение выбираемого количества с квотой: $f^I_i(x) = \xi_i$, т. е. согласно (74) $F^I_i(x) \geqslant \xi_i$. Для продуктов же $k \notin I$, предоставляемых в качестве «недефицитных», естественно сохранить классическое требование сбалансированности спроса и предложения по каждому такому продукту: $F^I_k(x) = \xi_k$, $k \notin I$, так что снова согласно (74) $f^I_k(x) = \xi_k$. В совокупности снова получаем требование $f^I(x) = x$.

Эти рассуждения подводят нас к определению согласованного (сбалансированного) состояния потребления из гл. I как «согласованного с потребителем» набора продуктов в следующем смысле.

Определение 3.12. Набор продуктов $x \in R^N_+$ при дефицитной номенклатуре I будем называть *потребительски согласованным*, если

$$f^I(x) = x, \qquad (79)$$

или, равносильно, в терминах порождающей функции спроса, если

$$F_i^I(x)\begin{cases}\geqslant \xi_i, & i\in I,\\ = \xi_i, & i\notin I.\end{cases} \tag{80}$$

Функция потребительского спроса, таким образом, может служить индикатором потребительской согласованности и возможных путей ее приобретения и/или сохранения. В качестве примера возможного использования такого индикатора упомянем «соображения непрерывности». Например, если имеется состояние x, потребительски согласованное в условиях полной дефицитности при неудовлетворенном спросе: $F(x) > x$, то «малое» увеличение компонент вектора x при непрерывности функции спроса F сохранит потребительскую согласованность. Подобные соображения будут использоваться далее в гл. IX, X.

Свойство потребительской согласованности говорит о том, что если потребитель выбирает именно тот набор продуктов, который ему предлагается, то все продукты пользуются спросом и спрос на недефицитные продукты удовлетворен полностью.

Состояние взаимодействия поставщика и потребителя, при котором поставщик поставляет набор x, а потребитель потребляет набор $f^I(x)$, и при котором эти два набора совпадают, естественно считать более приемлемым, нежели состояние их несовпадения, когда хотя бы один продукт оказывается «не пользующимся спросом», т. е. поставляемым в относительно избыточном количестве. Подчеркнем, что последнее, однако, не означает, что такого избыточного продукта имеется действительно слишком много с точки зрения потребителя. Такая «избыточность» относительна, так как она утверждается лишь применительно к данному состоянию x и может означать, что не данного, «избыточного» продукта слишком много, а например, какого-либо другого продукта, «дополнительного» к данному, слишком мало. Точно так же факт совпадения $x = f^I(x)$ сам по себе, конечно, не означает, что набор продуктов x вполне удовлетворителен с точки зрения потребителя. Такая согласованность предложения x с потребительским выбором $f^I(x)$ может иметь место и при низких уровнях потребления дефицитных продуктов; в частности, поскольку $f(0) = 0$, при дефицитности всех продуктов нулевое предложение всех их всегда «согласовано» с потребителем в смысле принятого определения 3.12.

Свойство потребительской согласованности набора продуктов x при дефицитной номенклатуре I, таким образом, подразумевает лишь, что те ограниченные возможности, которые имеются для обеспечения потребителя продуктами, были «разумно использованы»: нет напрасно затраченных усилий на предоставление продукта, который в данной ситуации не нужен потребителю.

В заключение приведем два утверждения о «конечных» средствах построения и сохранения потребительски согласованных наборов, которые будут полезны в дальнейшем. Всюду далее предполагается нормальность модели потребителя (функций выбора и спроса).

Свойство 4. *Если набор продуктов x потребительски согласован при дефицитной номенклатуре I, то он остается потребительски согласованным при любой более широкой дефицитной номенклатуре $J \supset I$.*

Свойство 5. *Для любого набора продуктов x при любой дефицитной номенклатуре I набор $y = f^I(x)$ является потребительски согласованным при I, т. е. $f^I(y) = y$.*

Свойства 4, 5 легко выводятся непосредственно из обобщенного свойства 1.

Свойство 4 позволяет «объявлять» все продукты дефицитными, сохраняя при этом потребительскую согласованность исходного набора продуктов [1]). Свойство 5 позволяет переходить к потребительски согласованному состоянию от первоначального состояния, не являвшегося потребительски согласованным, «ужесточая» те ограничения-квоты, которые были «недоиспользованы» в исходном состоянии, т. е. снижая разрешенные уровни потребления продуктов до реально наблюдавшихся уровней [2]). Подчеркнем, что, несмотря на всю кажущуюся очевидность такого способа действий, его пригодность существенно опирается на предположения нормальности потребительского выбора. Так, например, для функции выбора f такой, что $f(x) < x$ при $0 < x \leqq \bar{x}$, такой способ действий при исходном состоянии $\bar{x}$ в условиях полной дефицитности заведомо не может привести ни к какому потребительски сбалансированному состоянию, отличному от тривиального $x = 0$ (если даже при этом разрешить переводить дефицитные продукты в категорию недефицитных). Очевидно, такая функция потребительского выбора не является нормальной [3]).

---

[1]) Ср. также замечание 2.4 в § 2.3.

[2]) Ср. также замечание 1.3 в § 1.3.

[3]) Подобный характер зависимости выбора от предлагаемого набора продуктов для совокупного потребителя может объясниться, в частности, «эффектом подражательности» в потреблении, в силу которого малые партии товаров могут раскупаться менее интенсивно, чем большие (впрочем, при превышении некоторого уровня потребления такая зависимость может измениться на обратную).

Глава IV

ЭКОНОМИЧНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

§ 4.1. Что остается от эффективности, если максимизировать прибыль при неравновесных ценах

Пусть система производственных элементов находится в некотором технологически допустимом состоянии; обсудим вопрос об эффективности этого состояния. Как уже говорилось в гл. I, состояние системы может быть неэффективным (т. е. соответствующий вектор чистых выпусков может не быть максимальным в векторном смысле) по качественно различным причинам. Во-первых, могут быть, грубо говоря, слишком низки интенсивности производства, т. е. малы валовые выпуски, а с ними и чистые выпуски. Во-вторых — это «общий случай» — валовые выпуски могут быть и не малы, но могут быть «нерационально» организованы внутрипроизводственные затраты продуктов: «перераспределение» потоков таких продуктов могло бы позволить увеличить чистые выпуски (как за счет увеличения валовых выпусков, так и за счет снижения суммарных производственных затрат). Наконец, в-третьих, еще одним — довольно парадоксальным на первый взгляд — источником неэффективности может оказаться излишне высокая интенсивность производства, когда велики валовые выпуски продуктов, но при этом чрезмерно велики внутрипроизводственные затраты, и дальнейший прирост валовых выпусков поглощается опережающим приростом затрат. Простейший «однопродуктовый» пример такой ситуации приводился в § 1.3.

Ясно, что наложение ограничений-квот на производственные затраты и выпуски, заведомо сужая множество технологически реализуемых состояний системы, вообще говоря, может снижать ее эффективность. Ясно также, что таким путем могут возникать первая и вторая из вышеупомянутых причин неэффективности: слишком жесткие квоты могут чрезмерно ограничить интенсивности производства, и даже не слишком малые, но произвольно (и поэтому нерационально) установленные квоты могут препятствовать рациональному перераспределению внутрипроизводственных потоков продуктов. Эти источники неэффективности лежат в самой сути произвольного наложения ограничений-квот.

Однако остается вопрос: будет ли при этом проявляться также и третья причина неэффективности? Не может ли оказаться так, что даже в пределах установленных квот при сложившемся состоянии было бы эффективнее снизить и валовые выпуски, и — в еще большей степени — внутрипроизводственные затраты и это привело бы к увеличению чистых выпусков всех продуктов? Такое явление мы называем далее «неэкономичностью».

Оказывается, что хотя в принципе, при произвольном исходном состоянии, это возможно, но это невозможно при экономической реализации состояния системы, когда состояние производственной системы в целом складывается из независимых самостоятельно выбираемых состояний производственных элементов по критерию максимума прибыли. Такое состояние всегда является «экономичным»: в нем невозможно снизить затраты (и валовые выпуски) без снижения чистых выпусков. Более того, всякое экономически реализуемое состояние оказывается в определенном смысле эффективным с учетом наложенных ограничений. А именно, реализуемый таким путем вектор чистых выпусков заведомо оказывается максимальным в векторном смысле (т. е. неулучшаемым по всем компонентам одновременно) среди всех векторов чистых выпусков, которые вообще технологически реализуемы при данных ограничениях в системе. Таким образом, даже несмотря на произвольность установленных цен, их «неравновесность» в классическом смысле, максимизация прибыли, подсчитываемой в этих ценах, все же позволяет, так сказать, извлечь из производства тот «остаток» потенциально возможной эффективности, который обусловлен рамками имеющихся «физических» (натуральных) ограничений-квот.

При этом, правда, не следует забывать, что неравновесность цен сама как раз и приводит к необходимости наложения натуральных ограничений-квот и тем самым к снижению технологических пределов эффективности производства. Кроме того, сам факт векторной максимальности набора чистых выпусков еще не означает, что полученный набор «оптимален» с содержательной точки зрения — соотношение компонент этого вектора может быть столь неудачным, что предпочтительнее было бы иметь другой, хотя и не векторно-максимальный набор конечных продуктов. Тем не менее свойства «экономичности» и «эффективности при ограничениях», гарантируемые использованием прибыли как критерия выбора производственных решений, показывают, что во всяком случае часть полезных свойств критерия прибыли как соизмерителя затрат и результатов сохраняется, даже если для такого соизмерения применяются неравновесные (в классическом смысле) цены.

Ниже в § 4.2 рассматривается свойство экономичности (в различных разновидностях), а в § 4.3 — свойство эффективности при ограничениях. Доказывается, что всякое экономически реализуемое при произвольной системе цен и квот состояние экономично и эффективно при соответствующих ограничениях и, обратно, что всякое экономичное и эффективное при некоторых квотах состояние системы нормальных элементов может быть экономически реализовано при некоторых ценах.

§ 4.2. Экономичные состояния и экономическая реализуемость

Для пояснения феномена системной «неэкономичности» начнем с иллюстративного примера простейшей производственной системы из двух элементов, производящей два продукта. Пусть

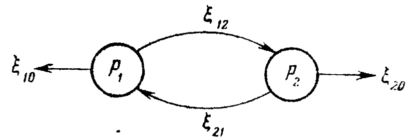


Рис. 4.1.

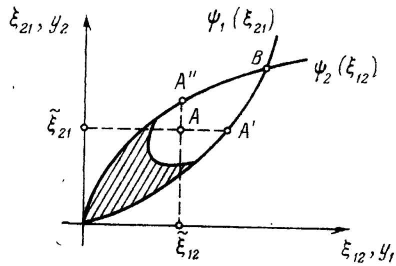


Рис. 4.2.

каждый из элементов P_1 и P_2 затрачивает только «чужой» продукт; структура сети продуктопотоков для этого случая изображена на рис. 4.1.

Пусть технологические множества элементов определяются заданием «производственных функций»

$$y_1 = \psi_1(\xi_{21}), \quad y_2 = \psi_2(\xi_{12}).$$

На рис. 4.2 изображены графики этих функций (обозначения осей приведены непосредственно на рисунке). Множества G_1 и G_2 здесь имеют вид

$$G_1 = \{(y_1, x_1)\colon\ 0 \leqslant y_1 \leqslant \psi_1(\xi_{21}),\ x_1 = (0, \xi_{21}) \geqq 0\},$$

$$G_2 = \{(y_2, x_2)\colon\ 0 \leqslant y_2 \leqslant \psi_2(\xi_{12}),\ x_2 = (\xi_{12}, 0) \geqq 0\}.$$

Каждая точка плоскости на рис. 4.2 может рассматриваться как представляющая некоторое технологически реализуемое состояние системы, в котором каждый элемент P_i находится в эффективном по выпуску-затратам состоянии (см. определение 1.9 в § 1.4) на своей «технологической кривой» ψ_i. А именно, точка с координатами $(\tilde{\xi}_{12}, \tilde{\xi}_{21})$ представляет состояние $(\psi_1(\tilde{\xi}_{21}), 0, \tilde{\xi}_{21})$ элемента P_1 и состояние $(\psi_2(\tilde{\xi}_{12}), \tilde{\xi}_{12}, 0)$ элемента P_2. Точки, лежащие внутри «чечевицы», ограниченной кривыми $\psi_1(\xi_{21})$ и $\psi_2(\xi_{12})$ на рис. 4.2, представляют «продуктивные» состояния системы, в которых чистые выпуски обоих продуктов положительны. Так, точке A соответствует состояние с потоками продуктов между элементами, равными координатам $(\tilde{\xi}_{12}, \tilde{\xi}_{21})$ этой точки; чистый выпуск $\tilde{\xi}_{10}$ равен величине горизонтального отрезка AA', а чистый выпуск $\tilde{\xi}_{20}$ — величине вертикального отрезка AA''. Легко видеть, что в таком смысле соответствие между точками рассматриваемого множества, ограниченного кривыми $\psi_1(\xi_{21})$ и $\psi_2(\xi_{12})$, и допустимыми продуктивными состояниями системы взаимно однозначно.

Рассмотрим теперь точку B на рис. 4.2. Этой точке соответствует допустимое состояние системы, в котором валовые выпуски обоих элементов являются максимально возможными в данной сети при отсутствии поставок извне. Но в то же время чистые выпуски обоих продуктов в этом состоянии равны нулю. Из сравнения состояний системы, соответствующих точкам A и B, видно, что, хотя валовые выпуски продуктов в точке A меньше, чем в точке B, тем не менее чистые выпуски обоих продуктов в точке A больше, чем в B. Таким образом, состояние системы, соответствующее точке B, заведомо «неэкономично». На рис. 4.2 заштрихованная область качественно иллюстрирует вид множества «экономичных» состояний системы, изображенной на рис. 4.1.

Заметим, что критерий «валового выпуска» заставлял бы каждого производителя предпочитать точку B точке A, тогда как критерий «прибыли» — наоборот, предпочесть «разумную» точку A точке B.

Это содержательное обсуждение понятия «экономичных» и «неэкономичных» состояний подводит нас к следующим определениям.

Определение 4.1. Технологически реализуемое состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *экономичным*, если не существует другого технологически реализуемого состояния системы $\{(y_i, x_i)\}$ с вектором чистых выпусков x_0 такого, что

$$x_0 \geqq \tilde{x}_0, \tag{1}$$

и для всех $i = 1, \ldots, N$

$$y_i \leqslant \tilde{y}_i, \tag{2}$$

$$x_i \leqq \tilde{x}_i. \tag{3}$$

Замечание 4.1. Из определения 4.1 сразу же следует, что хотя бы для одного i в соотношениях (3) должно иметь место полустрогое неравенство $\lneq$ (в противном случае состояние $\{(y_i, x_i)\}$ с учетом (1), (2) совпадало бы с $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$).

Приведем теперь несколько видоизмененную формулировку определения экономичности.

Определение 4.1′. Технологически реализуемое состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *экономичным*, если не существует такого технологически реализуемого состояния системы $\{(y_i, x_i)\}$ с вектором чистых выпусков x_0, что

$$x_0 \geqq \tilde{x}_0, \tag{4}$$

и для всех $i = 1, \ldots, N$

$$x_i \leqq \tilde{x}_i, \tag{5}$$

причем хотя бы для одного $i = i^*$

$$x_{i*} \lneq \tilde{x}_{i*}. \tag{6}$$

Для того чтобы оттенить различие понятий экономичности состояний, вводимых определениями 4.1 и 4.1′, дадим еще одно определение экономичного состояния.

Определение 4.1″. Технологически реализуемое состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *экономичным*, если не существует такого другого технологически реализуемого состояния $\{(y_i, x_i)\}$ системы с вектором чистых выпусков x_0, что

$$x_0 \geqq \tilde{x}_0, \tag{7}$$

и для всех $i = 1, \ldots, N$

$$x_i \leqq \tilde{x}_i. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 4.2. В соответствии с определением 4.1″ такое «другое» состояние $\{(y_i, x_i)\}$ должно отличаться от заданного $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ тем, что для некоторого i

$$x_i \lneq \tilde{x}_i \tag{9}$$

или для некоторого i

$$y_i > \tilde{y}_i. \tag{10}$$

З а м е ч а н и е 4.3. Непосредственное сравнение формулировок всех трех определений 4.1, 4.1′ и 4.1″ (с учетом замечаний 4.1 и 4.2) показывает, что экономичность в смысле каждого последующего определения влечет за собой экономичность в смысле предыдущего определения:

$$4.1'' \to 4.1' \to 4.1.$$

Для того чтобы были справедливы и обратные следования, нужно наложить на технологические множества элементов некоторые, впрочем, достаточно естественные предположения; достаточным для этого являются условия выпуклости и включения нуля в

G_i — предположение 1 § 2.2 относительно свойств нормального элемента. А именно, для нормального элемента справедливо следование 4.1 $\to$ 4.1″, что и доказывается в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Для системы нормальных элементов определения 4.1, 4.1′ и 4.1″ эквивалентны.*

Доказательство леммы 4.1. С учетом замечания 4.3 для доказательства леммы надо показать, что если технологически допустимое состояние системы экономично в смысле определения 4.1, то оно экономично и в смысле определения 4.1″. Предположим, что это не так, т. е. что состояние системы $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ удовлетворяет определению 4.1, однако существует такое технологически реализуемое состояние $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$, что имеют место соотношения (7), (8) и (в силу замечания 4.2) (9) или (10). Но в силу предположенной экономичности по определению 4.1 случай (9) исключен и, значит, обязательно хотя бы для одного i должно иметь место неравенство типа (10). Обозначим непустое множество индексов i, для которых выполнено (10), через V.

Определим числа α_i, $i = 1, \ldots, N$, так:

$$\alpha_i = \begin{cases} \tilde{y}_i/\approx{y}_i, & \text{если} \quad i \in V, \\ 1, & \text{если} \quad i \notin V. \end{cases} \tag{11}$$

Отметим, что для всех i

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1 \tag{12}$$

и

$$0 \leqslant \alpha_i < 1 \quad \text{при} \quad i \in V. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь состояние $\{(y_i^\alpha, x_i^\alpha)\}$ системы, образованное состояниями элементов

$$(y_i^\alpha, x_i^\alpha) = \alpha_i (\approx{y}_i, \approx{x}_i). \tag{14}$$

Из (12), (14) и выпуклости технологических множеств G_i с учетом того, что $(0, 0) \in G_i$, следует

$$(y_i^\alpha, x_i^\alpha) \in G_i,$$

т. е. состояние $\{(y_i^\alpha, x_i^\alpha)\}$ технологически реализуемо, причем в силу (12) и (14)

$$y_i^\alpha \leqslant \tilde{y}_i, \quad x_i^\alpha \leqq \tilde{x}_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Более того, как следует из (13) и из предположения 1, *е*

$$x_i^\alpha \leq \tilde{x}_i \quad \text{для} \quad i \in V, \tag{16}$$

а потому состояние $\{(y_i^\alpha, x_i^\alpha)\}$ отлично от $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$.

Учитывая, что в силу (15)

$$\alpha_j \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} = \xi_{ij}^{\alpha} \leqslant \tilde{\xi}_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, N, \tag{17}$$

для $i \in V$ из (16) получаем

$$\xi_{i0}^{\alpha} \geqslant \tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \tilde{\xi}_{ij} = \tilde{\xi}_{i0}, \tag{18}$$

а учитывая, что в силу (12)

$$\alpha_j \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, N,$$

для $i \notin V$ получаем

$$\xi_{i0}^{\alpha} = \tilde{\tilde{y}}_i - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} \geqslant \tilde{\tilde{y}}_i - \sum_{j=1}^{N} \tilde{\tilde{\xi}}_{ij} = \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0}. \tag{19}$$

Объединяя (18) и (19), получаем

$$x_0^{\alpha} \geqq \tilde{x}_0. \tag{20}$$

Соотношения (15), (16), (20) означают, что состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ не является экономичным в смысле определения 4.1, что противоречит предположению. Лемма 4.1 доказана.

Таким образом, мы можем пользоваться с равным правом любым из трех вышеприведенных определений экономичности. Имея это в виду, будем далее говорить просто об «экономичности» состояния системы нормальных элементов, не уточняя, каким из трех эквивалентных определений мы пользуемся.

С содержательной точки зрения наиболее естественно, по-видимому, определение 4.1: оно провозглашает состояние системы экономичным, если невозможно, сохранив прежние уровни всех чистых выпусков, снизить внутрипроизводственные затраты хотя бы части продуктов, не повышая никаких других затрат.

Перейдем теперь к анализу экономически реализуемых состояний с точки зрения их экономичности (а далее и эффективности в некотором смысле). При этом мы будем использовать равенство величины суммарной прибыли величине стоимости чистой продукции[1]):

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{j0}. \tag{21}$$

Действительно, в силу определений прибыли Π_i и чистого выпуска ξ_{j0} имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \xi_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{j0}.$$

[1]) Это — соотношение (37) из главы I, примененное к рассматриваемой здесь системе производственных элементов.

Это простое соотношение позволяет фактически связывать соизмерение затрат и результатов (валовых выпусков) отдельными производителями — в терминах их прибыли — с такой скалярной мерой общесистемного вектора чистых выпусков, как его «взвешенная сумма компонент» — стоимость в системе цен c.

Теорема 4.1. *Если состояние системы нормальных элементов экономически реализуемо (при некоторой системе цен и квот), то оно является экономичным состоянием.*

Доказательство теоремы 4.1. Обозначим фигурирующее в условии теоремы 4.1 состояние системы через $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, а соответствующий ему вектор чистых выпусков — через $\tilde{x}_0$. Из экономической реализуемости этого состояния следует, что для каждого i вектор $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ является решением задачи $\langle i;\ \tilde{y}_i,\ \tilde{\xi}_{ji},\ \Omega\rangle$.

Следовательно, для каждого i имеет место

$$\tilde{\Pi}_i = \gamma_i\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\tilde{\xi}_{ji} > \Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\xi_{ji} \tag{22}$$

при всех $(y_i, x_i) \in \hat{G}_i$ таких, что $(y_i, x_i) \neq (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, где

$$\hat{G}_i = \{(y_i, x_i):\ (y_i, x_i) \in G_i,\ y_i \leqslant \tilde{y}_i,\ x_i \leqq \tilde{x}_i\} \tag{23}$$

(строгое неравенство в (22) имеет место в силу единственности решения задачи $\langle i;\ \cdot\rangle$). Тогда из соотношений (21) и (22) имеем

$$\sum_{j=1}^{N}\gamma_i\tilde{\xi}_{j0} > \sum_{j=1}^{N}\gamma_j\xi_{j0}, \tag{24}$$

где

$$\xi_{i0} = y_i - \sum_{j=1}^{N}\xi_{ij}.$$

Из неравенства (24) следует: соотношение (1) из определения 4.1 не может иметь места в условиях (2), (3), что и доказывает экономичность исходного состояния системы. Теорема 4.1 доказана.

Следствие теоремы 4.1. *Всякое квазиравновесие является экономичным состоянием.*

Справедлива и следующая теорема, по существу обратная к теореме 4.1 (оговоримся, что в нижеследующей теореме 4.2 гарантируется существование лишь неотрицательных цен, точнее, полуположительного, но не строго положительного вектора цен c; но предыдущая теорема 4.1 также справедлива при любых неотрицательных [1]) ценах).

Теорема 4.2. *Если состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы экономично, то оно экономически реализуемо при некоторой системе неотрицательных цен и квот и, более того, при неотрицательности вектора*

---

[1]) Точнее, при таких, для которых справедливо предположение 1 из § 2.2 о единственности решения задачи производственного элемента.

чистых выпусков $\tilde{x}_0$ оно может быть реализовано как квазиравновесие.

Доказательство теоремы 4.2. Обозначим рассматриваемое экономичное состояние системы через $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, а вектор чистых выпусков — через $\tilde{x}_0$. Рассмотрим для каждого элемента P_i множество векторов

$$\hat{G}_i = \{(y_i, x_i)\colon (y_i, x_i) \in G_i,\ x_i \leqq \tilde{x}_i\}. \tag{25}$$

Из предполагаемой в условиях теоремы выпуклости множеств G_i, а значит и $\hat{G}_i$, и определения вектора x_0 с учетом линейности отображения $\prod_{i\in\Omega} \hat{G}_i \to \hat{H}$ следует, что множество

$$\hat{H} = \{x_0\colon (y_i, x_i) \in \hat{G}_i,\ i = 1, \ldots, N\}$$

является выпуклым. Из определения 4.1″ экономичного состояния следует, что вектор $\tilde{x}_0$ — максимальная (в векторном смысле — по Парето) точка множества $\hat{H}$. В силу известного свойства максимальных векторов в выпуклом множестве (см., например, [29], теорема 2.1) найдется полуположительный (неотрицательный ненулевой) вектор $c \geq 0$ такой, что

$$(c, x_0) \leqslant (c, \tilde{x}_0) \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \hat{H}. \tag{26}$$

Воспользовавшись соотношением (21), неравенство (26) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} \tilde{\Pi}_i, \tag{27}$$

где Π_i — прибыль элемента P_i в рассматриваемом произвольном состоянии $(y_i, x_i) \in \hat{G}_i$.

Неравенство (27) означает, что

$$\Pi_i \leqslant \tilde{\Pi}_i \quad \text{для каждого} \quad i \in \Omega,$$

так как если $\Pi_i > \tilde{\Pi}_i$ хотя бы для одного $i = i^*$, то, положив $(y_i, x_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ для всех $i \neq i^*$, мы получили бы неравенство, противоречащее (27). Совокупность доказанных неравенств означает: состояние системы $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ может быть получено в результате решения для каждого $i \in \Omega$ экстремальной задачи

$$\Pi_i = \max, \tag{28}$$
$$(y_i, x_i) \in \hat{G}_i,$$

что с учетом (25) соответствует его экономической реализуемости, а если $\tilde{x}_0 \geqq 0$, то и квазиравновесию, в котором все продукты дефицитны. Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.4. Несмотря на «взаимную обратимость» теорем 4.1 и 4.2, их утверждения в общем случае (а не только в системе нормальных элементов) имеют, так сказать, разную силу. Из доказательства теоремы 4.1 видно, что оно остается в силе без каких-либо предположений о технологических множествах элементов, в том числе без предположения выпуклости (при этом, однако, используемое определение 4.1 экономичности может не быть эквивалентным определениям 4.1′ и 4.1″). В то же время доказательство теоремы 4.2 существенно опирается на свойство выпуклости — как, впрочем, это обычно и имеет место при доказательстве существования чем-либо «замечательных» систем цен в «классических» моделях математической экономики [19].

§ 4.3. Эффективность при ограничениях в неравновесной модели

Рассмотрим теперь в полном объеме вопрос о том, что же остается от эффективности при экономической реализации состояний производственной системы, балансируемой путем введения квот. Приведем с этой целью более детальное описание экономической (как и технологической) реализуемости при ограничениях, конкретизировав соответствующие определения из гл. I применительно к системе нормальных элементов.

Пусть для каждого элемента P_i задана некоторая, вообще говоря, произвольная система квот на его затраты $\widehat{\xi}_{ji}$ и (или) на его выпуск $\widehat{y}_i$. Введем обозначение

$$\widehat{G}_i = \{(y_i,\ x_i):\ (y_i,\ x_i) \in G_i,\ y_i \leqslant \widehat{y}_i,\ \xi_{ji} \leqslant \widehat{\xi}_{ji},\ i \in \Omega\}, \qquad (29)$$

условившись, что если на некоторые затраты и (или) выпуск в действительности ограничений не наложено, то в записи (29) они отсутствуют либо, что ввиду ограниченности множества G_i то же самое, соответствующие квоты взяты достаточно большими.

Конкретизируем теперь определения технологической и экономической реализуемости при ограничениях $\widehat{G}_i$ (ср. определение 1.5 в § 1.3).

Определение 4.2. Состояние $(\widetilde{y}_i,\ \widetilde{x}_i)$ нормального элемента P_i будем называть:

технологически реализуемым при ограничениях-квотах $\widehat{\xi}_{ji}$ для некоторых j и, возможно, $\widehat{y}_i$ в (29) (для краткости, при ограничениях $\widehat{G}_i$), если $(y_i,\ x_i) \in \widehat{G}_i$;

экономически реализуемым при ограничениях-квотах $\widehat{\xi}_{ji}$ для некоторых j и, возможно, $\widehat{y}_i$ в (29) (для краткости, при ограничениях $\widehat{G}_i$), если $(\widetilde{y}_i,\ \widetilde{x}_i)$ является решением задачи

$$\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max,$$
$$(y_i,\ x_i) \in \widehat{G}_i.$$

Далее, состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы нормальных элементов будем называть *технологически реализуемым* (для краткости, *допустимым*) *при ограничениях* $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, либо называть *экономически реализуемым при ограничениях* $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, если соответствующим свойством обладает состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ каждого элемента.

Подчеркнем, что в определении экономической реализуемости состояния элементов P_i при ограничениях $\widehat{G}_i$ мы не предполагаем согласованности этого состояния. Квоты для различных элементов P_i могут налагаться на различные номенклатуры продуктов, а компоненты решения $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ отдельного элемента P_i не обязаны совпадать с соответствующими квотами. Ясно, что произвольно наложенные квоты, вообще говоря, препятствуют достижению эффективного состояния системы. К чему же будет приводить выбор состояний элементов, исходя из максимизации прибыли при, вообще говоря, произвольно заданных ценах? Не «уведет» ли такая экономическая реализация выбора состояний при ограничениях еще дальше от «эффективного» выбора?

Оказывается, что эффективность в некотором адекватно суженном смысле в этом случае сохраняется. Приведем сначала соответствующие определения.

Определение 4.3. Допустимое при ограничениях $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *эффективным при ограничениях* $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, если не существует такого допустимого при тех же ограничениях состояния системы с вектором чистых выпусков x_0, что

$$x_0 \geq \tilde{x}_0. \tag{30}$$

Замечание 4.5. Из полустрогого неравенства (30) следует, что состояние $\{(y_i, x_i)\}$ должно быть отлично от $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$.

Определение 4.4. Допустимое при ограничениях $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *строго эффективным при ограничениях* $\widehat{G}_i$, если не существует другого, допустимого при тех же ограничениях состояния системы $\{(y_i, x_i)\}$ с вектором чистых выпусков x_0 такого, что

$$x_0 \geqq \tilde{x}_0. \tag{31}$$

Замечание 4.6. Из сравнения определений 4.3 и 4.4 видно, что строго эффективное при ограничениях состояние системы всегда является «просто» эффективным при тех же ограничениях. Оказывается, однако, что для систем нормальных элементов верно и обратное: если состояние эффективно при ограничениях, то оно и строго эффективно при тех же ограничениях. Такая — заранее не очевидная — эквивалентность определений 4.3 и 4.4

для систем нормальных элементов будет установлена ниже косвенным путем, через связь понятий (строгой) эффективности при ограничениях и экономической реализуемости при ограничениях.

Теорема 4.3. *Если состояние системы нормальных элементов экономически реализуемо при ограничениях* $\widehat{G}_i$, *то оно строго эффективно при тех же ограничениях* $\widehat{G}_i$.

Доказательство теоремы 4.3 получается дословным повторением доказательства теоремы 4.1 с подстановкой вместо (23) заданных множеств $\widehat{G}_i$.

Теорема 4.4. *Если состояние системы нормальных элементов эффективно при каких-либо ограничениях* $\widehat{G}_i$, *то это же состояние экономически реализуемо с помощью некоторой системы цен* $c \geqq 0$.

Доказательство теоремы 4.4 также получается дословным повторением доказательства теоремы 4.2 с подстановкой вместо (25) заданных множеств $\widehat{G}_i$ и соответственно с трактовкой совокупности решений задач (28) как экономически реализованного состояния при данных ограничениях $\widehat{G}_i$.

Замечание 4.7. Ввиду того, что доказательства теорем 4.3 и 4.4 полностью аналогичны доказательствам теорем 4.1 и 4.2 соответственно, к ним в той же мере относится замечание 4.6 о «сравнительной силе» сферы применимости теорем. А именно, теорема 4.3 остается справедливой при любых технологических множествах элементов, а для справедливости теоремы 4.4 предположение об их выпуклости существенно.

Из теорем 4.3 и 4.4 с учетом замечания 4.7 имеем

Следствие теорем об эффективности. *В системе нормальных элементов эффективность при ограничениях и строгая эффективность при тех же ограничениях эквивалентны.*

Учитывая это утверждение, мы можем далее говорить об эффективности состояния системы нормальных элементов при данных ограничениях, одновременно подразумевая и используя тот факт, что оно строго эффективно при этих ограничениях.

Проследим теперь соотношения между понятиями и теоремами настоящего и предыдущего параграфов: в каком смысле результаты настоящего параграфа могут рассматриваться как усиление предыдущих? С этой целью прежде всего обсудим, в каком смысле понятие «эффективность при ограничениях» обобщает понятие «экономичность».

Легко увидеть из непосредственного сопоставления определений, что формулировка ситуации, фигурирующей в определении 4.1 экономичности состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, совпадает с формулировкой ситуации в определении 4.3 строгой эффективности состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ при ограничениях $\widehat{G}_i$ в том частном случае последней, когда для каждого i в качестве ограничений в $\widehat{G}_i$ (29) берутся все $\widehat{\xi}_{ji} = \widetilde{\xi}_{ji}$, $j \in \Omega$, и $\widehat{y}_i = \widetilde{y}_i$. Аналогичным образом определение 4.1″ экономичности переходит в определение 4.4 строгой эффективности при ограничениях $\widehat{\xi}_{ji} = \widetilde{\xi}_{ji}$, $i \in \Omega$,— уже без ограничений $\widehat{y}_i$. Поэтому можно сказать, что понятие экономичности есть частный случай понятия эффективности при ограничениях.

С другой стороны, справедлива следующая

Теорема 4.5. *Каждое состояние* $\{(\widetilde{y}_i, \widetilde{x}_i)\}$ *системы, эффективное при каких-либо ограничениях* $\widehat{G}_i$, *т. е. при задании некоторых квот* $\widehat{\xi}_{ji}$ *и (или)* $\widehat{y}_i$ *для некоторых* P_i, *является экономичным.*

Доказательство теоремы 4.5. Достаточно сопоставить определение 4.3 с определением 4.1 и заметить, что, положив $\widehat{\widehat{\xi}}_{ji} = \widetilde{\xi}_{ji}$ и $\widehat{\widehat{y}}_i = \widetilde{y}_i$ для всех $i, j \in \Omega$, мы лишь сузим допустимое множество состояний элементов: $\widehat{\widehat{G}}_i \subseteq \widehat{G}_i$; поэтому из несуществования вектора x_0, удовлетворяющего соотношению (30) в определении 4.3, и подавно следует несуществование вектора x_0, удовлетворяющего соотношению (1) в определении 4.1. Теорема 4.5 доказана.

Из теоремы 4.5 с учетом вышеприведенных рассуждений вытекает

Следствие теоремы 4.5. *Состояние* $\{(\widetilde{y}_i, \widetilde{x}_i)\}$ *системы нормальных элементов эффективно при каких-либо ограничениях* $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, *тогда и только тогда, когда оно экономично.*

Иначе говоря, свойство экономичности в системе нормальных элементов не слабее свойства эффективности при каких-либо ограничениях, а эквивалентно ему (в отличие от одноименных общих понятий).

Аналогичное соотношение имеет место между общим понятием экономической реализуемости и более частным по формулировке понятием экономической реализуемости состояния $\{(\widetilde{y}_i, \widetilde{x}_i)\}$ при специфических ограничениях $\widehat{\xi}_{ji} = \widetilde{\xi}_{ji}$, $i, j \in \Omega$, и, может быть, $\widehat{y}_i = \widetilde{y}_i$, $i \in \Omega$.

Теорема 4.6. *Свойство экономической реализуемости состояния* $\{(\widetilde{y}_i, \widetilde{x}_i)\}$ *системы нормальных элементов при каких-либо ограничениях* $\widehat{G}_i$, $i \in \Omega$, *эквивалентно свойству экономической реализуемости этого состояния 1) при всех ограничениях* $\widehat{\widehat{\xi}}_{ji} = \widetilde{\xi}_{ji}$, $\widehat{\widehat{y}}_i = \widetilde{y}_i$, $i, j \in \Omega$, *а также и 2) при всех ограничениях* $\widehat{\widehat{\xi}}_{ji} = \widetilde{\xi}_{ji}$, $i, j \in \Omega$, *без ограничений на* y_i.

Доказательство теоремы 4.6. Доказательство части 1) вытекает непосредственно, как и в теореме 4.5, из заведомого сужения допустимых множеств $\widehat{\widehat{G}}_i$ по сравнению с $\widehat{G}_i$, а часть 2) вытекает из экономичности, в смысле определения 4.1, данного состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ в силу теоремы 4.1 и, следовательно, из его экономической реализуемости при некоторой системе цен и при системе ограничений-квот $\tilde{\xi}_{ji}$, $i, j \in \Omega$ ((5) в определении 4.1′), в силу теоремы 4.4. Теорема 4.6 доказана.

Следствие теоремы 4.6. *Всякое состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы нормальных элементов, экономически реализуемое при каких-либо ограничениях и такое, что $\tilde{x}_0 \geqq 0$, может быть реализовано как квазиравновесие.*

Это следствие немедленно вытекает из части 2) теоремы 4.6, позволяющей реализовывать данное состояние как квазиравновесие при объявлении всех продуктов дефицитными ($I = \Omega$) и введении ограничений-квот $\hat{\xi}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}$ для всех $j \in \Omega$.

Замечание 4.8. Легко видеть, что часть 1) в утверждении теоремы 4.6 остается справедливой без каких-либо предположений о технологических множествах, тогда как часть 2) требует определенных предположений (в частности, достаточно предположений о нормальности).

Объединим все полученные ранее в этой главе результаты.

Сводка 4.1. Для произвольного допустимого состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы нормальных элементов все нижеследующие свойства эквивалентны:

экономичность (в смысле любого из определений 4.1, 4.1′, 4.1″);

эффективность при каких-либо ограничениях $\hat{G}_i$, $i \in \Omega$;

эффективность при ограничениях $x_i \leqq \tilde{x}_i$, $i \in \Omega$;

эффективность при ограничениях $x_i \leqq \tilde{x}_i$, $y_i \leqslant \tilde{y}_i$, $i \in \Omega$;

экономическая реализуемость при каких-либо ценах и каких-либо ограничениях;

экономическая реализуемость при каких-либо ценах и ограничениях $x_i \leqq \tilde{x}_i$, $i \in \Omega$;

экономическая реализуемость при каких-либо ценах и ограничениях $x_i \leqq \tilde{x}_i$, $y_i \leqslant \tilde{y}_i$, $i \in \Omega$.

Таким образом, более общий характер теорем 4.3 и 4.4 по сравнению с теоремами 4.1 и 4.2 соответственно заключается не в том, что они высказывают некоторую более сильную общую характеристику качественного свойства соответствующего состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, а в том, что они конкретизируют, при каких именно ограничениях имеет место утверждаемая в них эффективность или экономическая реализуемость. Поскольку эти ограничения-квоты, вообще говоря, более «мягки», чем ограничения-квоты $\tilde{\xi}_{ji}$ (и, быть может, $\tilde{y}_i$) для всех $i, j \in \Omega$, которые явно или неявно фигурируют в утверждениях теорем 4.1 и 4.2, то утверждения теорем 4.3 и 4.4 дают дополнительные и, возможно, более полезные сведения о свойствах конкретного состояния $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$. Пусть, например, известно, что данное состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ экономически реализуемо при «немногих» и «достаточно мягких» ограничениях

$\widehat{\xi}_{i i}$ и $\widehat{y}_i$ в $\widehat{G}_i$. Тогда теорема 4.3 гарантирует эффективность этого состояния при этих же ограничениях, что в силу естественных содержательных соображений (которые нетрудно перевести на формальный язык обычных «соображений непрерывности») означает, что состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ «мало теряет» в эффективности по сравнению с «абсолютной эффективностью» в классической ситуации без ограничений.

Распространив утверждения сводки 4.1 на все эквивалентные ситуации, перечисленные в следствии теоремы 4.6, получаем:

Сводка 4.2. Всякое состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы нормальных элементов с $\tilde{x}_0 \geqq 0$, которое экономично, или эффективно при каких-либо ограничениях или экономически реализуемо при каких-либо ограничениях-квотах, реализуемо как квазиравновесие (при некоторой системе цен).

Обратимся теперь к еще одной, более слабой по формулировке, разновидности понятия «эффективность» — эффективности производства по выпуску-затратам, или эффективности в смысле векторной максимальности вектора $(y, -x)$, определенной в общей форме в гл. I (определение 1.9 в § 1.2). Конкретизируем это определение применительно к производственному элементу рассматриваемого в этой работе вида.

Определение 4.5. Технологически реализуемое состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ элемента P_i называется *эффективным по вектору выпуска затрат*, если не существует другого технологически реализуемого состояния (y_i, x_i) такого, что выполнено хотя бы одно из двух условий

$$y_i > \tilde{y}_i, \quad x_i \leqq \tilde{x}_i,$$

или

$$y_i \geqslant \tilde{y}_i, \quad x_i \leqslant \tilde{x}_i.$$

Теорема 4.7. *Если состояние системы нормальных элементов экономично, то состояние каждого элемента эффективно по вектору выпуска-затрат.*

Доказательство теоремы 4.7. Допустим, что заданное состояние $\{(\tilde{y}_l, \tilde{x}_l)\}$ системы экономично, но существует элемент P_i, состояние которого $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ не эффективно по вектору выпуска-затрат. Сформируем новое допустимое состояние системы, взяв состояние (y_i, x_i) элемента P_i, фигурирующее в определении 4.5, и положив $(y_j, x_j) = (\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$ при $j \neq i$. Тогда, как легко видеть, получаемое состояние $\{(\tilde{y}_l, \tilde{x}_l)\}$ системы не является экономичным в смысле определения 4.1″. Это противоречие и доказывает теорему 4.7.

Теорема 4.7 утверждает, что каждое экономичное состояние системы нормальных элементов, а значит и каждое состояние системы, эффективное при ограничениях и экономически реализуемое при некоторых ограничениях, гарантирует эффективность по вектору выпуска-затрат каждого производственного элемента. Однако обратное неверно; это показывает пример двухэлементной (двухпродуктовой) системы из § 4.2. Действительно, как уже отмечалось, каждая точка на «технологической кривой» $\psi_i(y_i)$, $i=1, 2$, соответствует эффективному по выпуску-затратам состоянию элемента P_i. В частности, точка B на рис. 4.2 соответствует допустимому состоянию системы, в котором состояния обоих элементов эффективны по своим выпускам-затратам, однако состояние систем в целом даже не экономично (и не эффективно ни при каких ограничениях-квотах).

Таким образом, определения экономичности и эффективности состояний производственной системы при ограничениях-квотах адекватно отражают ту «степень эффективности», которая остается потенциально достижимой при наложении произвольных ограничений-квот на затраты и выпуски. При этом оказывается, что эта «степень эффективности» всегда экономически реализуема путем максимизации прибыли каждым производителем в отдельности при собственных ограничениях независимо от остальных. Этот результат представляет собой прямую параллель с соответствующими «классическими» результатами (воспроизведенными выше в § 1.4).

Глава V

МОДЕЛЬ РОСТА ЦЕН В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

§ 5.1. Почему может расти цена

Откроем эту главу предупреждением читателю о том, что содержащийся в ней материал несколько выпадает из общего русла данной книги как по тематике, так и по применяемому в следующих параграфах математическому аппарату. Это единственное место во всей книге, где цены на продукты не предполагаются фиксированными, а наоборот, изменяются со временем, и их изменение как раз и является предметом изучения.

Проблема формирования цен вообще и динамика движения цен в частности является одной из центральных тем экономико-математической теории. Специфика предпринятого в этой книге исследования в значительной степени заключается именно в том, что вопрос о происхождении цен здесь не обсуждается; цены считаются, вообще говоря, произвольным образом заданными и фиксированными. Появление «дефицита», «квот» и всех связанных с этим отклонений от классических «равновесных» ситуаций как раз и обусловлено допускаемой неравновесностью цен. В этой главе мы тем не менее попытаемся увидеть, каким образом могли бы изменяться цены в экономической модели, в которой назначение цен на продукты находится в руках производителей этих продуктов, стремящихся к увеличению собственной прибыли. Поскольку в ходе процесса изменения цен их «равновесность» (в классическом смысле) едва ли может быть гарантирована, то использование нашей неравновесной модели для такого анализа представляется достаточно уместным.

Установление цен в системе производителей, стремящихся к максимуму своей прибыли, изучалось формальными средствами в так называемых моделях рынка, главным образом при предположении «совершенной конкуренции» и в меньшей степени — «несовершенной конкуренции» (см., например, [33]). В моделях совершенной конкуренции явно или неявно предполагается, что каждый продукт производится и потребляется большим (теоретически — «бесконечно большим») количеством элементов рынка и что каждый элемент-производитель весьма мал («бесконечно мал») по своим объемам затрат и выпусков в сравнении с суммарными объемами соответствующих продуктов на рынке. Поэтому каждый производитель в отдельности не может своими действиями повлиять на цены, установившиеся на рынке, а вынужден подстраиваться под них; попытка его одного, скажем, продать свою продукцию хоть по сколько-нибудь более высокой цене, чем текущая рыночная, приведет к тому, что он лишится всякого спроса на свою продукцию (ввиду наличия «конкурентов», предлагающих тот же или заменяющий продукт). Устойчивой рыночной ценой при этом признается цена, уравнивающая спрос и предложение на данный продукт, и никакому элементу-производителю «в одиночку» невыгодно отклоняться от этой цены. Следствием такого анализа является классический вывод о характере зависимости равновесной цены от спроса и предложения: в частности, уменьшение (по каким-либо «внешним» причинам) спроса на некоторый продукт должно привести к снижению цены на него, что принудит производителей к снижению производства этого продукта.

Иная ситуация возникает в моделях «несовершенной конкуренции» при наличии лишь конечного (небольшого) числа производителей данного продукта и его заменителей («олигополия»), в особенности при наличии лишь одного такого производителя («монополия»). В экономической науке давно известно, что наличие монополии или олигополии приводит к повышению цен по сравнению с равновесными ценами, которые установились бы при «совершенной конкуренции»; этот факт получил название «монопольного эффекта». В имеющихся теоретических моделях монопольного эффекта (см., например, [33]) оказывается, однако, что цены всегда стабилизируются или колеблются около некоторого уровня. В отличие от этого вывода, в данной главе показывается, что при определенных предположениях рост цен может оказаться неограниченным. Это различие в выводах объясняется главным образом тем, что обычно рассматриваются модели, в которых монополии работают на некоторый внешний рынок, а мы рассматриваем системы с некоторой «структурой», когда только часть элементов непосредственно связана с внешним потребителем, а продукция остальных элементов целиком потребляется внутри системы.

Возможность формального аналитического исследования динамики неравновесных цен в «монопольной» ситуации облегчается в рамках настоящей модели тем, что несбалансированность спроса и предложения не приводит здесь к полной неопределенности состояния системы, а «преодолевается» системой квот.

Мы будем ниже изучать ситуации, возникающие в системе, когда каждый производственный элемент может изменить цену на выпускаемый им продукт таким образом, чтобы повысить свою «ожидаемую прибыль». Опишем подробнее, что такое «ожидаемая прибыль» и что может происходить при «индивидуальном» изменении цены.

Термин «ожидаемая прибыль» весьма неопределенный. Действительно, при изменении элементом цены на «свой» продукт прибыль элемента зависит не только от вариации цены, но и от изменения объема потребления данного продукта другими элементами. Кроме того, другие элементы могут сами менять цены на свой продукт в ответ на изменение цены продукции данного элемента; это в свою очередь может сказаться на прибыли рассматриваемого элемента как непосредственно, так и из-за нового объема потребления его продукта. Таким образом, при уточнении термина «ожидаемая прибыль» можно принять во внимание последствия изменения отдельным элементом цены на производимый им продукт, имеющие разную «глубину». Для учета более далеких последствий необходимо знать, как изменят цены остальные элементы системы в ответ на изменение цены данным элементом и какое состояние системы в результате установится. При этом нужно иметь не только всю информацию о характеристиках отдельных элементов, но и о «тактике поведения» каждого из них. Если предположить, что элементы не обладают всеми этими данными, а принимают решение, исходя из информации о «непосредственной» реакции остальных элементов на изменение цены данным элементом, то возникают своеобразные эффекты, изучению которых и посвящена настоящая глава.

Опишем детальнее «локальный» способ принятия решения об изменении цены на выпускаемый продукт, основанный на учете реакции лишь тех элементов, которые непосредственно потребляют данный продукт, без учета того, что это приведет к нарушению ограничений на состояние равновесия.

Дадим некоторое приращение цене этого продукта и предложим всем элементам, кроме производителя данного продукта, выбрать оптимальное для себя состояние с точки зрения максимума прибыли при прежних ценах на все продукты, кроме данного, и при новой цене на данный продукт; квоты при этом остаются прежними. В результате определим потребность в данном продукте со стороны всех остальных элементов; определим также новый спрос на него со стороны внешнего потребителя. Суммарный спрос (внешний спрос плюс спрос производственных элементов) составит ограничение сверху на производство данного продукта, т. е. квоту при новых ценах. При этой квоте на выпуск и при всех прежних квотах на потребление продуктов найдем максимальную прибыль элемента-производителя данного продукта; прибыль исчисляется при новой цене на производимый продукт и старых ценах на потребляемые продукты.

Итак, элемент подсчитывает новую ожидаемую прибыль, исходя из того, что он сам изменит цену на свою продукцию, а остальные этого не сделают. Но в то же время, учитывая изменение спроса на эту продукцию как внутри, так и вне системы, будем считать, что изменение цены «выгодно» элементу, если оно приводит к увеличению так подсчитанной ожидаемой прибыли.

Будем предполагать далее, что после каждого изменения цен система приходит в некоторое новое состояние равновесия; тем самым цены и состояния системы описывают некоторые «траектории». Траектории цен и соответствующих состояний системы во времени назовем «допустимыми», если, во-первых, в каждый момент времени состояние системы является равновесием и, во-вторых, изменение цен на продукты кажется «выгодным» (в описанном выше смысле) их производителям. Точное определение допустимой траектории приведено в следующем § 5.2.

Основной вывод из анализа допустимых траекторий в нескольких типах экономических систем состоит в следующем: имеются такие допустимые траектории, на которых цены ряда продуктов непрерывно растут, причем этот рост может сопровождаться свертыванием производства! (В силу допустимости такие траектории в каждый момент времени представляются «выгодными» элементам, хотя в действительности из-за непредвиденных ими изменений во всей системе их прибыли могут падать.) Возникающий во всех рассматриваемых примерах систем (§§ 5.2, 5.3 и 5.4) эффект бесконечного роста цен интересен тем, что в отличие от обычных экономических представлений, согласно которым падение спроса должно сопровождаться падением цен, в данном случае спрос падает на фоне роста цен как его результат, не оказывая на цены обратного «стабилизирующего» влияния.

§ 5.2. Допустимые траектории экономической системы

В этом параграфе формулируются основные гипотезы, уточняющие предполагаемую зависимость состояния экономической системы от изменения цен и от выбора производственным элементом цены на «свой» продукт.

При этом будем рассматривать лишь такие системы, которые при любом векторе цен имеют состояния, определенные ранее как состояния равновесия (§ 1.5).

Пусть в момент времени t в системе осуществлено равновесие $\{(\tilde{y}_i(t),\ \tilde{x}_i(t)\}$ при векторе цен $c(t)=(\gamma_i(t))$ с номенклатурой дефицитных продуктов $I(t)$ и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0(t)$; функция спроса на i-й продукт в момент t обозначается как $F_i^I(c(t),\ \tilde{x}_0)$.

Предположение А. В каждый момент времени t состояние $\{(\tilde{y}_i(t),\ \tilde{x}_i(t)\}$ экономической системы является равновесием с некоторым вектором цен $c(t)$, причем все указанные здесь функции времени являются кусочно-гладкими.

Это предположение означает, в частности, что переход системы из одного равновесия в другое происходит существенно быстрее, нежели изменяются цены.

Приводимое ниже предположение Б конкретизирует информацию, используемую при выборе направления изменения цен, причем при оценке «выгодности» того или иного направления изменения цены $\gamma_i(t)$ учитывается лишь характер ожидаемого изменения спроса на i-й продукт со стороны его непосредственных потребителей. Это делается в предположении, что все остальные цены γ_j, $j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N$, и состояния всех элементов, кроме непосредственных потребителей продукта i и кроме самого элемента P_i, остаются «в ближайшем будущем» — в момент $t+dt$ — неизменными.

Прежде чем сформулировать предположение Б, введем некоторые понятия. В соответствии с предположением А в каждый момент t состояние $(\tilde{y}_k(t), \tilde{x}_k(t))$ элемента P_k определяется решением локальной задачи $\langle k;\ c\rangle$ вида

$$\begin{gathered}\Pi_k(t) = \gamma_k(t)\, y_k - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j(t)\, \xi_{jk} = \max,\\ (y_k,\ x_k) \in G_k,\\ \xi_{jk} \leqslant \tilde{\xi}_{jk}, \quad j \in I(t),\end{gathered} \tag{1}$$

если $k \in I(t)$, либо задачи

$$\begin{gathered}\Pi_k(t) = \gamma_k(t)\, y_k - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j(t)\, \xi_{jk} = \max,\\ (y_k,\ x_k) \in G_k,\\ \xi_{jk} \leqslant \tilde{\xi}_{jk}, \quad j \in I(t),\\ y_k \leqslant \tilde{y}_k,\end{gathered} \tag{2}$$

если $k \notin I(t)$.

Будем в дальнейшем в этой главе (и только в ней) всегда считать, что элемент P_k, $k=1, \ldots, N$, свою продукцию не потребляет, т. е. $\tilde{\xi}_{kk}(t) \equiv 0$. (Такое требование к множеству G_k, естественно, не снижает общности рассматриваемых элементов, поскольку любое технологическое множество всегда можно преобразовать так, чтобы это требование было выполнено.)

Выделим теперь некоторый элемент P_i и проварьируем цену γ_i на i-й продукт, дав ей приращение $\delta\gamma_i$, а остальные цены γ_k, $k \neq i$, оставим без изменения. Проварьированный таким образом вектор цен будет иметь вид

$$(c,\ \delta\gamma_i) = (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{i-1},\ \gamma_i + \delta\gamma_i,\ \gamma_{i+1},\ \ldots,\ \gamma_N). \tag{3}$$

Для каждого элемента P_k, $k \neq i$, решим новую локальную задачу, отличающуюся от соответствующей исходной локальной задачи $\langle k;\ c\rangle$ вида (1) или (2) только вектором цен (3).

Обозначим эту новую локальную задачу через $\langle k;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$, а компоненту ξ_{ik} ее решения — через $\xi_{ik}(c,\ \delta\gamma_i)$. Тогда сумма

$$\bar{y}_i(c,\ \delta\gamma_i) = \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}(c,\ \delta\gamma_i) + F_i^I(c,\ \delta\gamma_i;\ \tilde{x}_0) \tag{4}$$

покажет, каков был бы спрос на i-й продукт при ценах, определяемых выражением (3), если все остальные ограничения на выбор состояния элементов P_k, $k = 1,\ \ldots,\ N$, остались неизменными[1]).

В данном выше определении локальной задачи $\langle k;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$ существенно, что индекс k не равен индексу i. В качестве задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$ рассмотрим задачу, которая определит состояние элемента P_i при векторе цен (3), спросе (4) и неизменных остальных ограничениях:

$$\Pi_i(c(t),\ \delta\gamma_i) = (\gamma_i(t) + \delta\gamma_i)\, y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j(t)\, \xi_{ji} = \max, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} (y_i,\ x_i) \in G_i, \\ \xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}(t), \qquad j \in I(t), \\ y_i \leqslant \bar{y}_i(c,\ \delta\gamma_i). \end{gathered} \tag{6}$$

Компоненту y_i решения этой экстремальной задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$ обозначим через $y_i(c,\ \delta\gamma_i)$, а оптимальное значение (5) этой задачи — через $\Pi_i(c,\ \delta\gamma_i)$.

Предположим, что существуют односторонние (по отдельности слева и справа) пределы

$$\lim_{\delta\gamma_i \to 0} \frac{y_i(c,\ \delta\gamma_i) - \tilde{y}_i}{\delta\gamma_i}, \tag{7}$$

$$\lim_{\delta\gamma_i \to 0} \frac{\Pi_i(c,\ \delta\gamma_i) - \Pi_i(c)}{\delta\gamma_i}, \tag{8}$$

где $\delta\gamma_i \to 0^-$ (левосторонний предел) либо $\delta\gamma_i \to 0^+$ (правосторонний предел). Назовем эти пределы локальными левосторонними либо правосторонними производными соответствующих величин

[1]) Напомним, что согласно сделанному выше предположению $\xi_{ik}(c,\ \delta\gamma_i) \equiv 0$ при $k = i$.

и обозначим их как

$$\frac{\delta y_i}{\delta \gamma_i} \text{ и } \frac{\delta \Pi_i(c)}{\delta \gamma_i}.$$

В дальнейшем под $\frac{\delta \Pi_i(c)}{\delta \gamma_i}$ имеется в виду правосторонний предел, если $\dot{\gamma}_i(t) > 0$, и левосторонний, если $\dot{\gamma}_i(t) < 0$, где $\dot{\gamma}_i(t) = \frac{d\gamma_i(t)}{dt}$.

Требование Б. Траектория вектора цен $c(t)$ как кусочно-гладкая функция времени t удовлетворяет для всех $i = 1, \ldots, N$ условию

$$\frac{\delta \Pi_i(c)}{\delta \gamma_i} \cdot \dot{\gamma}_i(t) \geqslant 0. \tag{9}$$

Условие (9) является условием «выгодности» изменения цены для элемента P_i в каждый момент времени, если при подсчете прибыли учитывается лишь непосредственное изменение спроса на i-й продукт, вызванное изменением цены γ_i, и не принимаются во внимание вызванные таким изменением более далекие последствия. Такими последствиями могут быть, в частности, изменения спроса, связанные с изменением потоков продуктов между элементами, цены на продукцию которых в данный момент не изменились.

Рис. 5.1.

Определение 5.1. Назовем вектор-функции времени t: $\{(\tilde{y}_i(t), \tilde{x}_i(t))\}$ и $c(t)$, удовлетворяющие предположению А, *допустимой траекторией системы*, если они удовлетворяют требованию Б.

Еще раз подчеркнем, что в дальнейшем предположение А будет считаться всегда выполненным. Поэтому, когда речь пойдет о доказательстве того, что та или иная траектория системы допустима, доказать, собственно, надо лишь то, что эта траектория удовлетворяет требованию Б.

В качестве примера допустимых траекторий системы рассмотрим следующий простой пример. Этот пример иллюстрирует также ситуацию, которая может возникнуть в экономической системе при выполнении условий (9) для изменения цен.

Рассмотрим экономическую систему, которая среди прочих включает в себя два таких элемента, что вся продукция первого — P_j потребляется вторым — P_k, и никаких других входов у P_k нет. Фрагмент такой системы показан на рис. 5.1.

Уточним такую связь между элементами P_j и P_k, считая, что для них выполняются следующие соотношения:

$$\xi_{jk} = y_j, \tag{10}$$

$$\xi_{ik} = 0, \quad i \neq j, \tag{11}$$

$$\xi_{jk} = \varphi_{jk}(y_k), \tag{12}$$

где функция $\varphi_{jk}(y_k)$ — строго выпуклая гладкая неубывающая положительная функция [1]).

Определим величину $y_{k\,\max}$ — оптимальное с точки зрения максимума прибыли Π_k количество k-го продукта. Величина $y_{k\max}$ однозначно (в силу строгой выпуклости функции $\varphi_{jk}(y_k)$) определяется ценами γ_j и γ_k из решения экстремальной задачи

$$\Pi_k = \gamma_k y_k - \gamma_j \varphi_{jk}(y_k) = \max, \tag{13}$$

так что $y_{k\,\max}$ является корнем уравнения

$$\gamma_k - \gamma_j \varphi'_{jk}(y_{k\,\max}) = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь некоторое состояние элемента P_k с выпуском $\tilde{y}_k$. Возможны два случая:

а) $\tilde{y}_k < y_{k\,\max}$, когда выпуск продукта k лимитирован либо потреблением этого продукта, т. е. k-й продукт недефицитен, либо поставкой продукта j, т. е. j-й продукт дефицитен;

б) $\tilde{y}_k = y_{k\,\max}$, когда выпуск продукта k не лимитирован.

Допустим, что $y_{k\,\max}$ — непрерывная функция γ_j. Тогда в случае а) при достаточно малой вариации $\delta\gamma_j$ цены γ_j вариация $\delta y_{k\,\max}$ мала и будет иметь место неравенство

$$\tilde{y}_k < y_{k\,\max} + \delta y_{k\,\max}. \tag{15}$$

Соотношение (15) показывает, что при такой вариации цены величина $\tilde{y}_k$ останется соответствующей компонентой решения локальной задачи $\langle k;\ c,\ \delta\gamma_j\rangle$, так же как и исходной задачи $\langle k;\ c\rangle$. Поэтому $\tilde{\xi}_{jk}(c,\ \delta\gamma_j) = \tilde{\xi}_{jk} = \varphi_{jk}(\tilde{y}_k)$. Следовательно, спрос на продукт j, равный согласно определению (3) величине $\tilde{\xi}_{jk}(c,\ \delta\gamma_j)$, останется неизменным, и, следовательно, решения экстремальных задач $\langle j;\ c\rangle$ и $\langle j;\ c,\ \delta\gamma_j\rangle$ совпадут. Поэтому

$$\frac{\delta\Pi_j}{\delta\gamma_j} = \tilde{y}_j > 0, \tag{16}$$

и траектория системы, определяемая условиями

$$\dot{\gamma}_j > 0 \text{ и } \dot{\gamma}_i = 0, \qquad i \neq j, \tag{17}$$

является локально допустимой (в данной точке t) в случае а).

Рассмотрим случай б). Поскольку

$$\Pi_k(c) = \gamma_k y_{k\,\max} - \gamma_j \varphi_{jk}(y_{k\,\max})$$

согласно (13), то, предположив, что локальная производная

---

[1]) Элемент P_k согласно (12) обладает комплектной характеристикой. Более подробно допустимые траектории в системах с такими элементами рассматриваются в следующем § 5.3.

$\frac{\delta y_{k\max}}{\delta \gamma^k}$ существует, имеем

$$\frac{\delta \Pi_k}{\delta \gamma_k} = y_{k\max} + \left(\gamma_k - \gamma_j \varphi'_{jk}(y_{k\max})\right) \cdot \frac{\delta y_{k\max}}{\delta \gamma_k}.$$

Поэтому в силу равенства (14)

$$\frac{\delta \Pi_k}{\delta \gamma_k} = y_{k\max} > 0. \tag{18}$$

Отсюда следует, что в случае б) траектория, определяемая условиями

$$\dot{\gamma}_k(t) > 0, \quad \dot{\gamma}_i(t) = 0 \text{ при всех } i \neq k, \tag{19}$$

локально допустима. Объединяя условия (17) и (19), убеждаемся в том, что в данной цепочке элементов существует локально допустимая траектория системы, на которой хотя бы одна из цен $\gamma_j(t)$ и $\gamma_k(t)$ растет, причем такой рост цены «выгоден» для элемента.

Условие а) может иметь место и в том случае, когда j-й продукт недефицитен, но спрос на k-й продукт ограничен, и поэтому элемент P_j вынужден работать «с недогрузкой». Но даже и в этом случае для такого элемента, как мы выяснили, может быть «выгодно», чтобы цена на его продукцию росла.

Анализ примера цепочки из двух элементов, проведенный выше, в действительности неполон из-за опущенной математической тонкости следующего рода. Если мы начнем рассмотрение со случая б) (либо, что неизбежно, приходим к случаю б) по траектории (17), даже начав со случая а)), то дальнейшее (локально определенное согласно (19)) движение по этой траектории, строго говоря, невозможно. В самом деле, любое сколь угодно малое увеличение цены γ_k при $\gamma_j = \text{const}$ согласно (19) привело бы к тому, что мы от случая б) вновь вернулись бы к случаю а), но тогда увеличение цены γ_j при $\gamma_k = \text{const}$ согласно (17) должно было бы затем вернуть нас к случаю б), и т. д. Такая ситуация (обычно называемая «скользящий режим») нередко встречается при рассмотрении дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и требует довольно тонких и сложных построений «обобщенных» решений. Здесь, как и далее в доказательствах теорем 5.1 и 5.2, мы уходим от таких построений, ограничившись принятием предположения А (постулирующего существование таких траекторий)[1]).

[1]) В моделях экономико-математического круга в подобных ситуациях обычно так и поступают (см., например, известную дифференциальную процедуру Эрроу — Гурвица для отыскания седловой точки, включающую разрывы в правых частях дифференциальных уравнений [17]).

Впрочем, в данном примере от этой трудности можно уйти, рассматривая, помимо (17) и (19), локальное задание траектории

$$\dot{\gamma}_k > 0, \quad \dot{\gamma}_j > 0$$

в «промежуточном» случае, когда выполнены оба условия (16) и (18) одновременно[1]). Нетрудно видеть, что таким образом можно удерживать величину $\tilde{y}_k$ отличной от величины $y_{k\max}$, хотя и близкой к ней. При этом на так определенной допустимой траектории цены γ_k и γ_j (или по крайней мере одна из них) будут возрастать неограниченно.

Рост цен может наблюдаться и для значительно более широкого класса систем, нежели те, в которых есть цепочки элементов. Примерами таких систем служат системы, изучаемые далее в этой главе.

§ 5.3. Свойства допустимых траекторий в системе, содержащей элементы с комплектным потреблением

В этом параграфе мы рассмотрим допустимые траектории экономической системы, часть объектов в которой является объектами с комплектными характеристиками. В такой системе существует такая траектория цен, что цена хотя бы одного продукта неограниченно растет с течением времени.

Рассмотрим экономическую систему из элементов $P_1, \ldots$ $\ldots, P_j, \ldots, P_N$, находящуюся в равновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$. Обозначим через S_j следующее множество индексов k элементов P_k:

$$S_j = \{k\colon\ \xi_{jk} > 0 \text{ при некотором } y_k > 0\}.$$

Таким образом, элементы P_k, $k \in S_j$,— это «непосредственные потребители» j-го продукта.

Теорема 5.1. *Пусть в системе существует такой элемент P_j, что*

1. *Функция спроса имеет вид*

$$F_j^I(c, x_0) \equiv 0. \tag{20}$$

2. *Все элементы P_k, $k \in S_j$, являются элементами с комплектными характеристиками, причем соответствующие функции $\varphi_{ik}(y_k)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, дифференцируемы*[2]) *при $y_k \geqslant 0$.*

---

[1]) Подобным же образом задаются траектории цен в доказательствах теорем в §§ 5.3, 5.4. Следует отметить, что во всех случаях указанные траектории «грубы» в том смысле, что почти вдоль каждой такой траектории цен можно указать трубку, целиком наполненную допустимыми траекториями, уходящими в бесконечность.

[2]) При этом функции φ_{ik}, как всегда, выпуклы и неотрицательны (см. гл. II, § 2.2).

3. *Для каждого $k \in S_j$ при любом векторе цен $c(t)$ и соответствующем равновесии существует правосторонняя локальная производная $\delta y_k/\delta \gamma_k$.*

Тогда существует такая допустимая траектория с вектором цен $c(t)$, что хотя бы одна из функций $\gamma_i(t)$ и $\gamma_k(t)$, $k \in S_j$, стремится к бесконечности с ростом t.

Итак, в этой теореме анализируется траектория цен в экономической системе, в которой существует элемент P_j, продукция которого вовне совсем не поставляется: j-й продукт целиком распределяется между элементами с комплектными характеристиками P_k, $k \in S_j$.

Рис. 5.2 иллюстрирует определяемое условиями теоремы взаимоотношение между элементом P_j, элементами P_k, $k \in S_j$, и остальными элементами данной системы.

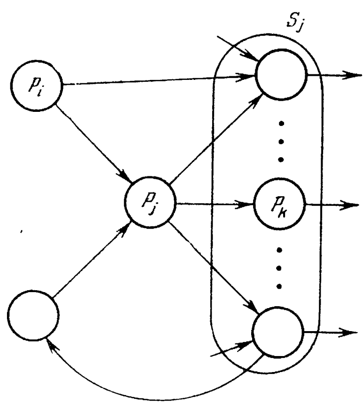


Рис. 5.2.

Доказательство теоремы 5.1. Заметим, что в силу условий 2 и 3 теоремы существуют локальные производные $\delta \Pi_k/\delta \gamma_k$ для всех $k \in S_j$; здесь и далее под локальными производными имеются в виду правосторонние локальные производные. Докажем существование $\delta \Pi_k/\delta y_k$. Поскольку элемент P_k, $k \in S_j$, по предположению является элементом с комплектной характеристикой, то его прибыль равна

$$\Pi_k = \gamma_k \tilde{y}_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi_{ik}(\tilde{y}_k). \tag{21}$$

Из соотношения (21), дифференцируемости функций $\varphi_{ik}(y_k)$ и существования локальных производных $\delta y_k/\delta \gamma_k$ имеем

$$\frac{\delta \Pi_k}{\delta \gamma_k} = \tilde{y}_k + \frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k} \cdot \frac{\delta y_k}{\delta \gamma_k} = \tilde{y}_k + \left(\gamma_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi'_{ik}(\tilde{y}_k) \right) \frac{\delta y_k}{\delta \gamma_k}, \tag{22}$$

что и доказывает существование локальных производных $\delta \Pi_k/\delta \gamma_k$, $k \in S_j$.

Определим теперь функции $\gamma_j(t)$, $\gamma_k(t)$ при $k \in S_j$ и $\gamma_i(t)$ при $i \notin (S_j \cup \{j\})$ так:

$$\dot{\gamma}_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \partial \Pi_k/\partial y_k > 0 \text{ для всех } k \in S_j, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{23}$$

$$\dot{\gamma}_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta \Pi_k/\delta \gamma_k \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{24}$$

$$\dot{\gamma}_i(t) = 0 \text{ при всех } i \notin (S_j \cup \{j\}). \tag{25}$$

Функции $\gamma_k(t)$ в соответствии с определением (24) и функции $\dot{\gamma}_i(t)$ при $i \notin (S_j \cup \{j\})$ согласно (25) очевидным образом удовлетворяют условию (9).

Покажем, что и функция $\gamma_j(t)$, характеризуемая соотношением (23), также удовлетворяет условию (9). Для этого достаточно установить, что если при всех $k \in S_j$

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k} = \gamma_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi'_{ik}(\tilde{y}_k) > 0, \tag{26}$$

то

$$\frac{\delta \Pi_j}{\delta \gamma_j} \geqslant 0. \tag{27}$$

Справедливость неравенства (27) будет установлена, если показать, что из неравенств (26) следует при достаточно малых $\delta\gamma_j > 0$ неравенство

$$\delta\xi_{jk} \geqslant 0, \quad k \in S_j. \tag{28}$$

Действительно, в силу условия 1 теоремы $F_j^I(c, \delta\gamma_j; x_0) \equiv 0$, а потому из (28) следует, что

$$\bar{y}_j(c, \delta\gamma_j) = \sum_{k \in S_j} (\tilde{\xi}_{jk} + \delta\xi_{jk}) \geqslant \sum_{k \in S_j} \tilde{\xi}_{jk} = \tilde{y}_j; \tag{29}$$

последнее равенство выполняется, поскольку состояние системы $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ — равновесие. Из (29) вытекает, что вектор $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$ допустим для задачи $\langle j;\ c, \delta\gamma_j \rangle$, а потому

$$\Pi_j(c(t), \delta\gamma_j) \geqslant (\gamma_j + \delta\gamma_j)\tilde{y}_j - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \tilde{\xi}_{ij} = \Pi_j(c) + \delta\gamma_j \tilde{y}_j.$$

Отсюда в силу определения (8) локальной производной $\delta\Pi_j/\delta\gamma_j$ имеем

$$\frac{\delta \Pi_j}{\delta \gamma_j} \geqslant \tilde{y}_j \geqslant 0,$$

из чего и вытекает неравенство (27). Итак, для доказательства того, что из (26) вытекает (27), достаточно показать, что из (26) при $\delta\gamma_j > 0$ следует (28). Но в свою очередь, поскольку функции $\varphi_{ik}(y_k)$ неубывающие, справедливость (28) будет сразу же следовать из неравенства

$$\delta y_k \geqslant 0, \tag{30}$$

где $\tilde{y}_k + \delta y_k$ — соответствующая компонента решения задачи $\langle k;\ c, \delta\gamma_j \rangle$.

Пусть соотношение (30) не имеет места и $\delta y_k < 0$. Тогда из (21) для достаточно малых $\delta\gamma_j > 0$ в силу (26) получаем $\gamma_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi'_{ik}(\tilde{y}_k) - \delta\gamma_j \varphi'_{jk}(\tilde{y}_k) > 0$. Тогда, так как $\delta y_k < 0$, имеем

$$\left(\gamma_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi'_{ik}(\tilde{y}_k)\right) \delta y_k - \delta\gamma_i \varphi_{jk}(\tilde{y}_k)\, \delta y_k < 0. \qquad (31)$$

Из (31) с помощью известного неравенства для выпуклых функций, примененного к функциям $\varphi_{ik}(y_k)$:

$$\varphi_{ik}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \varphi_{ik}(\tilde{y}_k) \geqslant \varphi'_{ik}(\tilde{y}_k)\, \delta y_k,$$

получим

$$\gamma_k \delta y_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left(\varphi_{ik}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \varphi_{ik}(\tilde{y}_k)\right) < \\ < \delta\gamma_j \left(\varphi_{jk}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \varphi_{jk}(\tilde{y}_k)\right).$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства величину $\gamma_k \tilde{y}_k$, имеем

$$\gamma_k(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi_{ik}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \delta\gamma_j \varphi_{jk}(\tilde{y}_k + \delta y_k) < \\ < \gamma_k \tilde{y}_k - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi_{ik}(\tilde{y}_k) - \delta\gamma_j \varphi_{jk}(\tilde{y}_k). \qquad (32)$$

Левая часть неравенства (32) есть значение прибыли Π_k при $\tilde{y}_k + \delta y_k$, а правая часть — значение прибыли Π_k при $\tilde{y}_k$, причем прибыль исчисляется в ценах $(c(t), \delta\gamma_j)$.

Поэтому неравенство (32) противоречит тому, что Π_k при $\tilde{y}_k + \delta y_k$ есть оптимальное значение задачи $\langle k;\ c,\ \delta\gamma_j \rangle$, а вектор $(\tilde{y}_k, \tilde{x}_k)$ лишь допустим для этой задачи. Это противоречие и доказывает справедливость (30), а вместе с ним в силу вышесказанного из (26) следует (27).

Поэтому, как отмечалось выше, условие типа (9) выполнено и для P_j. Итак, траектория цен $c(t)$, определяемая через соотношения (23)—(25), определяет допустимую траекторию системы.

Для завершения доказательств теоремы осталось показать, что хотя бы одна цена $\gamma_j(t)$ или $\gamma_k(t)$, $k \in S_j$, неограниченно возрастает. Для этого докажем, что правые части в соотношениях (23) и (24) одновременно в нуль обратиться не могут.

Пусть в момент t $\dot{\gamma}_j(t) = 0$. Это означает согласно (23), что для некоторого индекса $k^* \in S_j$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \Pi_{k^*}}{\partial y_{k^*}} = 0.$$

Для этого индекса k^* тогда из (22) при $k=k^*$ получаем (так как $\tilde{y}_{k^*}\geqslant 0$ всегда), что

$$\delta\Pi_{k^*}/\delta\gamma_{k^*}\geqslant 0$$

и, следовательно, в силу определения (24) $\dot{\gamma}_{k^*}(t)=1$. Теорема 5.1 доказана.

§ 5.4. Рост цен в модели системы с линейными элементами

В этом параграфе мы рассмотрим траектории экономической системы, состоящей из элементов, которые будем называть линейными.

Определение 5.2. *Линейным элементом* будем называть такой элемент P_i, у которого технологическое множество G_i описывается конечным числом S неравенств вида

$$\alpha_i^s y_i+\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ji}^s\xi_{ji}\leqslant\beta^s,\qquad s=1,\ldots,S,$$

причем $(0,\,0)\in G_i$.

Согласно этому определению *технологическое множество линейного элемента представляет собой многогранник с конечным числом граней*, содержащий начало координат, в $(N+1)$-мерном пространстве «выпуск — затраты».

Модель экономической системы с линейными элементами при изучении динамики цен интересна в первую очередь потому, что в отличие от элементов с комплектной характеристикой, системы из которых изучались в предыдущем параграфе, здесь технология допускает взаимозаменяемость потребляемых продуктов. Это должно было бы порождать «конкуренцию» между ними, что в свою очередь должно было бы ограничивать рост цен. Ниже, однако, показано, что так бывает не всегда.

Допустимое множество в любой локальной задаче $\langle i;\ c\rangle$ вида (1) или (2) будет также выпуклым многогранником с конечным числом граней, поскольку в такой задаче допустимое множество задается пересечением множества G_i и некоторого параллелепипеда, соответствующего ограничениям на количество потребляемых дефицитных продуктов и, если продукт i недефицитен, на количество выпускаемого продукта.

Примером такого допустимого многогранника является заштрихованное множество, изображенное на рис. 5.3.

Таким образом, задача $\langle i;\ c\rangle$ является в данном случае задачей линейного программирования.

Рассмотрим элемент P_i и множество таких векторов цен $c>0$, что хотя бы для одного равновесия $\{(\tilde{y}_i,\ \tilde{x}_i)\}$ решение соответствующей локальной задачи $\langle i;\ c\rangle$ будет не единственно, т. е. что гиперплоскость

$$\gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \gamma_i \tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \tilde{\xi}_{ji} \tag{33}$$

проходит через одно из ребер (т. е. такое ребро лежит на гиперплоскости) допустимого многогранника задачи $\langle i;\ c\rangle$. Множество векторов $c > 0$, удовлетворяющих этому условию для одного фиксированного ребра (т. е. ортогональных этому ребру), представляет собой пересечение некоторого подпространства N-мерного пространства и положительного ортанта, причем это множество не изменяется при параллельном переносе ребра. При переборе всевозможных ограничений на потребляемые и выпускаемые элементом P_i продукты различных с точностью до параллельного переноса ребер допустимых многогранников может быть лишь конечное число. Поэтому множество векторов $c > 0$ таких, что гиперплоскость (33) может пройти через одно из ребер (т. е. такое ребро лежит на гиперплоскости) допустимого многогранника хотя бы одной из задач $\langle i;\ c\rangle$, является пересечением положительного ортанта $(N+1)$-мерного пространства и множества, представляющего собой объединение конечного числа подпространств.

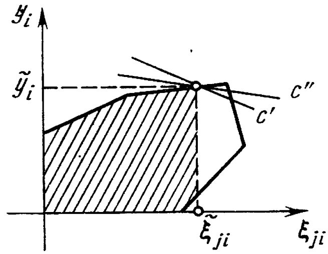


Рис. 5.3.

Обозначим такое множество-пересечение через E_i. Для него характерно следующее свойство: если вектор цен c не принадлежит E_i, то при достаточно малой вариации этого вектора решение соответствующей задачи $\langle i;\ c\rangle$, как известно из теории линейного программирования [2], не изменяется (см. рис. 5.3). Отсюда, в частности, следует, что, хотя в принципе потребляемые линейным элементом продукты взаимозаменяемые, а потому, вообще говоря, с ростом цены на один из продуктов выгодно уменьшить его потребление, заменив его другими, тем не менее при изменении цен в некоторой окрестности любого такого вектора цен c, что $c \notin E_i$ (т. е. почти для всех векторов c), линейный элемент продолжает потреблять продукты «комплектно» (ведет себя как элемент с комплектной характеристикой).

Комплектный характер потребления, имеющий место в окрестности почти любого вектора цен, позволяет установить существование расходящихся траекторий цен в допустимых траекториях системы из линейных элементов. При этом можно видеть, что, во-первых, рост цен возможен и при падении внешнего спроса, вызванного таким ростом, как об этом говорилось в § 5.1, во-вторых, допустимая траектория цен может начинаться почти в любой точке $c = c(0) > 0$ и, в-третьих, эти траектории «грубы» в следующем смысле: вдоль каждой траектории существует трубка допустимых расходящихся траекторий.

Факт существования расходящихся траекторий устанавливается в теореме 5.2, а справедливость отмеченного свойства этих траекторий можно усмотреть из доказательства этой теоремы.

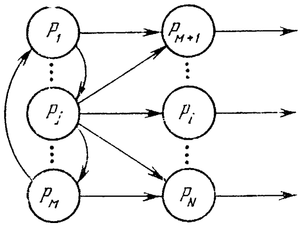


Рис. 5.4.

Далее мы рассмотрим систему, во-первых, состоящую лишь из линейных объектов и, во-вторых, такую, что все элементы могут быть разбиты на две группы следующим образом: все элементы потребляют только продукты, производимые элементами первой группы; внешний спрос удовлетворяется только продуктами, производимыми элементами второй группы. Назовем продукты, производимые элементами первой группы, производственными продуктами, а производимые элементами второй — потребительскими.

Перенумеруем элементы теперь таким образом, чтобы индексы элементов, производящих производственные продукты, изменялись от 1 до M включительно, а индексы элементов, производящих потребительские продукты,—от $M+1$ до N включительно. Тогда в соответствии с определением производственных и потребительских продуктов имеем:

1) технологическое множество любого элемента P_i, $i=1, \ldots$ $\ldots, N$, принадлежит $(M+1)$-мерному пространству векторов вида $(y_i, \xi_{1i}, \ldots, \xi_{ji}, \ldots, \xi_{Mi})$;

2) функции спроса удовлетворяют условию $F_i^I(c, x_0) \equiv 0$ для всех $i=1, \ldots, M$.

Разбиение системы на две «специализированные» группы элементов иллюстрируется рис. 5.4.

Теорема 5.2. *Пусть все элементы системы являются линейными и эти элементы могут быть разбиты на группы: производителей производственных продуктов и производителей потребительских продуктов, причем функция спроса $F_i^I(c, x_0)$ на любой потребительский продукт i является дифференцируемой функцией цены γ_i.*

Тогда существует такая допустимая траектория системы, что все компоненты вектора цен $c(t)$ не убывают и хотя бы одна компонента

$$\gamma_j(t) \to \infty \text{ при } t \to \infty \quad (j \in \{1, \ldots, N\}).$$

Доказательство теоремы 5.2. Для доказательства теоремы сначала введем несколько вспомогательных понятий — величин и множеств, затем определим множество траекторий цен, которые, как мы докажем (воспользовавшись, в частности, введенными вспомогательными понятиями), удовлетворяют утверждению теоремы 5.2.

1. Заметим, что если в некотором равновесии системы $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором выпуска вовне $\tilde{x}_0$ и вектором цен существует такой i^*-й потребительский продукт, т. е. $M+1 \leqslant i^* \leqslant N$, что $\tilde{y}_{i^*} = \tilde{\xi}_{i^*0} = F^I_{i^*}(c, \tilde{x}_0)$, то, вообще говоря, безразлично, определить ли дефицитную номенклатуру I таким образом, что $i^* \in I$, либо так, чтобы $i^* \notin I$. Под множеством I далее всегда понимается такая номенклатура продуктов, что если $i \in I$ и $M+1 \leqslant i \leqslant N$, то

$$\tilde{y}_i = \tilde{\xi}_{i0} < F^I_i(c, \tilde{x}_0). \tag{34}$$

2. Рассмотрим теперь некоторый элемент P_i, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, производящий потребительский продукт. Пусть при некотором векторе цен имеет место состояние объекта $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, соответствующее вершине допустимого многогранника локальной задачи $\langle i; c\rangle$; напомним, что допустимым многогранником задачи $\langle i; c\rangle$ является исходный многогранник G_i с дополнительными гранями, соответствующими ограничениям на количество потребляемых дефицитных продуктов и, если $i \notin I$, на количество выпускаемого продукта. Выделим все такие ребра допустимого многогранника, исходящие из этой вершины $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, вдоль которых величина y_i убывает. Пусть число таких граней равно k_i. Так как, согласно определению линейного элемента, множество G_i, а следовательно и допустимый многогранник, содержит начало координат, то $k_i > 0$. В то же время этот допустимый многогранник является подмножеством $(M+1)$-мерного пространства. Поэтому орты, направленные вдоль выделенных ребер «убывания y», можно обозначить через

$$e_{ik} = (\zeta_{ik}, \zeta_{1k}, \ldots, \zeta_{Mk}), \qquad k = 1, \ldots, k_i, \tag{35}$$

где ζ_{ik} соответствует координате y_i, а ζ_{jk}, $j = 1, \ldots, M$, — координатам ξ_{jk}. Поэтому

$$\zeta_{ik} < 0. \tag{36}$$

Поскольку состояние элемента по определению есть решение задачи $\langle i; c\rangle$, то вдоль ортов (35) значение Π_i не возрастает; поэтому

$$\gamma_i\zeta_{ik} - \sum_{j=1}^{M} \gamma_j\zeta_{jk} \leqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, k_i. \tag{37}$$

Выберем теперь такой орт e_{ik^*}, что

$$\varepsilon_i \equiv \frac{1}{\zeta_{ik^*}}\left(\gamma_i\zeta_{ik^*} - \sum_{j=1}^{M} \gamma_j\zeta_{jk^*}\right) = \min_k \frac{1}{\zeta_{ik}}\left(\gamma_i\zeta_{ik} - \sum_{j=1} \gamma_j\zeta_{jk}\right); \tag{38}$$

в силу (36) и (37)

$$\varepsilon_i \geqslant 0. \tag{39}$$

3. Рассмотрим M-мерное пространство, соответствующее подвектору $c_M = (\gamma_1, \ldots, \gamma_M)$ вектора цен c. Для каждого P_j, $1 \leqslant j \leqslant M$, возьмем такие векторы c_M, что гиперплоскость

$$\gamma_j y_j - \sum_{k=1}^{M} \gamma_k \tilde{\xi}_{kj} = \gamma_j \tilde{y}_j - \sum_{k=1}^{M} \gamma_k \tilde{\tilde{\xi}}_{ki} \tag{40}$$

проходит через одно из ребер допустимого многогранника, где $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ — произвольное равновесие системы; так выбранный вектор c_M обладает тем свойством, что при нем хотя бы для одного равновесия решение соответствующей задачи $\langle i;\ c\rangle$ не единственно.

Множество векторов c_M, удовлетворяющих (40) для одного ребра, представляет собой подпространство M-мерного пространства, причем при параллельном переносе ребра это подпространство не меняется. Так как при переборе всевозможных локальных задач $\langle j;\ c\rangle$ различных с точностью до параллельного переноса ребер допустимых многогранников может быть лишь конечное число, то множество векторов c_M таких, что гиперплоскость (40) может пройти через одно из ребер одного из допустимых многогранников, является объединением конечного числа подпространств M-мерного пространства. Обозначим это множество подвекторов цен через E_j.

Аналогичное множество E_i для элементов P_i, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, производящих потребительские продукты, определим иначе. Рассмотрим всевозможные допустимые многогранники задач $\langle i;\ c\rangle$, соответствующие разным векторам c и различным равновесиям системы. Как отмечалось выше, эти многогранники расположены в $(M+1)$-мерном пространстве. Спроектируем теперь множество допустимых многогранников на M-мерное пространство с осями $(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{Mi})$. В качестве множества E_i, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, возьмем множество векторов c_M таких, что гиперплоскость

$$\sum_{k=1}^{M} \gamma_k \xi_{ki} = \sum_{k=1}^{M} \gamma_k \tilde{\tilde{\xi}}_{ki} \tag{41}$$

параллельна хотя бы одному из ребер одного из спроектированных многогранников. Очевидно, что множество E_i в данном случае есть также объединение конечного числа подпространств M-мерного пространства.

Используем доопределенное множество I, введенные величины ε_i и множества E_i, $i = 1, \ldots, N$, для формирования траектории цен $c(t)$. Будем говорить, что элемент P_i, где $M+1 \leqslant i \leqslant N$, в равновесии $\{(y_i, x_i)\}$ с вектором чистых выпусков x_0 и вектором цен c удовлетворяет

условию I, если

1) $\qquad i \in I,$

или

2) $$\frac{\partial F_i^I(c, x_0)}{\partial \gamma_i} \geqslant 0,$$

или

3) $$\varepsilon_i \leqslant -\frac{y_i}{2\,\dfrac{\partial F_i^I(c, x_0)}{\partial \gamma_i}};$$

условию II, если

$$i \in I \quad \text{или} \quad \varepsilon_i = 0.$$

Теперь определим вектор $c(t)$ следующим образом. Для i таких, что $M + 1 \leqslant i \leqslant N$, положим

$$\dot{\gamma}_i(t) = \begin{cases} \gamma_i(t), & \text{если } P_i \text{ удовлетворяет условию I,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{42}$$

а для j таких, что $1 \leqslant j \leqslant M$,

$$\dot{\gamma}_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы для одного } i,\ M + 1 \leqslant i \leqslant N, \\ & \text{имеет место условие II,} \\ \gamma_j(t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{43}$$

В качестве вектора $c(0)$ можно рассматривать любой вектор, удовлетворяющий условиям

$$c_M(0) \notin \bigcup_{i=1}^{N} E_i, \quad c(0) > 0. \tag{44}$$

В силу определения (43) вектор $c_M(t)$ лежит на луче, проходящем через начало координат и точку $c_M(0)$, удовлетворяющую (44); поэтому в любой момент времени $t \geqslant 0$

$$c_M(t) \notin \bigcup_{i=1}^{N} E_i. \tag{45}$$

Чтобы доказать теорему, необходимо установить два факта: 1) траектория $c(t)$, определяемая соотношениями (42) — (44), допустима, т. е. удовлетворяет условию (9), и 2) вдоль этой траектории хотя бы для одного i $\gamma_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Установим сначала первый факт. Поскольку в силу (42)—(44) $\dot{\gamma}_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то для доказательства (9) достаточно установить, как это и делается ниже, что

$$\delta\Pi_i/\delta\gamma_i \geqslant 0 \tag{46}$$

в тех случаях, когда $\dot{\gamma}_i(t) = \gamma_i(t)$, а не $\dot{\gamma}_i = 0$ — см. (42) и (43).

Докажем сначала, что (46) выполнено при выполнении (42). С этой целью рассмотрим элемент P_i, $M + 1 \leqslant i \leqslant N$, производя-

0 *

щий потребительский продукт и находящийся в состоянии $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$. По определению прибыли Π_i, вариация $\delta\Pi_i$ равна

$$\delta\Pi_i = \gamma_i \delta y_i - \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \delta\xi_{ji} + \delta\gamma_i \tilde{y}_i. \tag{47}$$

Рассмотрим порознь различные случаи, при которых выполнено условие I.

1) Если $i \in I$, то имеет место соотношение (34); в силу дифференцируемости функции $F_i^I(c, x_0)$ по γ_i тогда получаем, что $\delta\gamma_i > 0$ и имеют место равенства

$$\delta y_i = \delta\xi_{ji} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{48}$$

Подставив (48) в левую часть (47), получаем

$$\delta\Pi_i = \delta\gamma_i \tilde{y}_i. \tag{49}$$

Таким образом, если $i \in I$, то из (49) имеем соотношение

$$\frac{\delta\Pi_i}{\delta\gamma_i} = \tilde{y}_i \geqslant 0,$$

доказывающее выполнение (46).

Пусть теперь $i \notin I$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$. В этом случае при вариации $\delta\gamma_i$ цены γ_i решение локальной задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$ в силу (2) и (4) будет определяться новым ограничением на количество выпускаемого продукта i:

$$\bar{y}_i \leqslant F_i^I + \frac{\partial F_i^I}{\partial\gamma_i}\delta\gamma_i. \tag{50}$$

2) Если $\partial F_i^I/\partial\gamma_i \geqslant 0$, то при $\delta\gamma_i > 0$ состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ остается допустимым для задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$ и поэтому в силу (47) $\delta\Pi_i/\delta\gamma_i \geqslant \geqslant \tilde{y}_i \geqslant 0$. Таким образом, и в этом случае условие (46), а вместе с ним и (9), выполнено.

3) По-прежнему $i \notin I$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$. Тогда из соотношений $\partial F_i^I/\partial\gamma_i < 0$ и $\delta\gamma_i > 0$ следует, что в этом случае состояние $(\tilde{y}_i + \delta y_i,\ \tilde{x}_i + \delta x_i)$, являющееся решением задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i\rangle$, очевидно, определяется из решения задачи

$$\delta\Pi_i = \max, \tag{51}$$

$$\delta y_i \leqslant \frac{\partial F_i^I}{\partial\gamma_i}\delta\gamma_i \tag{52}$$

при дополнительном условии: вектор $(\tilde{y}_i + \delta y_i,\ \tilde{x}_i + \delta x_i)$ принадлежит допустимому многограннику задачи $\langle i;\ c\rangle$. Задача максимизации величины (51) при условии (52) эквивалентна в силу

(47) задаче

$$\gamma_i \delta y_i - \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \delta \xi_{ji} = \max, \tag{53}$$

$$\delta y_i = \frac{\partial F_i^I}{\partial \gamma_i} \delta \gamma_i, \tag{54}$$

при том же дополнительном условии (в условии (54) учтено, что решение задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i \rangle$ вида (5) — возрастающая функция ограничения $\bar{y}_i$ по крайней мере на отрезке $\left[0,\ F_i^I\left(c, \tilde{x}_0\right)\right]$, а потому соотношение (52) будет выполняться как равенство).

По определению (38) орта e_{ik*}, решение этой задачи есть точка, смещенная от вершины $(\tilde{y}_i,\ \tilde{x}_i)$ вдоль орта e_{ik*} на такое расстояние, что имеет место равенство (54). Здесь уместно отметить следующее: вообще говоря, могло оказаться, что существует несколько векторов e_{ik}, удовлетворяющих определению (38). В этом случае решение задачи (53), (54) на допустимом многограннике задачи $\langle i;\ c \rangle$ было бы не единственным. Однако, если вектор $c(t)$ в любой момент времени t удовлетворяет (45), этого быть не может.

Таким образом, вектор $(\delta y_i,\ \delta x_i)$ определяется соотношением

$$(\delta y_i,\ \delta x_i) = \frac{\partial F_i^I}{\partial \gamma_i} \cdot \delta \gamma_i \cdot e_{ik*} \zeta_{ik*}. \tag{55}$$

Подставим теперь вектор (55) в (47) и воспользуемся определением (38) числа ε_i. Получим

$$\delta \Pi_i = \varepsilon_i \frac{\partial F_i^I}{\partial \gamma_i} \delta \gamma_i + \tilde{y}_i \delta \gamma_i$$

или

$$\frac{\delta \Pi_i}{\delta \gamma_i} = \varepsilon_i \frac{\partial F_i^I}{\partial \gamma_i} + \tilde{y}_i. \tag{56}$$

Согласно условию 3) $\varepsilon_i \leqslant -\dfrac{\tilde{y}_i}{2 \partial F_i^I / \partial \gamma_i}$, поэтому из (56) следует выполнение соотношения (46), которое и устанавливает выполнение условия (9). Таким образом, показано, что в любом случае для $\gamma_i(t)$ из (42) имеет место (9).

Покажем теперь, что $\gamma_j(t)$, определяемые условиями (43) и (44), $1 \leqslant j \leqslant M$, удовлетворяют (9). Рассмотрим некоторый элемент P_j, $j = 1, \ldots, M$, производящий производственный продукт. Докажем, что во всех случаях, когда $\dot{\gamma}_j > 0$, имеет место (46). С этой целью докажем, что во всех случаях, когда $\dot{\gamma}_j > 0$,

$$\delta \xi_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{57}$$

Если (57) будет доказано, то тем самым будет доказано, что при $\gamma_j > 0$ в силу (42) $\frac{\delta \Pi_j}{\delta \gamma_j} = \tilde{y}_j \geqslant 0$, т. е. условие (46) выполнено. Доказательство (57) проведем отдельно для $i = 1, 2, \ldots, M$ и для $i = M + 1, \ldots, N$; при этом, в соответствии с (43), доказательство соотношения (57) для $i = M + 1, \ldots, N$ следует проводить лишь для случая, когда (см. условие II) для всех $i = M + 1, \ldots, N$ одновременно имеют место условия

$$i \notin I \tag{58}$$

и

$$\varepsilon_i > 0. \tag{59}$$

Докажем сначала (57) для $i = 1, \ldots, M$. Так как в силу (45) $c_M(t) \notin \bigcup_{i=1}^{M} E_i$, то в каждой локальной задаче $\langle i;\ c \rangle$, $i = 1, \ldots, M$, гиперплоскость (40) не проходит через какое-либо ребро допустимого многогранника этой задачи. Это в свою очередь означает, что при малых вариациях вектора $c_M(t)$ решение задачи $\langle i;\ c,\ \delta\gamma_i \rangle$ совпадает с решением задачи $\langle i;\ c \rangle$, т. е.

$$\delta \xi_{ji} = 0, \quad j = 1, \ldots, M. \tag{60}$$

Таким образом, (57) для $i = 1, \ldots, M$ доказано.

Докажем теперь (57) для $i = M + 1, \ldots, N$ при выполнении (58) и (59). С этой целью рассмотрим некоторый элемент P_i, $i = M + 1, \ldots, N$, находящийся в состоянии $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, и покажем, что при выполнении (58) и (59) гиперплоскость

$$\gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \xi_{ji} = \gamma_i \tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \tilde{\xi}_{ji} \tag{61}$$

не проходит ни через одно из ребер допустимого многогранника задачи $\langle i;\ c \rangle$. Из этого тогда сразу же будет следовать (57), а вместе с ним и первый факт, который нам надо было установить.

Вообще говоря, из вершины допустимого многогранника задачи $\langle i;\ c \rangle$, соответствующей состоянию $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, могут исходить три типа ребер:

1) ребра, вдоль которых y_i растет;

2) ребра, вдоль которых

$$y_i = \tilde{y}_i, \tag{62}$$

3) ребра, вдоль которых y_i уменьшается.

Поскольку имеет место (58), то задача $\langle i;\ c \rangle$ включает ограничение вида $y_i \leqslant \tilde{y}_i$ и, следовательно, ребра типа 1) в этом случае отсутствуют.

По определению множества E_i, гиперплоскость (61) не может проходить через ребро допустимого многогранника задачи $\langle i;\ c \rangle$, определяемое условием (62). Действительно, если бы это было так, то в силу (60) вдоль этого ребра имело бы место соотношение

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \tilde{\xi}_{ji}, \tag{63}$$

которое означает, что вектор $c_M(t)$ проходит вдоль многогранника, полученного проектированием исходного допустимого многогранника на M-мерное подпространство $(\xi_{1i}, \ldots, \xi_{Mi})$. Поэтому (63) противоречит (45). Итак, гиперплоскость (61) не проходит через ребро типа 2). Гиперплоскость (61) не может проходить также через ребро типа 3), так как это означало бы, что $\varepsilon_i = 0$, но это противоречит условию (59). Первый факт установлен.

Докажем справедливость второго факта. С одной стороны, из соотношений (42) и (43) следует, что хотя бы для одного $i \in \Omega$ в любой момент времени обязательно выполняется равенство $\dot{\gamma}_i = \gamma_i(t)$, так как если для некоторого i, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, выполнено условие II (и в этом случае $\dot{\gamma}_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant M$, согласно (43)), то обязательно выполнено условие I. Действительно, если i даже не принадлежит I и одновременно $\dfrac{\partial F_i^I}{\partial \gamma_i} < 0$, то

$$-\frac{\tilde{y}_i}{2\dfrac{\partial F_i^I(c, \tilde{x}_0)}{\partial \gamma_i}} \geqslant 0,$$

поскольку $\tilde{y}_i \geqslant 0$. В то же время $\varepsilon_i = 0$ в соответствии с условием II и, следовательно,

$$-\frac{\tilde{y}_i}{2\dfrac{\partial F_i^I(c, \tilde{x}_0)}{\partial \gamma_i}} \geqslant \varepsilon,$$

что и доказывает выполнение условия I. С другой стороны, из (44) следует, что $\gamma_i(0) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Второй факт доказан. Теорема 5.2 доказана полностью.

Часть II

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМОСТИ В НЕРАВНОВЕСНЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава VI

НАПРАВЛЕННЫЕ ВАРИАЦИИ СОСТОЯНИЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 6.1. Улучшаемые и неулучшаемые состояния экономической системы и проблема «узких мест»

В первой части книги было построено общее описание модели экономической системы, функционирующей в условиях «неравновесия» в классическом смысле этого термина. Было введено новое понятие равновесия (или квазиравновесия) как согласованного состояния, поддерживаемого совместным действием механизмов цен и натуральных ограничений-квот. Такое согласованное состояние характеризуется дополнительными «неклассическими» параметрами: номенклатурой дефицитных и недефицитных продуктов и квотами на затраты первых и выпуски вторых. Наличие этих в значительной степени произвольных параметров порождает существенную неединственность возможных согласованных состояний экономической системы даже при фиксированных ценах, неизменных технологических возможностях производителей и тех же самых характеристиках потребителя. Вторая часть книги, открываемая этой главой, посвящена сравнительному изучению различных согласованных состояний в такой модели и анализу возможностей целенаправленного управления ими.

Следуя подходу к модели экономики как к системе в значительной степени автономных, самоуправляемых элементов, мы будем понимать под управлением в такой модели целенаправленное изменение экономических параметров, в результате реакции элементов на которое система переходит в новое согласованное состояние.

Разумеется, для конкретной постановки задач управления требуется уточнить три аспекта: 1) каковы цели управления, т. е. какие изменения состояния системы желательны; 2) какими средствами управления можно пользоваться, т. е. какие параметры и каким образом допускается изменять и что при этом считается известным об управляемой системе; 3) как осуществляется процедура управления, т. е. как собирается и обрабатывается информация, какие решения принимаются и как они осуществляются. Обсудим последовательно эти три аспекта так, как они будут трактоваться далее.

1. *Цели управления.* Наличие множества возможных согласованных состояний экономической системы ставит вопрос о сравнении их между собой в смысле «лучше — хуже» с некоторой точки зрения. Основания для сравнения могут быть различными, в частности, в зависимости от того, рассматривается ли система как чисто производственная или в модели явно фигурирует потребитель (и как он при этом описывается), предусматривается ли возможность собственных целей и интересов у «управляющего органа» или его роль сводится к реализации «внутренних» целей системы и т. п. Мы почти всюду в этой работе используем для сравнения состояний системы показатель «конечной продукции» — вектор чистых выпусков производственной системы; он же является одновременно вектором потребляемых продуктов, если рассматривается равновесие в замкнутой системе с потребителем. Векторный характер этого показателя требует дальнейшей конкретизации того, какие значения (и изменения) такого вектора считаются предпочтительными (или удовлетворительными) и тем самым какие изменения состояния системы признаются желательными.

Однако вне зависимости от того, как конкретизировано сравнение состояний в смысле «лучше — хуже», и даже от того, любые ли два состояния сравнимы в этом смысле, при таком подходе считается принципиально возможным высказать о каждом состоянии одно из двух суждений:

а) для данного состояния существует иное, лучшее состояние, т. е. возможно «улучшающее» изменение данного состояния, либо

б) не существует состояния, лучшего чем данное, т. е. «улучшающее» изменение невозможно.

В последнем случае рассматриваемое состояние можно квалифицировать как «неулучшаемое» («эффективное», «оптимальное» в некотором смысле), а перевод системы в такое состояние можно принять за конечную цель управления. «Текущее» управление системой тогда должно заключаться в анализе того, является ли данное «текущее» состояние системы а) улучшаемым либо б) неулучшаемым, и, далее, в случае а) — в отыскании и реализации «улучшающего» изменения. В случае б) можно ограничиться констатацией факта неулучшаемости данного состояния, но можно и продолжить анализ «причин» неулучшаемости — например, имея в виду отыскание дополнительных средств управления.

Далее в этой книге показатель «вектор чистых выпусков» будет рассматриваться как базовый, а конкретные определения улучшающих изменений и неулучшаемых (эффективных) состояний (гл. X) будут допускать определенную сопоставимость компонент этого вектора. Говоря содержательно, мы будем в частных моделях считать возможными суждения типа «увеличение чистого выпуска данного продукта компенсирует уменьшение чистого выпуска другого, «менее полезного» (менее важного) продукта». Но наиболее общей основой для суждений о состояниях для нас всюду будет простое представление о продуктах как о «полезных», в связи с чем центральную роль будут играть «безусловно улучшающие» изменения состояний — такие, при которых чистый выпуск данного продукта (или нескольких данных продуктов) растет, а выпуск остальных, во всяком случае, не падает. Далее такое изменение вектора чистых выпусков будем называть монотонным увеличением; достижение монотонного увеличения чистых выпусков часто будет рассматриваться как «текущая» (промежуточная), а иногда — как конечная цель управления. Наряду с этим будут также рассматриваться и такие изменения состояний, при которых увеличение одних чистых выпусков достигается ценой уменьшения других; в этом случае будем говорить о немонотонных изменениях чистых выпусков. Такие изменения иногда также будут рассматриваться как цель управления.

2. *Средства управления.* Как уже говорилось выше, мы рассматриваем такие модели экономических систем, в которых все участники наделены определенной степенью самостоятельности. Они характеризуются собственными целями и (или) правилами «поведения» в рамках тех внешних условий (ограничений), которые создает для них текущая экономическая ситуация. Поэтому в такой модели невозможно просто «предписать» элементам те или иные состояния, но можно лишь способствовать их переходу в определенные состояния, изменяя «внешние» по отношению к элементам параметры. В неравновесных моделях экономики рассматриваемого здесь типа к таким непосредственно регулируемым параметрам относятся ограничения-квоты на затраты дефицитных и выпуск недефицитных продуктов, а также, быть может, само разбиение номенклатуры всех продуктов на дефицитную и недефицитную. Этим и исчерпывается арсенал средств воздействия на систему, которыми мы считаем допустимым пользоваться при анализе возможностей управления в такой системе. Цены, установленные в системе, а также технологические возможности производителей и внутренние характеристики потребительского выбора при этом рассматриваются как неизменные. (Другое дело, что анализ может показывать недостаточность вышеуказанных средств управления и одновременно указывать на те дополнительные средства, которые можно было бы привлечь для желаемого изменения состояния системы.) Отметим также, что указанные средства обеспечивают воздействие главным образом на производство продуктов и лишь отчасти (и косвенно) — на потребление; впрочем, это согласуется с тем ведущим местом,

которое занимает анализ производственной подсистемы в этой книге.

Итак, в качестве допустимых («экономически реализуемых») изменений в модели рассматриваются такие изменения состояний элементов, которые являются их «самостоятельными» реакциями на изменения квот и, возможно, номенклатуры дефицитных и недефицитных продуктов. Реакция производственного элемента заключается в переходе его в состояние, максимизирующее прибыль при новых ограничениях; реакция потребителя — в новом выборе. Подчеркнем, что мы рассматриваем только согласованные состояния экономической системы: равновесия или квазиравновесия, так что при анализе возможностей изменения состояния следует заботиться о том, чтобы предполагаемое новое состояние системы было согласованным, и это налагает дополнительные требования на выбор и использование средств управления.

Говоря о средствах управления, важно наряду со средствами воздействия на систему указать, каковы при этом доступные «средства наблюдения», т. е. какие сведения о системе и ее элементах могут использоваться при выработке управляющих воздействий. Выбор средств наблюдения, как и средств воздействия, зависит от постановки задачи. При теоретическом анализе всех потенциально возможных состояний системы мы вправе считать точно известными все «внутренние» характеристики ее элементов: технологические множества производителей и, например, потребительскую функцию полезности. Однако при анализе возможностей управления такой системой представляется более интересным с содержательной точки зрения опираться на знание лишь некоторых «внешних» характеристик элементов. Ими могут быть реализуемые текущие состояния элементов и некоторые по преимуществу «качественные» сведения об их возможных реакциях на изменения внешней ситуации: направления (знаки) изменения затрат и выпусков при снятии (ослаблении) ограничений или даже просто сам факт «выгодности» или «невыгодности» наращивания производства и т. п. При этом предполагается, что каждый элемент-участник системы сам в достаточной мере осведомлен о своих «внутренних» характеристиках и принимает решения, исходя из собственных интересов, а исследователь (или управляющий орган) должен ограничиться лишь теми средствами наблюдения и воздействия, которые не противоречат этому. Подобный взгляд на управление экономической системой обычен при так называемом блочно-декомпозиционном подходе (см., например, [31, 34]).

Изменения состояния экономической системы, производимые путем допустимых воздействий на параметры состояния, учитывающие собственное поведение и наблюдаемые реакции элементов системы и преследующие определенные цели управления, будем называть направленными вариациями состояний. Далее будут рассматриваться направленные вариации квазиравновесий в производственной системе, направленные вариации сбалансированного потребительского выбора и, наконец, «синтетические» направленные вариации равновесия в замкнутой (производственно-потребительской) экономической системе.

3. *Процедура управления.* Будем различать два этапа или две фазы управления экономической системой: анализ возможностей перевода системы из исходного (текущего) состояния в некоторое лучшее состояние, а затем конструктивная реализация такого перевода, если он оказался возможным. Можно сказать, что первая фаза — это анализ управляемости, а вторая — собственно управление. В нашем исследовании неравновесных моделей экономических систем мы будем заниматься почти исключительно первой, аналитической фазой управления, имея в виду, что этот анализ создает теоретические предпосылки для второй, конструктивной фазы.

При анализе управляемости в рассматриваемых моделях экономики мы должны, преследуя цели управления, в то же время считаться с той ограниченностью средств воздействия и наблюдения, о которой говорилось выше. По этой причине за рамками нашего исследования остаются любые постановки расчетных, оптимизационных и тому подобных задач, которые предполагают доступность всех требуемых количественных данных о системе и о ее элементах и подразумевают безусловную последующую осуществимость составленного плана. Мы не можем рассчитывать на полную осведомленность, например, о технологических возможностях отдельных производителей, а с другой стороны, не можем «навязывать» им такие состояния, которые нежелательны (невыгодны) с их точки зрения при сложившихся внешних условиях. Поэтому предполагаемые процедуры управления должны, в духе уже упоминавшегося «блочного» подхода, предусматривать такие изменения состояний, которые, с одной стороны, оправданы «наблюдаемыми» данными об исходных состояниях, а с другой, окажутся «экономически реализуемыми». Экономическая реализуемость здесь означает, что предполагаемые новые состояния должны быть согласованы как с поведением производителей (максимизирующих прибыль в новых условиях), так и с потребительским выбором.

Еще более сужая рамки нашего исследования, мы намеренно ограничимся лишь достаточно «грубыми», «качественными» методами анализа управляемости. К таким методам можно отнести анализ всевозможных качественных откликов элементов системы на те или иные пробные воздействия, что часто можно интерпретировать как некоторый специально организованный «опрос» элементов либо даже, еще проще, как изучение непосредственно наблюдаемых «внешних проявлений» существующей экономической ситуации. Например, уже само разбиение номенклатуры продуктов на дефицитную и недефицитную в согласованном состоянии системы дает определенные сведения о каждом производственном элементе: производитель недефицитной продукции заведомо заинтересован в расширении своего производства (он сдерживается лишь ограничением-квотой на свой выпуск), а производителю дефицитной продукции при существующих ограничениях-квотах на поставки ему (части) продуктов расширять свое производство невыгодно. Далее, можно «опросить» различных производителей дефицитных продуктов о том, станет ли им выгодно увеличить свои выпуски при снятии (ослаблении) квот на поставки им тех или иных продуктов на определенных условиях. Получив результаты такого опроса, можно пытаться сформировать группу участников-производителей, которая включала бы производителей интересующих нас продуктов и их поставщиков и оказалась бы способной обеспечить технологически возможное и экономически взаимовыгодное совместное расширение производства. Подчеркнем, что судить о технологической и экономической реализуемости такого расширения мы при таком анализе можем лишь по косвенным, «качественным» сведениям, полученным из опросов и наблюдений. Далее, если при этом в модели явным образом учитывается потребитель, то необходимо считаться с тем, «захочет» ли он приобрести дополнительно производимую продукцию — об этом при анализе мы можем судить также лишь по «наблюдаемым» данным о наличии или отсутствии неудовлетворенного спроса на те или иные продукты.

Это пояснение иллюстрирует характер тех направленных вариаций состояний системы, которые рассматриваются при анализе управляемости; они должны носить «качественный» характер, соответствующий содержательным ограничениям на допустимые средства управления. При этом такие вариации должны, как правило, быть «общесистемными», т. е. предусматривать одновременные согласованные (или компенсирующие) изменения состояний различных элементов системы.

Таковы качественные методы, которые мы будем использовать и интерпретировать как первую, «аналитическую» фазу процедуры управления экономической системой.

Что можно сказать о второй, «конструктивной» фазе такой процедуры?

Ограничимся лишь несколькими замечаниями на этот счет, поскольку нигде в дальнейшем эта фаза рассматриваться не будет. По этой же причине мы можем не уточнять здесь даже того, каков самый общий вид процесса реализации тех изменений, возможность которых была установлена на этапе анализа: будут ли участники системы «непосредственно договариваться» между собой о проведении этих изменений либо же имеется в виду участие некоторого посредника-координатора или «управляющего органа». Пусть, например, еще на этапе анализа управляемости производственной системы установлена принципиальная возможность согласованного расширения производства у некоторой подгруппы элементов-производителей. Это означает, что можно так скоординировать (согласовать) уровни роста производства у отдельных участников, что рост производственных затрат некоторых продуктов при этом заведомо покроется ростом выпусков этих продуктов в данной подгруппе (утверждения такого рода будут рассматриваться далее неоднократно). Реальное осуществление такой координации может быть различным. Например, она может быть обеспечена предварительной итеративной процедурой достаточно экономного обмена информацией между производителями — процедурой взаимного размещения дополнительных заказов на требуемые продукты (процедура «перезаказывания»[1]) [2]). Или, иначе, такая координация может быть достигнута процедурой «подстройки» в ходе пробных шагов процесса перехода к новому согласованному состоянию (такие процедуры в экономико-математической теории называют «нащупыванием» [28]).

Далее в этой книге вопросами конструктивной реализации состояний и их изменений мы заниматься не будем, сосредоточив внимание на принципиальной, а не «расчетной», стороне проблемы управляемости. При этом, разумеется, мы будем отмечать качественные характеристики «улучшающих изменений», которые удается установить на этапе анализа управляемости и которые можно будет использовать как вспомогательные указания на последующем этапе реализации (примером могут служить направления — но не количественные значения — желательных изменений уровней затрат и выпусков отдельных продуктов).

Итак, вернемся к первой фазе управления — к задаче анализа управляемости в нашей экономической модели. До сих пор мы говорили о ситуации, когда такая задача получает положительное решение — когда существование искомых направленных вариаций, «улучшающих» состояние системы, удается установить. А что означает получение отрицательного ответа на такой вопрос, т. е. несуществование направленных вариаций искомого вида? Этот случай можно трактовать как такой исход анализа управляемости, который требует дальнейшего «управленческого»

---

[1]) Для ряда конкретных направленных вариаций в производственной системе, рассматриваемых далее, такие итеративные процедуры в качестве «конструктивных» доказательств существования приводились в [3]. В этой книге мы даем более компактные, хотя и «неконструктивные», доказательства существования таких вариаций.

исследования. Действительно, невозможность улучшающих изменений для данного состояния системы формально есть не что иное, как признак его «оптимальности» («неулучшаемости», «эффективности») по отношению к рассматриваемым допустимым изменениям этого состояния. Однако с более широкой содержательной точки зрения, имея в виду условность того, какие изменения в данном анализе приняты за допустимые, может быть уместно поинтересоваться, какие именно характеристики системы мешают улучшению ее состояния, так сказать, в первую очередь. Например, препятствием для расширения производства в системе в целом может оказаться невозможность и (или) невыгодность увеличения выпуска продукции у какого-либо одного «критического» элемента-производителя. Как мы увидим далее, наличие такого элемента — «узкого места» в производстве является характерным признаком «неулучшаемости» состояния системы. Если сложившиеся характеристики системы — цéны, технологии, критерии считать неизменными, то такое «узкое место» неустранимо и состояние системы действительно неулучшаемо. Однако, если окажется возможным изменить, например, цены и (или) технологию так, чтобы для данного производителя стало возможным и выгодным расширить свое производство, то он перестанет быть «узким местом» и состояние системы в целом сможет быть улучшено.

Заметим, что такое «общесистемное» улучшение оставалось бы невозможным, если бы мы направили наши дополнительные усилия (например, осуществили технологические усовершенствования) мимо этого «узкого места» на какой-нибудь другой элемент системы. Это замечание подчеркивает важность обнаружения и как можно более точной локализации «узких мест» в системе. Укажем также, что «узкие места» для расширения производства могут быть не только в самом производстве, но и в потреблении (отсутствие спроса как препятствие для роста выпуска продукции). Проблема «узких мест» и их локализации будет одной из основных тем при анализе управляемости экономических систем. Вопросами последующей «расшивки» выявленных «узких мест», как и другими «конструктивными» задачами управления, мы в этой книге заниматься не будем.

Таким образом, качественный анализ управляемости в неравновесных моделях экономических систем — это первая фаза управления, включающая установление факта существования либо несуществования направленных «улучшающих» вариаций состояния системы, а также описание качественного вида улучшающих изменений, если они существуют, либо, в противном случае, локализацию «узких мест», препятствующих улучшению. Такой качественный анализ составляет содержание всей второй части книги.

В следующих главах будет дана развернутая реализация схемы построения и анализа направленных вариаций в моделях производства, потребления и экономики в целом. Краткое изложение этой схемы, содержащее все основные постановки и определения, дается в оставшихся параграфах настоящей главы.

В § 6.2 описывается общий характер «улучшающих» направленных вариаций состояний квазиравновесия производственной системы. Исходным пунктом здесь является представление о желательности увеличения чистых выпусков всех продуктов или части продуктов — без уменьшения остальных чистых выпусков («монотонные увеличения»). Обсуждение различных мыслимых способов такого монотонного увеличения показывает, что единственным универсальным способом добиться этого в рамках используемых здесь средств является «наращивание» производства — увеличение валовых выпусков (но вместе с этим, вообще говоря, и затрат) продуктов. Действительно, обеспечить увеличение чистых выпусков путем экономии затрат (но вместе с этим и при уменьшении валовых выпусков) невозможно в силу свойства экономичности согласованных состояний, установленного в гл. IV. Более рациональное перераспределение затрат также либо невозможно (если речь идет о недефицитных продуктах — в силу свойства «эффективности при ограничениях» из гл. IV), либо оно требует такого изменения ограничения-квот, которое должно использовать более детальную информацию об элементах, чем мы располагаем. Поэтому остается один путь — наращивание валовых выпусков ради монотонного увеличения чистых выпусков, которое можно организовать на основе доступных «качественных» сведений об элементах системы и путем сравнительно простых изменений квот (и, возможно, установления новой дефицитной номенклатуры) при переходе к новому квазиравновесию.

Возможность экономически реализуемого наращивания выпусков продуктов представляет собой свойство производственной системы или подсистемы, которое имеет содержательный смысл своего рода «экономического потенциала» этой подсистемы и может быть охарактеризовано в достаточно прозрачных экономических категориях, а именно в терминах «выгодности» прироста производства для каждого производителя-элемента этой подсистемы. Мы уже отмечали в гл. II, при описании производственной системы, связь между свойством «прибыльности производства» для каждого участника (предположение 4′) и «продуктивностью» экономической системы — экономической реализуемостью в ней положительных чистых выпусков всех продуктов. Теперь подобная же ситуация имеет место и по отношению к приростам чистых выпусков: для обеспечения экономической реализуемости положительных приростов чистых выпусков достаточным условием оказывается «выгодность», в некотором строго определенном смысле, некоторых специально организованных актов «пробного» расширения производства у элементов данной подсистемы.

Дело обстоит совсем просто с недефицитной продукцией; каждый производитель такой продукции заинтересован в увеличении своего выпуска, и это обстоятельство достаточно для того, чтобы доказать возможность одновременного совместного наращивания производства всех таких недефицитных продуктов при прежних уровнях затрат дефицитных продуктов (возросшие затраты недефицитных продуктов перекрываются приростом их выпусков). Сложнее обстоит дело с дефицитной продукцией: каждый производитель такой продукции находится на максимуме выгодного для себя выпуска при существующих ограничениях-квотах на затраты. Однако это еще не одначает, что дефицит такого продукта «абсолютен»: производитель этого продукта может согласиться на увеличение выпуска, если ему будут обеспечены дополнительные поставки затрачиваемых им дефицитных продуктов.

Здесь важно уточнить, в каком смысле такое предполагаемое увеличение выпуска должно быть «выгодным» производителю. Прежде всего, оно должно увеличить прибыль производителя с учетом изменения всего его состояния, т. е. как выпуска, так и затрат. Однако этого еще недостаточно: мы потребуем, чтобы производитель отдельно учитывал свои возросшие затраты на приобретение дополнительных количеств дефицитных продуктов сверх прежних квот (которые теперь ослаблены). Эти дополнительные затраты должны перекрываться доходом производителя от производства дополнительного количества продукта. Если выгодное в указанном смысле наращивание производства дефицитного продукта возможно, будем называть соответствующего производителя «ненасыщенным», а если невозможно — то «насыщенным».

Оказывается, что ненасыщенность всех производителей дефицитных продуктов есть достаточное условие для экономической реализуемости монотонного увеличения чистых выпусков всех дефицитных продуктов. И обратно, экономическая нереализуемость такого изменения своим необходимым условием имеет существование хотя бы одного насыщенного элемента-производителя дефицитной продукции, который в этом случае и может рассматриваться как «узкое место» производственной системы.

Признание производственного элемента насыщенным либо ненасыщенным опирается на простой «опрос» производителя в форме: выгодно или невыгодно ему предоставление дополнительных ресурсов за дополнительную оплату? Использование других, но тоже «качественных» данных, а именно структурная характеристика взаимных поставок в производственной сети, позволяет при постановке более специальных задач наращивания производства получать улучшенные достаточные условия экономической реализуемости, а условия нереализуемости такого наращивания позволяют получать более точную локализацию препятствующих этому «узких мест». Этому кругу вопросов в основном посвящен § 6.3.

В этом § 6.3 рассматриваются задачи «частичного» наращивания производства, а именно монотонные увеличения чистых выпусков заданной части номенклатуры продуктов; чистые выпуски остальных продуктов при этом разрешается не увеличивать, а в постановке задачи о немонотонных изменениях даже разрешается уменьшать. Все производители интересующих нас продуктов, конечно, должны быть ненасыщенными (иначе мы не обеспечили бы экономическую реализуемость наращивания их выпусков), но этого еще не достаточно. Для каждого ненасыщенного производителя определяется его «ограничивающая номенклатура» — перечень дефицитных продуктов, нужных ему для самоокупаемого расширения производства. Для выделенной подсистемы производителей аналогичным образом определяется «полная ограничивающая номенклатура» — минимально-полный перечень всех дефицитных продуктов, требуемых участникам подсистемы (и всем их поставщикам).

Оказывается, что для наращивания выпусков заданных дефицитных продуктов достаточно ненасыщенности производителей хотя не только этих, но зато и не всех дефицитных продуктов, а лишь их полной ограничивающей номенклатуры. Более того, если разрешается снижать чистые выпуски некоторых «маловажных» продуктов ради увеличения чистых выпусков других, «особо важных» дефицитных продуктов, то при этом можно свести до еще более узкой — «полной условно-ограничивающей» — ту номенклатуру дефицитных продуктов, производителей которой нужно проверять на ненасыщенность. Если же при этом в соответствующей номенклатуре все-таки обнаружатся насыщенные производители, то тем самым будет получена достаточно жесткая локализация «узких мест», препятствующих решению рассматриваемой задачи.

Если же рассматривать не только производство, но и потребление, то здесь «узким местом» для наращивания выпуска может оказаться насыщенный спрос; соответствующие утверждения об улучшаемости равновесий, в сочетании со сформулированными ранее утверждениями для производственных квазиравновесий, приводятся в конце § 6.3.

В целом §§ 6.2, 6.3 содержат изложение постановок задач, основных определений и простейших утверждений (без доказательств), которые можно рассматривать как вводные пояснения и «заготовки» для последующих глав. Развернутые формулировки утверждений о направленных вариациях и о (не)улучшаемости согласованных состояний экономических систем, а также доказательства всех этих утверждений, составляют содержание всех последующих глав.

§ 6.2. Возможность увеличения чистых выпусков в производственных системах

Рассмотрим систему нормальных производственных элементов — основной объект изучения в этой книге — и зададимся вопросом о том, каковы возможные в ней способы увеличения чистых выпусков продуктов. Пусть задано квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I и с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Будем называть монотонным увеличением чистых выпусков переход к такому новому квазиравновесию $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ (с, быть может, новой дефицитной номенклатурой), в котором вектор чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$ удовлетворяет условию $\tilde{\tilde{x}}_0 \geq \tilde{x}_0$. Те компоненты ξ_{i0} вектора чистых выпусков, по которым требуется строгое увеличение: $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}$, мы будем оговаривать особо.

Вопрос о возможности монотонного увеличения чистых выпусков, очевидно, тесно связан с понятием «эффективности» состояния системы при соответствующих технологических и экономических ограничениях: в эффективном состоянии вектор $\tilde{x}_0$ максимален при данных ограничениях, в неэффективном состоянии его можно увеличить (в векторном смысле, т. е. «монотонно»). Как мы уже говорили в гл. I и IV, неэффективность данного состояния в общем случае означает возможность «общесистемного» увеличения чистых выпусков несколькими принципиально различными, связанными не обязательно с увеличением валовых выпусков, но и с экономией внутрипроизводственных затрат продуктов, способами; остановимся на этом подробнее.

Пусть о заданном состоянии $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ производственной системы известно лишь, что оно технологически реализуемо (т. е. $(\bar{y}_i, \bar{x}_i) \in G_i$ для всех $i \in \Omega$) и, более того, реализуемо при некоторых ограничениях-квотах $\tilde{\xi}_{ji}$ и $\tilde{y}_i$. Тогда в принципе может оказаться возможным увеличение чистых выпусков всех продуктов не путем расширения, а наоборот, путем частичного свертывания производства, если при этом внутрипроизводственные затраты продуктов будут снижены в большей степени, чем валовые выпуски этих продуктов. О такой возможности в гл. I, IV говорилось как о «неэкономичности» состояния производственной системы. Однако анализ свойства экономичности, проведенный в гл. IV (§ 4.2), показал, что любое экономически реализуемое состояние производственной системы — и в частности, квазиравновесие — заведомо является экономичным (теорема 4.1). Это означает, что интересующее нас монотонное увеличение чистых выпусков путем экономически реализуемого перехода от данного квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ к новому $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}})\}$ заведомо не может быть осуществлено путем ужесточения ограничений, т. е. снижения всех имеющихся (и, быть может, наложения новых) квот.

Более общий анализ понятия «эффективности при ограничениях» в § 4.3 показал, что, более того, любое экономически реализуемое состояние — и в частности, квазиравновесие — вообще не может быть улучшено в смысле увеличения вектора чистых выпусков, если сохранить прежние ограничения-квоты — даже если отказаться от требования экономической реализуемости! (теорема 4.3). Это означает, что даже если ограничиться лишь требованиями технологической реализуемости при данных ограничениях, то и в этом случае нельзя получить монотонное увеличение вектора чистых выпусков без того, чтобы ослабить хотя бы часть ограничений-квот в производственной системе.

Таким образом, мы неизбежно приходим к необходимости хотя бы частичного смягчения (или снятия) квот на выпуски и (или) затраты продуктов в исходном состоянии квазиравновесия. Возникает вопрос: как это сделать, чтобы добиться экономически реализуемого прироста чистых выпусков? В самом общем случае для этого может потребоваться перестройка всей системы квот, для которой нужно было бы полное или, во всяком случае, достаточно детальное знание технологических возможностей отдельных элементов (речь идет, по существу, о своего рода «перераспределении ресурсов» в экономической системе)[1]. Если же, ограничивая себя в средствах управления и анализа, считать, что информацией о внутренних технологических возможностях производственного элемента располагает лишь сам этот элемент, то остается следующая возможность. Каждый производитель P_i заявляет о своей готовности или «неготовности» увеличить выпуск своей продукции при определенных изменениях (ослаблении) своих квот $\tilde{\xi}_{ji}$, $\tilde{y}_i$ (если таковые имеются), сообщая лишь качественные, а не количественные данные о таких изменениях: номенклатуру продуктов и направления (знаки) изменений. Далее проводится качественный анализ совокупности таких сведений, который устанавливает, можно ли гарантировать принципиальную возможность желаемого монотонного увеличения чистых выпусков без того, чтобы использовать количественные данные о требуемых изменениях квот. Если такой анализ дает положительный результат, за этим должна следовать фаза реализации ис-

[1]) Во всяком случае для суждения об «эффективности» изменения уровней производства и поставок продуктов могут потребоваться сравнения «внутренних оценок» продуктов у разных производственных элементов, как это делается в моделях распределения и перераспределения ресурсов [31, 32, 34].

комых изменений, которая, однако, уже выходит за рамки данного исследования.

Общий метод монотонного увеличения чистых выпусков продуктов, достигаемого путем увеличения валовых выпусков этих продуктов при самостоятельном и независимом выборе производителями новых, требуемых им для этого, уровней поставок, будем называть *методом наращивания* производственных выпусков.

Конечно, в общем случае вышеописанный качественный анализ «метода наращивания» дает лишь достаточные, но не необходимые условия возможности интересующего нас монотонного увеличения чистых выпусков. Однако интересно, что для некоторых классов задач такие условия оказываются не только достаточными, но и необходимыми, а метод наращивания — единственно возможным методом монотонного увеличения чистых выпусков. Говоря в содержательных терминах, такая ситуация возникает всегда, когда между различными продуктами нет «заменимости», т. е. технологии имеют «комплектный», леонтьевский характер (см. гл. II). Специальному изучению класса систем производственных элементов с комплектными технологиями будет посвящена гл. XI. Однако есть и другой класс ситуаций, когда производственные элементы общего нормального вида «ведут себя как леонтьевские». Это — ситуации варьируемых квот на выпуск недефицитных продуктов (см. текст после формулировки предположения 2 в § 2.2). К анализу возможностей монотонного увеличения чистых выпусков недефицитных продуктов мы сейчас и перейдем.

Как уже говорилось, если задано исходное состояние квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, то любое монотонное увеличение чистых выпусков $\tilde{x}_0$ необходимо требует изменения хотя бы части ограничений-квот. В нашей модели квоты бывают двух типов: квоты на выпуск недефицитных продуктов $\tilde{y}_k$ и квоты на производственное потребление дефицитных продуктов $\tilde{\xi}_{ji}$. Мы начнем сейчас анализ возможностей монотонного увеличения чистых выпусков с анализа возможных результатов изменений квот-ограничений на выпуски недефицитных продуктов, считая квоты на затраты дефицитных продуктов фиксированными.

Выделим для данного квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ номенклатуру K всех недефицитных продуктов и рассмотрим производственную подсистему, составленную из всех производителей P_k, $k \in K$. Зафиксируем состояния $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ всех производителей P_i дефицитных продуктов $i \in I$ $(K \cup I = \Omega)$ и зададимся вопросом о возможности увеличения чистых выпусков недефицитных продуктов $k \in K$ путем технологически и экономически реализуемых изменений состояний их производителей P_k, $k \in K$, если разрешается изменять лишь квоты $\tilde{y}_k$ на выпуски недефицитных продуктов $k \in K$, но не квоты $\tilde{\xi}_{ji}$ на затраты дефицитных продуктов $j \in I$.

Легко видеть, что в такой постановке увеличение всех чистых выпусков ξ_{k0}, $k \in K$, будет, по нашей терминологии, монотонным увеличением. Действительно, в любом предполагаемом новом состоянии квазиравновесия (и даже вообще в любом альтернативном допустимом состоянии при рассматриваемых ограничениях) затраты, а не только выпуски, всех дефицитных продуктов останутся неизменными (и уж заведомо не увеличатся). Поэтому останутся неизменными (и уж заведомо не уменьшатся) чистые выпуски ξ_{i0} всех дефицитных продуктов $i \in I$, в то время как чистые выпуски ξ_{k0} всех недефицитных продуктов $k \in K$ должны увеличиться по постановке задачи.

Мы покажем теперь, что в такой постановке единственно возможным методом монотонного увеличения чистых выпусков является наращивание валовых выпусков всех продуктов $k \in K$, если рассматривать всевозможные экономически реализуемые состояния $(\approx{y}_k, \approx{x}_k)$ производителей P_k, $k \in K$, при фиксированных квотах $\tilde{\xi}_{jk}$, $j \in I$, но варьируемых квотах для y_k. Отметим, что при достаточном увеличении квоты для y_k реализуемое значение $\approx{y}_k$ может оказаться ниже этой квоты, а при снижении квоты для y_k некоторое реализуемое значение $\approx{\xi}_{kj}$, $j \in I$, может оказаться строго меньше квоты $\tilde{\xi}_{kj}$; поэтому состояние системы $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$, вообще говоря, не будет согласованным.

Теорема 6.1. *Пусть переход из квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ в экономически реализуемое состояние $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ при прежних квотах $\tilde{\xi}_{ji}$, $j \in I$, $i \in \Omega$, и, возможно, измененных квотах для y_k, $k \in K$, таков, что*

$$\approx{\xi}_{k0} > \tilde{\xi}_{k0} \quad \text{для всех} \quad k \in K. \tag{1}$$

Тогда

$$\approx{y}_k > \tilde{y}_k \quad \text{для всех} \quad k \in K, \tag{2}$$

так что квоты для всех y_k заведомо повышены по сравнению с исходными $\tilde{y}_k$, $k \in K$.

Доказательство теоремы 6.1. Прежде чем доказать это утверждение, заметим, что, как уже говорилось выше, здесь заведомо

$$\approx{\xi}_{j0} \geqslant \tilde{\xi}_{j0} \quad \text{для всех} \quad j \in I, \tag{3}$$

поскольку

$$(\approx{y}_j, \approx{x}_j) \equiv (\tilde{y}_j, \tilde{x}_j) \quad \text{для всех} \quad j \in I$$

и

$$\approx{\xi}_{jk} \leqslant \tilde{\xi}_{jk} \quad \text{для всех} \quad j \in I, \quad k \in K,$$

так что (1) и (3) вместе дают

$$\tilde{\tilde{x}}_0 \geq \tilde{x}_0. \tag{4}$$

Поэтому из теоремы 4.3 об эффективности при ограничениях (гл. IV) сразу следует, что невозможно, чтобы было

$$\tilde{\tilde{y}}_k \leqslant \tilde{y}_k \quad \text{для всех} \quad k \in K,$$

так как это противоречило бы эффективности состояния квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ при ограничениях $\tilde{\xi}_{ji}$, $j \in I$, $i \in \Omega$, и $\tilde{y}_k$, $k \in K$. Докажем теперь справедливость соотношения (2) в теореме 6.1 в полном объеме.

Допустим противное: существует непустое подмножество индексов (номенклатура) $K' \subseteq K$ такое, что

$$\tilde{\tilde{y}}_{k'} \leqslant \tilde{y}_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in K', \tag{5}$$

$$\tilde{\tilde{y}}_{k''} > \tilde{y}_{k''} \quad \text{для всех} \quad k'' \in K \setminus K' \tag{6}$$

(множество $K \setminus K'$ может быть пусто). При этом в силу предположения 2 о свойстве нормального элемента (см. § 2.2) имеет место соотношение

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{kk''} \geqslant \tilde{\xi}_{kk''} \quad \text{для всех} \quad k \in K, \; k'' \in K \setminus K'. \tag{7}$$

Построим теперь новое состояние производственной системы $\{(\hat{y}_i, \hat{x}_i)\}$, положив

$$(\hat{y}_j, \hat{x}_j) \equiv (\tilde{y}_j, \tilde{x}_j) \equiv (\tilde{\tilde{y}}_j, \tilde{\tilde{x}}_j) \quad \text{для всех } j \in I, \tag{8}$$

$$(\hat{y}_{k'}, \hat{x}_{k'}) \equiv (\tilde{\tilde{y}}_{k'}, \tilde{\tilde{x}}_{k'}) \quad \text{для всех } k' \in K', \tag{9}$$

$$(\hat{y}_{k''}, \hat{x}_{k''}) \equiv (\tilde{y}_{k''}, \tilde{x}_{k''}) \quad \text{для всех } k'' \in K \setminus K'. \tag{10}$$

Состояние $\{(\hat{y}_i, \hat{x}_i)\}$, как легко видеть из (5) и (8)—(10), является допустимым при ограничениях исходного состояния:

$$\hat{\xi}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji} \quad \text{для всех} \quad j \in I, \quad i \in \Omega, \tag{11}$$

$$\hat{y}_k \leqslant \tilde{y}_k \quad \text{для всех} \quad k \in K, \tag{12}$$

а из соотношений (1), (7) и определений (8)—(10) следует, что

$$\hat{\xi}_{k0} > \tilde{\xi}_{k0}, \qquad k \in K, \tag{13}$$

что невозможно в силу теоремы 4.3. Полученное противоречие доказывает теорему 6.1.

Таким образом, мы обосновали неизбежность наращивания валовых выпусков для монотонного увеличения чистых выпусков недефицитных продуктов. Точнее, теорема 6.1 указывает на характер перехода от одного квазиравновесия к другому, при котором производство дефицитной продукции и квоты на нее не изменяются, а чистые выпуски недефицитных продуктов увеличиваются: такой переход возможен только путем повышения квот на выпуск всех недефицитных продуктов.

Однако до сих пор еще ниоткуда не следует, что такой метод наращивания работоспособен, т. е. что действительно путем повышения квот на валовые выпуски дефицитных продуктов можно добиться увеличения их чистых выпусков.

Предыдущая теорема носила в этом смысле «негативный» характер: увеличения чистых выпусков нельзя добиться, уменьшая, а не увеличивая валовые выпуски. Оказывается, что справедливо и соответствующее «позитивное» утверждение.

Утверждение 6.1. *Для любого заданного квазиравновесия* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *существует такое повышение квот на выпуски недефицитных продуктов, которое приводит к новому квазиравновесию с бóльшими чистыми выпусками всех недефицитных продуктов при неизменных чистых выпусках всех дефицитных продуктов.*

Таким образом, каждый недефицитный продукт k действительно «оправдывает свою репутацию» недефицитного: производитель P_k этого продукта не только хочет, но и может (в кооперации с другими) обеспечить увеличение чистого выпуска этого продукта, заведомо не снижая чистых выпусков остальных.

В утверждении 6.1 имеется в виду существование «достаточно малых» повышений квот, валовых и чистых выпусков. Точные формулировки этого и последующих утверждений этой главы и их доказательства будут даны в последующих гл. VII—X.

Здесь мы ограничимся пояснением «экономического смысла» той (формальной) причины, которая обеспечивает универсальную возможность прироста чистых выпусков недефицитной продукции K. Причина эта, говоря содержательно, заключается в наличии «резерва рентабельности» (прибыльности) у производителей P_k недефицитных продуктов $k \in K$, что формально выражается соотношением

$$\tilde{y}_k < \tilde{y}_{k\,\max} \text{ для всех } k \in K, \tag{14}$$

где $\tilde{y}_{k\,\max}$ — y-я компонента условно-оптимального состояния производителя P_k (максимизирующего прибыль при ограничениях-квотах $\tilde{\xi}_{jk}$, $j \in I$, — см. определение 2.2 в § 2.2). Из этого соотношения непосредственно вытекает (с учетом единственности решения задачи производителя), что прибыль производителя P_k при снятии квоты $\tilde{y}_k$ и при переходе его из состояния $(\tilde{y}_k, \tilde{x}_k)$ в условно-оптимальное состояние $(\tilde{y}_{k\,\max}, \tilde{x}_{k\,\max})$ строго увеличится:

$$\tilde{\Pi}_{k\,\max} > \tilde{\Pi}_k. \tag{15}$$

Наличие такой возможности «выгодного» (прибыльного) наращивания производства у всех производителей недефицитной продукции как раз и представляет собой «причину» (говоря формально, достаточное условие) возможности положительного прироста всех чистых выпусков в подсистеме, состоящей из этих производителей.

Для того чтобы пояснить (но не доказать) это последнее утверждение, мы покажем, что ситуация здесь полностью аналогична ситуации с «продуктивностью», т. е. с реализуемостью положительных чистых выпусков всех продуктов в системе нормальных производственных элементов, которая гарантируется предположением о «прибыльности производства» (см. предположение $4'$ и последующее обсуждение в § 2.3). С этой целью мы формально сведем задачу о положительных приростах чистых выпусков недефицитных продуктов к задаче о положительных величинах чистых выпусков в некоторой вспомогательной производственной системе, где условие «резерва прибыльности» (15) перейдет в условие прибыльности из предположения $4'$.

Действительно, вернемся к той постановке задачи о монотонных увеличениях чистых выпусков недефицитных продуктов в заданном квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, которая охватывается теоремой 6.1. В силу этой теоремы мы наперед знаем, что имеет смысл рассматривать только такие альтернативные состояния $(\approx{y}_k, \approx{x}_k)$ для P_k, $k \in K$, в которых $\approx{y}_k \geqslant \tilde{y}_k$ и $\approx{\xi}_{ik} \geqslant \tilde{\xi}_{ik}$, $k \in K$, $i \in \Omega$, причем $(\approx{y}_j, \approx{x}_j) \equiv (\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$ для всех $j \in I$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением приращений

$$y'_k = \approx{y}_k - \tilde{y}_k, \quad x'_k = \approx{x}_k - \tilde{x}_k, \; k \in K, \tag{16}$$

считая их заведомо неотрицательными. Аналогичные приращения для $j \in I$ — заведомо нулевые, так что рассматриваемую номенклатуру продуктов можно сузить до K. При этом K-подвектор $(y'_k, x'_k)_K$ вектора (y'_k, x'_k) можно рассматривать как вектор выпуска-затрат производителя P'_k в новой модели, а за его технологическое множество G'_k принять

$$G'_K = \{(y'_k, x'_k)_K : \; (y'_k, x'_k)_K = (y_k, x_k)_K - (\tilde{y}_k, \tilde{x}_k)_K,$$
$$(y_k, x_k) \in G_k, \quad (y_k, x_k) \geqq (\tilde{y}_k, \tilde{x}_k)\}. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что G'_K (17) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к технологическому множеству нормального элемента (предположение 1), а также что остаются в силе предположения 2 и 3. Наконец, условие (14) (или (15)) обеспечивает выполнение предположения 4 (или $4'$). Поэтому мы оказываемся в условиях теоремы 2.2, утверждающей не только технологическую, но и экономическую продуктивность — существование квазиравновесия $\{(\tilde{y}'_k, x'_k)_K\}$, $k \in K$, с положительным вектором чистых выпусков $\tilde{x}'_{0K}$.

Возвращаясь к исходной модели, легко получаем отсюда существование искомого квазиравновесия $(\tilde{y}'_i, \tilde{x}'_i)$, $i \in \Omega$, с $\tilde{x}'_0 \geq \tilde{x}_0$, а именно с $\tilde{x}'_{0K} > \tilde{x}_{0K}$ и $\tilde{x}'_{0I} = \tilde{x}_{0I}$.

В действительности мы не будем основывать доказательство утверждения 6.1 на теореме 2.2 (пока еще также не доказанной); наоборот, доказательство теоремы 2.2 будет получено в гл. VII как следствие из уточненной формулировки утверждения 6.1 — теоремы 7.1 (§ 7.2). Предыдущее утверждение нужно было нам лишь для того, чтобы продемонстрировать фундаментальную роль условий прибыльности производства (в «абсолютной» или «относительной» форме) в качестве гарантии продуктивности, или «резерва продуктивности» (потенциала экономического прироста). Далее мы покажем, что условия такого рода оказываются пригодными и в более сложной задаче наращивания выпуска дефицитной продукции.

К рассмотрению этой задачи мы теперь и перейдем.

Пусть j — дефицитный продукт в данном квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, т. е. $j \in I$. Согласно определению квазиравновесия, производитель P_j этого продукта не хочет или не может увеличить его выпуск при существующих ограничениях-квотах $\tilde{\xi}_{ij}$ на поставки ему дефицитных продуктов $i \in I$. Однако означает ли это, что увеличение выпуска продукта j экономически нереализуемо? Нет, в общем случае это не так: производитель P_j может согласиться на увеличение выпуска, если ему будут предоставлены некоторые дополнительные количества определенных дефицитных продуктов и если его дополнительные издержки на оплату этих продуктов «окупятся» при расширении производства. Подчеркнем, что ослабление (увеличение) квот-ограничений $\tilde{\xi}_{ij}$ до значений $\hat{\xi}_{ij} \geqslant \tilde{\xi}_{ij}$ отнюдь не обязательно приведет к тому, что производитель P_j действительно станет приобретать больше всех тех дефицитных продуктов, которые теперь предоставляются ему в дополнительных количествах: $\hat{\xi}_{ij} > \tilde{\xi}_{ij}$. Может оказаться и так, что производитель P_j, приобретя дополнительные количества одних продуктов, наоборот, откажется от части других, приобретавшихся им ранее — как дефицитных, так и недефицитных, и даже при этом снизит выпуск своего продукта. Гарантировать можно лишь одно — что если производитель P_j при новых увеличенных квотах $\hat{\xi}_{ij}$ вообще изменит свое состояние, то он обязательно увеличит потребление хотя бы одного того дефицитного продукта $i \in I$, новая квота на который $(\hat{\xi}_{ij})$ стала строго больше старой $(\tilde{\xi}_{ij})$. В противном случае оказалось бы, что новое состояние производителя P_j было допустимо и при старых ограничениях-квотах, что противоречит единственности решения задачи производителя.

При подсчете прибыли производителя P_j в новом состоянии $(\approx{y}_j, \approx{x}_j)$ на ее изменении по сравнению со старым состоянием $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$ скажется и изменение его дохода (увеличение дохода, если выпуск возрос: $\approx{y}_j > \tilde{y}_j$, и уменьшение дохода, если выпуск упал: $\approx{y}_j < \tilde{y}_j$), и возрастание издержек на оплату тех продуктов i, которые P_j стал приобретать в бóльших количествах: $\approx{\xi}_{ij} > \tilde{\xi}_{ij}$ (среди этих продуктов могут быть как дефицитные, $i \in I$, если новая квота $\hat{\xi}_{ij}$ выше $\tilde{\xi}_{ij}$, так и недефицитные), и, наконец, возможная экономия от снижения издержек при частичном отказе от некоторых продуктов: $\approx{\xi}_{ij} < \tilde{\xi}_{ij}$. Относительно прибыли можно утверждать, что новое значение ее при увеличенных квотах $\hat{\xi}_{ij} \geqslant \tilde{\xi}_{ij}$ станет только выше, если производитель P_j изменит свое состояние. А такое увеличение квот, при котором производителю станет выгодно изменять свое состояние, расширив производство, возможно всегда, за исключением лишь того случая, когда данное состояние производителя «абсолютно-оптимально» (см. определение 2.2 в § 2.2): $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = (y_{i\,\max}, x_{i\,\max})$.

Но можно ли теперь утверждать, подобно случаю недефицитных продуктов, что сама возможность выгодного расширения производства для каждого производителя дефицитной продукции гарантирует возможность одновременного увеличения чистых выпусков всех дефицитных продуктов путем наращивания их валовых выпусков? К сожалению, в общем случае это не так. Например, все производители могут стремиться приобретать больше дефицитных продуктов из некоторой номенклатуры $\hat{I} \subseteq I$, отказываясь от остальных продуктов (от дефицитных или недефицитных — это в данном случае значения не имеет). При этом «физический» рост выпуска продуктов из номенклатуры $\hat{I}$ может не покрывать роста производственных затрат этих продуктов, хотя при подсчете прибылей такие изменения в стоимостном исчислении могут оказаться выгодными в силу уменьшения издержек на остальные продукты.

Подобные соображения вынуждают сформулировать более жесткое требование к «выгодности» наращивания производства при росте затрат дефицитных продуктов. Мы потребуем, чтобы помимо роста прибыли в прежнем ее исчислении, было бы гарантировано покрытие дополнительным доходом издержек на дополнительное приобретение дефицитных продуктов. Тем самым, в частности, заведомо предусматривается не только рост прибыли, но и рост выпуска продукции данного элемента (тогда как один только рост прибыли мог бы быть получен перестройкой затрат без роста или даже при снижении выпуска). Кроме того, мы сформулируем критерий «выгодности» наращивания производства в виде такого «вопроса» к производственному элементу, для ответа на который этому элементу придется решать свойственную ему задачу максимизации прибыли в специально поставленной форме. При этом производитель будет пользоваться доступной ему (но не нам!) информацией о собственных технологических возможностях и будет «сам решать», какие именно дефицитные (как и недефицитные) продукты и в каких количествах (или пропорциях) ему дополнительно потребуются; мы же получим от производителя лишь окончательный «качественный» ответ на наш вопрос. Этот ответ будет звучать так: данный производитель является «насыщенным» (либо «ненасыщенным»).

Перейдем к формальным определениям.

Пусть производственный элемент P_j находится в состоянии $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$, являющемся решением задачи $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij},\ I\rangle$:

$$\Pi_j = \gamma_j y_j - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \xi_{ij} = \max, \tag{18}$$

$$\{y_j,\ x_j\} \in G_j, \tag{19}$$

$$\xi_{ij} \leqslant \tilde{\xi}_{ij}, \qquad i \in I, \tag{20}$$

при некоторой номенклатуре продуктов $I \subseteq \Omega$. Обозначим через $\tilde{\Pi}_j$ максимальное значение целевой функции в этой задаче $\left(\tilde{\Pi}_j = \gamma_j \tilde{y}_j - \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \tilde{\xi}_{ij}\right)$.

Рассмотрим также следующую параметрическую задачу с числовым параметром $\alpha \geqslant 0$, которую будем обозначать через $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij},\ I;\ \alpha\rangle$:

$$\Pi_j = \gamma_j y_j - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \xi_{ij} = \max, \tag{21}$$

$$(y_j,\ x_j) \in G_j, \tag{22}$$

$$\sum_{i \in I} \gamma_i (\xi_{ij} - \tilde{\xi}_{ij})^+ \leqslant \alpha \tag{23}$$

(здесь используется обозначение $(x)^+ = x$ при $x \geqslant 0$ и $= 0$ при $x < 0$). Обозначим через Π_j^α максимальное значение целевой функции в этой задаче, а решение этой задачи (или одно из них, если задача имеет несколько решений) будем обозначать через $(y_j^\alpha,\ x_j^\alpha)$.

Определение 6.1. Производственный элемент P_j назовем *ненасыщенным в состоянии* $(\tilde{y}_j,\ \tilde{x}_j)$, если существуют число $\varepsilon > 0$ и неубывающая функция $\psi(\alpha)$:

$$\psi(\alpha):\ [0,\ \varepsilon] \to R^1_+; \quad \psi(\alpha) > 0 \ \text{при}\ \alpha \in (0,\ \varepsilon]$$

такие, что для каждого $\alpha \in (0,\ \varepsilon]$ соответствующее значение

y_j^α — y-й компоненты решения (y_j^α, x_j^α) задачи $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij},\ I;\ \alpha\rangle$ (21)—(23) (а если таких решений несколько, то хотя бы одного из них) удовлетворяет условию

$$\gamma_j\left(y_j^\alpha - \tilde{y}_j\right) \geqslant \alpha + \psi(\alpha). \tag{24}$$

В противном случае элемент P_j будем называть *насыщенным.*

Замечание 6.1. Как легко показать, требование монотонного неубывания функции $\psi(\alpha)$ в определении 6.1 можно заменить требованием непрерывности этой функции, причем в обоих случаях без ограничения общности можно считать, что функция $\psi(\alpha)$ — строго возрастающая на $[0, \varepsilon]$. Впредь поэтому мы и будем считать, что $\psi(\alpha)$ — непрерывная и строго возрастающая на $[0, \varepsilon]$ функция.

Замечание 6.2. Обратим еще раз внимание на то, что в определении насыщенности и ненасыщенности элемента P_j величина возможных дополнительных издержек на закупку дополнительных количеств недефицитных продуктов $k \in K$, как и возможная экономия от снижения затрат части продуктов (и недефицитных, и дефицитных), учитывается неявно при подсчете полной прибыли Π_j^α. Очевидно, величина этой прибыли при $\alpha > 0$, если состояние (y_j^α, x_j^α) отлично от $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$, должна удовлетворять условию

$$\Pi_j^\alpha > \tilde{\Pi}_j. \tag{25}$$

Однако вышеуказанные дополнительные издержки и (или) экономия никак не входят в условие (24). Может оказаться, в частности, что элементу выгодно увеличить свой выпуск и, более того, возможно, что алгебраическая сумма приростов издержек на покупку дефицитных продуктов будет существенно меньше стоимости прироста выпуска:

$$\gamma_j\left(y_j^\alpha - \tilde{y}_j\right) > \psi(\alpha) + \sum_{i\in I}\gamma_i\left(\xi_{ij}^\alpha - \tilde{\xi}_{ij}\right),$$

однако элемент будет насыщенным. Такая ситуация может, естественно, иметь место лишь в том случае, когда

$$\sum_{i\in I}\gamma_i\left(\xi_{ij}^\alpha - \tilde{\xi}_{ij}\right) < \sum_{i\in I}\gamma_i\left(\xi_{ij}^\alpha - \tilde{\xi}_{ij}\right)^+,$$

т. е. тогда, когда «прибыльность» нового состояния обеспечена отказом от одной части дефицитных продуктов, но другие дефицитные продукты при этом затрачиваются в существенно увеличенных количествах, не «окупаемых» ростом выпуска.

Определение 6.1 реализует проверку усиленного требования «выгодности» для производителя P_j наращивания его выпуска при дополнительных затратах дефицитных продуктов. Это определение можно интерпретировать следующим образом. Производителю P_j в состоянии $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$ предоставляется некоторая (малая) «денежная ссуда» α «целевым назначением» на приобретение дополнительных количеств дефицитных продуктов сверх квот $\tilde{\xi}_{ij}$ по его желанию. Производитель должен покрыть эту ссуду из выручки от продажи дополнительно произведенного количества своей продукции, причем с некоторым «превышением» $\psi(\alpha)$. Если производителю P_j выгодно брать ссуду (любой достаточно малой величины) на таких условиях, т. е. он обеспечивает себе увеличение прибыли

$$\Pi_j^\alpha > \tilde{\Pi}_j$$

и выполняет требование «окупаемости» ссуды (24), то он считается ненасыщенным, а если это невыгодно — то насыщенным.

Если мы рассматриваем согласованное состояние производственной системы, т. е. квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, то насыщенным, очевидно, может быть только такой производственный элемент, который производит дефицитный продукт; однако не каждый производитель дефицитного продукта насыщен. Насыщенность — это «усиленная» характеристика дефицитности продукта в производственной системе. Тривиальным примером ситуации насыщенности может служить абсолютная оптимальность состояния элемента P_j:

$$(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j) = (y_{j\,\max}, x_{j\,\max})$$

(см. определение 2.2 в § 2.2).

Наоборот, ненасыщенность производителя дефицитной продукции — это показатель того, что дефицитность данного продукта можно надеяться устранить. Как далее будет показано, ненасыщенность производственых элементов в качестве признака «гарантированной выгодности» наращивания производства действительно сможет служить достаточным условием для роста чистых выпусков дефицитных продуктов. Приведем простейшую формулировку соответствующего утверждения.

Утверждение 6.2. *Если в данном квазиравновесии все производители дефицитных продуктов ненасыщены, то возможно монотонное увеличение чистых выпусков всех дефицитных продуктов.*

Уточненная формулировка этого утверждения (включающая указание на «достаточную малость» рассматриваемых изменений состояний), его дальнейшие детализации, как и все доказательства, приводятся в гл. VII.

§ 6.3. Структурные характеристики сети производственных элементов и локализация «узких мест» производства

В предыдущем § 6.2 мы интересовались возможностью обеспечивать монотонное увеличение чистых выпусков продуктов. Оказалось, что для недефицитной продукции такая возможность всегда имеется, а для дефицитной продукции существуют определенные условия, гарантирующие возможность такого увеличения: это — ненасыщенность всех производителей дефицитной продукции (утверждение 6.2). Однако эти условия не обязаны выполняться всегда: в рассматриваемом состоянии квазиравновесия может оказаться, что некоторый элемент-производитель насыщен. Что это означает?

Для выяснения роли насыщенного элемента в производственной системе начнем с того, что представим утверждение 6.2 в эквивалентной «негативной» форме.

Утверждение 6.2′. *Если в данном квазиравновесии* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *монотонное увеличение чистых выпусков дефицитных продуктов невозможно, то среди элементов-производителей дефицитных продуктов найдется хотя бы один насыщенный элемент.*

Таким образом, существование насыщенного элемента представляет собой необходимое условие для невозможности интересующего нас увеличения чистых выпусков. Это дает основание рассматривать при этом насыщенный производственный элемент как «узкое место» производственной системы, которое сдерживает наращивание производства. Уточним, однако, что обнаружение насыщенного элемента в производственной системе в общем случае все же не означает определенно, что данный элемент действительно делает невозможным увеличение чистых выпусков. Дело в том, что насыщенность некоторого производителя есть необходимое, но в общем случае не достаточное условие такой невозможности: может оказаться, что даже при наличии насыщенных производственных элементов все же можно добиться монотонного увеличения чистых выпусков всех продуктов некоторым экономически реализуемым способом — хотя и не тем «методом наращивания», который включает процедуру решения задач $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij},\ I;\ \alpha\rangle$ вида (21)—(23). Поэтому, строго говоря, насыщенный производственный элемент — это «узкое место» производства не в универсальном смысле, а лишь с точки зрения «метода наращивания» чистых выпусков [1]). Если же известно, что получить монотонное увеличение чистых выпусков невозможно никакими способами, то насыщенный производственный элемент, который в этом случае обязательно существует (утверждение 6.2), или хотя бы один из насыщенных элементов, если их несколько, определенно является «узким местом» производства. Действительно, если бы какими-либо дополнительными средствами (например, изменением цен или технологий) насыщенные

---

[1]) Такая ситуация обычна для использования методов вариационного типа, дающих, как правило, лишь необходимые, но не достаточные условия «экстремальности» («неулучшаемости»): получаемые признаки характеризуют лишь «подозрение на экстремальность» в общем случае либо «экстремальность» по отношению к принятому типу вариаций.

элементы преобразовались в ненасыщенные, то искомое экономически реализуемое увеличение чистых выпусков заведомо стало бы возможным (утверждение 6.2).

Таким образом, насыщенные производственные элементы — это всегда если не определенно «узкие места» производства, то по крайней мере именно они являются «кандидатами» на роль «узких мест». Помня о таком уточнении, мы далее будем говорить об «узких местах» без дополнительных оговорок.

Замечание 6.3. Надобность в уточнении трактовки насыщенных элементов как «узких мест» возникла из-за того, что насыщенность является лишь необходимым, но в общем случае не достаточным условием невозможности увеличения чистых выпусков. Ввиду этого важно отметить, что это условие все же, по-видимому, во многих случаях «близко» к достаточному, а для целого класса систем нормальных производственных элементов оно совпадает с достаточным. Это — класс систем элементов с комплектными характеристиками (см. определение 2.4 в § 2.2). В силу такой специфики этих систем многие утверждения типа формулируемых в этой главе приобретают для них более сильный характер; их изложению посвящена отдельная гл. XI.

Итак, наличие насыщенного элемента в производственной системе является потенциальным препятствием для монотонного увеличения чистых выпусков дефицитных продуктов. Подчеркнем, что здесь речь идет об одновременном строгом увеличении выпусков всех дефицитных продуктов в номенклатуре I данного квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$. Поставим теперь более ограниченную задачу: выяснить, возможно ли такое монотонное увеличение чистых выпусков, при котором требуется строгое увеличение только части чистых выпусков для заданной номенклатуры продуктов R; чистые выпуски остальных продуктов требуется лишь не уменьшать. Ввиду всегда имеющейся возможности увеличить чистые выпуски недефицитных продуктов (утверждение 6.1) естественно в этой постановке рассматривать в качестве заданной номенклатуры R часть дефицитной номенклатуры: $R \subset I$. Приводит ли такое смягчение требований к появлению новых возможностей при решении задачи методом наращивания производства?

Оказывается, что это действительно так: решение задачи наращивания выпусков при суженной номенклатуре R оказывается возможным при более широких условиях, формулируемых по-прежнему в терминах отсутствия насыщенных элементов как «узких мест» производства, а нарушению этих условий сопутствует более точная локализация «узких мест». Построение таких условий связано с рассмотрением определенных «структурных» соотношений в производственных системах, которыми до сих пор нам заниматься не приходилось и к которым мы теперь и перейдем.

Систему производителей P_i, $i \in \Omega$, в заданном состоянии квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ или в различных возможных состояниях, рассматриваемую как сеть элементов, связанных между собой потоками продуктов, можно описывать целым рядом структурных характеристик. Эти характеристики складываются из «качественных» данных о наличии или отсутствии потоков продуктов того или иного типа между определенными элементами. При этом нас могут интересовать различные типы продуктопотоков: например, можно регистрировать, получает ли данный производитель P_j поставки продукта i (от производителя P_i) в данном состоянии, или во всех состояниях некоторого класса, или хотя бы в одном состоянии; нуждается ли производитель в продуктах данной номенклатуры вообще, желательны ли ему дополнительные поставки данных продуктов и т. п. В каждом таком случае будем говорить о продуктах, «питающих» производителя.

Для того чтобы предусмотреть единообразный способ описания подобных структурных данных, прежде всего условимся говорить о продукте i и его производителе P_i как об одном объекте — элементе номенклатуры; номенклатурой мы называем любое подмножество множества индексов производителей (наименований продуктов) Ω. Такое отождествление продуктов и производителей позволит нам говорить о структуре связей между продуктами (и их номенклатурами), подразумевая структуру связей между соответствующими производителями (и их группами). Конкретный смысл дальнейших утверждений такого рода каждый раз будет ясен из контекста.

Дальнейшие формальные построения основываются на задании номенклатур продуктов, «питающих» различных производителей (различные интерпретации понятий «питающие продукты» и «питающая номенклатура» будут давать различные интерпретации этих построений). Пусть для каждого рассматриваемого производителя P_j или, что для нас сейчас то же самое, продукта j задано множество W_j элементов номенклатуры Ω, называемое *питающей номенклатурой для* j ($j \in \Omega$, $W_j \subseteq \Omega$).

Определение 6.2. Номенклатуру $W \subseteq \Omega$ назовем *самопитающей*, если

$$\text{из} \quad j \in W \quad \text{следует} \quad W_j \subseteq W. \tag{26}$$

Если вернуться к экономическому содержанию, то самопитающая номенклатура, понимаемая как список элементов-производителей, может интерпретироваться как замкнутая по поставкам «питающих» продуктов подсистема производственной системы («автаркия»).

Лемма 6.1. *Пусть W', $W'' \subseteq \Omega$ — самопитающие номенклатуры. Тогда номенклатура $W''' = W' \cap W''$ — также самопитающая.*

Доказательство леммы 6.1. Пусть $j \in W'''$; тогда $j \in W'$ и $j \in W''$ и, следовательно, согласно (26) $W_j \subseteq W'$ и $W_j \subseteq W''$, т. е. $W_j \subseteq W'''$. Лемма 6.1 доказана.

Определение 6.3. Пусть $R \subseteq \Omega$ — некоторая номенклатура. Номенклатуру $W \subseteq \Omega$ назовем *питающей номенклатурой для* R, если W — самопитающая номенклатура и $W \supseteq R$.

Определение 6.4. Пусть $R \subseteq \Omega$ — некоторая номенклатура. Номенклатуру $W \subseteq \Omega$ назовем *полной питающей номенклатурой для* R и обозначим через $W(R)$, если W — питающая номенклатура для R, минимальная в смысле теоретико-множественного включения среди всех питающих номенклатур для R.

Определение 6.4 гласит, что если $W(R)$ — полная питающая номенклатура для R, а W' — какая-либо другая самопитающая номенклатура, включающая R: $W' \supseteq R$, то невозможно, чтобы было $W' \subset W(R)$. Однако минимальность $W(R)$ по включению сама по себе еще не гарантирует, что должно быть включение $W(R) \subset W'$, а в самом определении 6.4 не утверждается заранее, что полная питающая номенклатура $W(R)$ для R единственна. В действительности же минимальная номенклатура $W(R)$ среди всех питающих номенклатур W' для R единственна и, следовательно, является не только минимальной, но и, более того, наименьшей среди всех таких W':

$$W(R) \subseteq W'. \tag{27}$$

Ввиду важности этого утверждения, по существу обосновывающего корректность определения 6.4 как однозначного множественного отображения $R \to W(R)$, приведем и докажем его в виде отдельного следствия из леммы 6.1.

Следствие леммы 6.1. *Пусть $R \subseteq \Omega$, и пусть W', $W'' \subseteq \Omega$ — номенклатуры, минимальные по включению среди всех питающих номенклатур для R. Тогда $W' = W''$.*

Доказательство следствия. Допустим, что $W' \neq W''$, и возьмем номенклатуру $W''' = W' \cap W''$. Тогда в силу леммы 6.1 W''' — самопитающая номенклатура, а поскольку, очевидно, $W''' \supseteq R$, то W''' — питающая номенклатура для R. Но поскольку $W' \neq W''$, то W''' является собственным подмножеством хотя бы одной из номенклатур W' и W'', что противоречит предположению о минимальности каждой из них. Следствие 6.1 доказано.

Приведем теперь некоторые свойства так определенного отображения $R \to W(R)$.

Свойство 1. *Монотонность* $W(R)$:

$$\textit{Если}\quad R' \subseteq R, \textit{ то } W(R') \subseteq W(R). \tag{28}$$

Доказательство свойства 1. Допустим противное; тогда, обозначив $W' = W(R') \cap W(R)$, получаем

$$W' \subset W(R'). \tag{29}$$

В силу леммы 6.1 W' — самопитающая номенклатура. Поскольку $R' \subseteq W(R')$ и $R' \subseteq R \subseteq W(R)$, то $R' \subseteq W'$. Поэтому W' — питающая номенклатура для R', а это противоречит строгому включению (29) и минимальности в определении полной ограничивающей номенклатуры $W(R')$. Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Аддитивность* $W(R)$:

$$W(R' \cup R'') = W(R') \cup W(R''). \tag{30}$$

Доказательству этого свойства предпошлем лемму:

Лемма 6.2. *Пусть* W', $W'' \subseteq \Omega$ — *самопитающие номенклатуры. Тогда номенклатура* $W''' = W' \cup W''$ — *самопитающая.*

Доказательство леммы 6.2. Пусть $j \in W'''$; тогда $j \in W'$ или $j \in W''$, а значит, согласно (26), соответственно $W_j \subseteq W'$ или $W_j \subseteq W''$, т. е. $W_j \subseteq W'''$. Лемма 6.2 доказана.

Доказательство свойства 2. Из свойства 1 следует

$$W(R') \subseteq W(R' \cup R'') \quad \text{и} \quad W(R'') \subseteq W(R' \cup R''),$$

а значит,

$$W(R') \cup W(R'') \subseteq W(R' \cup R''). \tag{31}$$

Остается доказать справедливость включения, обратного к (31). В силу леммы 6.2 $W(R') \cup W(R'')$ — самопитающая номенклатура и при этом, очевидно, $R' \cup R'' \subseteq W(R') \cup W(R'')$. Поэтому согласно требованию минимальности в определении полной питающей номенклатуры для $R' \cup R''$ должно иметь место включение

$$W(R' \cup R'') \subseteq W(R') \cup W(R''). \tag{32}$$

Соотношения (31) и (32) дают требуемое равенство (30). Свойство 2 доказано.

Свойству 2, очевидно, можно дать более общую по форме, но равносильную запись: для произвольного (конечного) семейства номенклатур $R^\nu \subseteq \Omega$

$$W\left(\bigcup_\nu R^\nu\right) = \bigcup_\nu W(R^\nu). \tag{33}$$

В частном случае в качестве R можно брать одноэлементную номенклатуру $R = \{j\}$, которую мы будем для краткости речи отождествлять с соответствующим продуктом j и производителем P_j. Рассматривая полную питающую номенклатуру для продукта j (производителя P_j), будем использовать упрощенное обозначение $W(j)$ (вместо $W(\{j\})$). Тогда очевидным следствием свойства 2 в форме (33) является следующее

Свойство 3. *Разложимость* $W(R)$:

$$W(R) = \bigcup_{j \in R} W(j). \tag{34}$$

Свойство 3 означает, что полную питающую номенклатуру для любой заданной номенклатуры R можно построить, просто объединив полные питающие номенклатуры составляющих R элементов-продуктов j (производителей P_j).

Всюду выше предполагалось, что для каждого элемента $j \in \Omega$ задана однозначным образом его питающая номенклатура W_j. Можно перенести все определения и, с надлежащими модификациями, все свойства, приведенные выше, на случай, когда W_j не единственно: для каждого $j \in \Omega$ может быть задано целое семейство питающих номенклатур W_j. А именно, в этом случае в базовом определении 6.2 самопитающей номенклатуры W будем считать, что для каждого $j \in \Omega$ взята произвольная, но фиксированная питающая номенклатура W_j. По-другому фиксируя питающие номенклатуры W_j, $j \in \Omega$, будем получать другие самопитающие номенклатуры W. Соответственно, появятся разные питающие номенклатуры для R (зависящие от фиксации W_j, $j \in \Omega$), и теперь уже будет, вообще говоря, несколько различных полных питающих номенклатур $W(R)$ для R (хотя при каждой конкретной фиксации W_j для каждого $j \in \Omega$ номенклатура $W(R)$ будет единственной). Наконец, свойства 1 — 3 нужно понимать теперь с учетом неединственности $W(R)$ как относящиеся к «одной реализации» исходных питающих номенклатур W_j. Например, свойство 3 тогда означает, что для любой полной питающей номенклатуры $W(R)$ можно указать такие полные питающие номенклатуры $W(j)$, $j \in R$ (получаемые при тех же фиксациях W_j, $j \in R$, что и $W(R)$), для которых справедливо разложение (34).

Вернемся к содержательной задаче о наращивании выпусков в производственной системе и воспользуемся введенными формальными структурными понятиями, конкретизируя их содержание, и в первую очередь — исходным понятием «питающая номенклатура» W_j для $j \in \Omega$. Вновь обратимся к задаче $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij},\ I;\ \alpha \rangle$ производителя P_j (21)—(23). Заметим, что при решении этой задачи производитель P_j, если он ненасыщен, приобретает дополнительные количества некоторых, но, вообще говоря, не всех дефицитных продуктов $i \in I$.

Номенклатуру таких дополнительно приобретаемых дефицитных продуктов (она может быть не единственной при неединственности решения $(y_j^\alpha,\ x_j^\alpha)$ указанной задачи) мы и будем сейчас рассматривать в роли питающей номенклатуры для производителя P_j (продукта j). Назовем ее «ограничивающей номенклатурой», имея в виду, что наращивание выпуска производителем P_j сдерживается по существу лишь ограниченными поставками именно этой номенклатуры. Точное определение «ограничивающей номенклатуры» требует более аккуратно учесть «асимптотический» характер (с параметром $\alpha \to 0$) рассматриваемой задачи потребителя P_j.

Определение 6.5. Непустая номенклатура $T_j \subseteq I$ называется *ограничивающей номенклатурой элемента P_j* в состоянии $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$, являющемся решением задачи $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij}, I\rangle$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при каждом $\alpha \in (0, \varepsilon]$ решение задачи $\langle j;\ \tilde{\xi}_{ij}, I, T_j;\ \alpha\rangle$ (или, для краткости $\langle j;\ \alpha, T_j\rangle$) вида

$$\begin{gathered}\Pi_j = \gamma_j y_j - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \xi_{ij} = \max,\\ (y_j, x_j) \in G_j,\\ \xi_{ij} \leqslant \tilde{\xi}_{ij}, \qquad i \in I \setminus T_j,\\ \sum_{i \in T_j} \gamma_i (\xi_{ij} - \tilde{\xi}_{ij})^{+} \leqslant \alpha\end{gathered} \tag{35}$$

— вектор (y_j^α, x_j^α) (хотя бы один — в случае неединственности решения этой задачи) удовлетворяет условию

$$\gamma_j (y_j^\alpha - \tilde{y}_j) \geqslant \alpha + \psi(\alpha) \quad \text{при всех} \quad \alpha \in (0, \varepsilon]$$

при некоторой неотрицательной неубывающей функции $\psi(\alpha)$.

Если такой номенклатуры не существует, то будем говорить, что ограничивающая номенклатура пуста.

Из сравнения определений 6.1 и 6.5 сразу же следует, что *элемент P_j насыщен в состоянии $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$ тогда и только тогда, когда ограничивающая номенклатура в этом состоянии пуста.*

Отметим, что у элемента P_j в одном и том же состоянии может быть несколько ограничивающих номенклатур. Более того, это всегда так, если T_j является собственным подмножеством множества I (т. е. $\varnothing \neq T_j \neq I$): как легко видеть, любая номенклатура T'_j, $T_j \subset T'_j \subseteq I$, также удовлетворяет определению 6.5. Указанной неединственности можно избежать, рассматривая лишь минимальную (по включению) из таких номенклатур. Вместе с тем не исключен случай «существенной» неединственности, когда имеются различные ограничивающие номенклатуры, удовлетворяющие определению 6.5 и не включенные одна в другую.

Явное введение ограничивающей номенклатуры позволяет указать следующее полезное свойство.

Свойство ненасыщенного элемента. Пусть нормальный элемент P_j ненасыщен в состоянии $(\tilde{y}_j, \tilde{x}_j)$. Тогда вектор (y_j^α, x_j^α) —

решение задачи (35) — является также решением задачи $\langle j;\ \xi_{ij}^{\alpha},\ I\rangle$ и задачи вида

$$\Pi_j = \gamma_j y_j - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \xi_{ij} \to \max,$$
$$\{y_j,\ x_j\} \in G_j,$$
$$\xi_{ij} \leqslant \tilde{\xi}_{ij} + (\xi_{ij}^{\alpha} - \tilde{\xi}_{ij})^{+}, \qquad i \in T_j, \tag{36}$$
$$\xi_{ij} \leqslant \tilde{\xi}_{ij}, \qquad i \in I \setminus T_j,$$

причем при $\alpha > 0$ имеет место неравенство

$$\Pi_j^{\alpha} > \tilde{\Pi}_j. \tag{37}$$

Доказательство свойства. Допустимое множество каждой из задач $\langle j;\ \xi_{ij}^{\alpha},\ I\rangle$ и (36), с одной стороны, включено в допустимое множество задачи (35), решением которой является вектор $(y_j^{\alpha},\ x_j^{\alpha})$, а с другой — содержит этот вектор. Поэтому $(y_j^{\alpha},\ x_j^{\alpha})$ является решением задач $\langle j;\ \xi_{ij}^{\alpha},\ I\rangle$ и (36). Наконец, при $\alpha > 0$ $(\tilde{y}_j,\ \tilde{x}_j) \neq (y_j^{\alpha},\ x_j^{\alpha})$, откуда и следует (37).

Определение 6.6. Примем ограничивающие номенклатуры T_j, $j \in I$, в качестве питающих номенклатур W_j из общих «структурных» определений 6.2—6.4. Получающиеся при этом самопитающие номенклатуры W и полные питающие номенклатуры $W(R)$ для $R \subseteq I$ будем называть *самоограничивающими* и *полными ограничивающими номенклатурами для* R и обозначать через T и $T(R)$ соответственно.

Утверждение 6.3. *Если в данном квазиравновесии* $\{(\tilde{y}_i,\ \tilde{x}_i)\}$ *для данной номенклатуры* $R \subseteq I$ *ее полная ограничивающая номенклатура* $T(R)$ *не содержит насыщенного производственного элемента, то возможно монотонное увеличение чистых выпусков всех продуктов при строгом увеличении чистых выпусков всех продуктов номенклатуры* R.

«Негативная» форма утверждения 6.3 для случая невозможности указанного увеличения чистых выпусков утверждает существование насыщенных элементов в $T(R)$ (а не просто в I), что дает более точную локализацию «узких мест» для такого наращивания производства по сравнению с общей задачей.

Приложение «структурных» свойств 1 — 3 к «ограничивающим» номенклатурам позволяет получать дополнительные выводы. Так, свойство 3 «аддитивной разложимости», приобретающее в этом случае форму

$$T(R) = \bigcup_{j \in R} T(j),$$

показывает, в частности, что суждение о возможности (либо невозможности) строгого монотонного наращивания чистых выпусков номенклатуры R в целом можно строить как логическую конъюнкцию (дизъюнкцию) суждений о возможности (невозможности) таких наращиваний для составляющих продуктов $j \in R$ по отдельности [1]).

Видоизменим теперь задачу наращивания выпусков, считая, что наряду с номенклатурой $R \subseteq I$, чистые выпуски которой требуется строго увеличить, задана номенклатура $Q \subseteq \Omega$ ($Q \cap R = \varnothing$) продуктов, которые считаются предоставляемыми извне в любых требуемых количествах. В этом случае примем в качестве питающих номенклатур W_j из определений 6.2—6.4 номенклатуры вида $T_j \setminus Q$, где T_j — ограничивающие номенклатуры.

Определение 6.7. Будем называть номенклатуры $T_j \setminus Q$, $j \in I$, *условно-ограничивающими.* Приняв их в качестве питающих номенклатур W_j, будем называть получаемые самопитающие номенклатуры W и полные питающие номенклатуры $W(R)$ для R *условно-самоограничивающими номенклатурами и полными условно-ограничивающими номенклатурами для R (при условии Q)* и обозначать через $T \setminus\!\setminus Q$ и $T(R) \setminus\!\setminus Q$ соответственно.

Символы $T \setminus\!\setminus Q$ и $T(R) \setminus\!\setminus Q$ (мы их называем иногда «двойными разностями» соответствующих множеств) отражают своеобразный «разностный» характер построения соответствующих множеств-номенклатур. Легко видеть, в частности, что $T(R) \setminus\!\setminus Q \subseteq T(R) \setminus Q$ (справа стоит обычная теоретико-множественная разность).

Утверждение 6.4. *Если даны квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ и номенклатуры $R \subseteq I$ и $Q \subseteq \Omega$ ($Q \cap R = \varnothing$), то при использовании внешних поставок продуктов номенклатуры Q строгое увеличение чистых выпусков номенклатуры R без снижения чистых выпусков всех остальных продуктов возможно, если в полной условно-ограничивающей номенклатуре $T(R) \setminus\!\setminus Q$ для R при условии Q нет насыщенных элементов.*

Мы придадим этому утверждению более конкретную форму, поставив следующую задачу немонотонного увеличения чистых выпусков (которая, собственно, и изучается далее в гл. VIII). Пусть наряду с номенклатурой $R \subseteq I$ «особо важных» продуктов указана номенклатура S ($S \cap R = \varnothing$) «менее важных» продуктов, чистые выпуски которых разрешается несколько снизить. Тогда это создает возможность направить на производство «особо важных» продуктов R часть высвобождаемых продуктов, куда входит как вся номенклатура S, так и другие продукты, которые ранее отвлекались на производство номенклатуры S.

[1]) Заметим, что «прямое» доказательство этого потребовало бы использования довольно тонких аналитических свойств задачи — нужно было бы показывать, что наращивание выпуска одного продукта «не портит» возможностей наращивания других.

Для точного описания номенклатуры таких «высвобождаемых ресурсов» нам понадобятся следующие определения.

Определение 6.8. Номенклатуру

$$Q_i = \{j \colon \tilde{\xi}_{ji} > 0\}$$

назовем *порождающей для элемента* P_i в состоянии $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$; продукты из номенклатуры Q_i будем именовать *порождающими.*

В соответствии с этим определением порождающую номенклатуру образуют все те продукты, которые элемент P_i потребляет в данном состоянии.

Определение 6.9. Пусть даны состояние $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, номенклатура S и (единственная) порождающая номенклатура Q_i для каждого элемента $i \in S$. Примем Q_i в качестве питающей номенклатуры W_i, $i \in S$. Получаемую при этом полную питающую номенклатуру $W(S)$ для S будем называть *полной порождающей номенклатурой для* S и обозначать ее через $Q(S)$.

Полная порождающая номенклатура $Q(S)$, как можно убедиться,— это и есть полная номенклатура тех продуктов, которые можно «высвободить» ценой снижения выпусков из S (доказательство этого дается в § 8.3).

Утверждение 6.5. *Пусть даны квазиравновесие* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$, *«особо важная» номенклатура* $R \subset I$ *и «маловажная» номенклатура* S $(S \cap R = \varnothing)$. *Тогда немонотонное изменение состояния со строгим увеличением чистых выпусков из* R *при ограниченном снижении чистых выпусков из* S *возможно, если в полной условно-ограничивающей номенклатуре* $T(R) \setminus Q(S)$ *для* R *при условии* $Q(S)$ *нет насыщенных элементов (где* $Q(S)$ *— полная порождающая номенклатура для* S*).*

«Негативные» формулировки утверждений 6.3, 6.4 дают необходимые условия неразрешимости соответствующих производственных задач, которые локализуют «узкие места» — насыщенные элементы — в соответствующих номенклатурах $T(R) \setminus Q$ и $T(R) \setminus Q(S)$. Использование «структурных» свойств аддитивной разложимости, в частности, как и ранее, позволяет свести анализ разрешимости общей задачи перестройки производства к соответствующим задачам для отдельных продуктов.

Развернутые формулировки и доказательства утверждений 6.3—6.5 приведены в гл. VII, VIII.

Все сказанное выше относилось к качественным методам направленных вариаций в задачах анализа производственной системы, изучения возможностей наращивания выпусков продукции и локализации «узких мест», препятствующих такому наращиванию. Модель производственной системы мы изучаем в этой книге наиболее детально. Сфера потребления, в отличие от сферы производства, описывается в этой книге «бесструктурной» моделью (состоящей по существу из одного элемента), и для модели потребителя получены не столь разнообразные результаты. Тем не менее методы качественных направленных вариаций мы применяем и для анализа потребления (гл. IX), и для «смешанного» анализа замкнутой производственно-потребительской системы (гл. X), и эти методы обнаруживают определенную «симметрию» понятий «узких мест» в производстве и в потреблении. Кратким изложением типичных утверждений такого рода в иллюстративных целях мы и завершим эту главу.

Утверждение 6.6. *Если набор продуктов $\tilde{x}$ при дефицитной номенклатуре I потребительски согласован и если спрос на каждый продукт из номенклатуры $R \subseteq I$ не удовлетворен:*

$$F_j^I(\tilde{x}_0) > \tilde{\xi}_{j0}, \qquad j \in R,$$

то найдется другой потребительски согласованный набор $\tilde{\tilde{x}}$ такой, что $\tilde{\tilde{\xi}}_i > \tilde{\xi}_i$ для всех $i \in R$ и $\tilde{\tilde{\xi}}_i \leqslant \tilde{\xi}_i$ для всех $i \notin R$.

Более того, если потребительский выбор порождается однокритериальной моделью с функцией полезности U, то при этом $U(\tilde{\tilde{x}}) > U(\tilde{x})$.

Утверждение 6.6 дает достаточное условие потребительски согласованного увеличения поставок продуктов из заданной номенклатуры R дефицитных продуктов. При таком увеличении, возможно, поставки остальных продуктов вне R придется несколько уменьшить — это связано с возможностью «разбалансировки» при снижении потребительского спроса на них, вызванного дополнительными поставками продуктов из R (если эти продукты являются их «заменителями»). Однако при этом гарантируется возрастание уровня потребительской полезности (если модель потребления исходит из максимизации полезности).

Отметим теперь, что «негативная» формулировка утверждения 6.6 дает необходимое условие невозможности потребительски согласованного увеличения поставок продуктов из заданной номенклатуры $R \subseteq I$ и этим условием является следующее: потребительский спрос хотя бы на один продукт $i \in R$ удовлетворен. Естественно трактовать такой продукт i с удовлетворенным спросом на него как «узкое место» в потреблении, препятствующее потребительски согласованному увеличению поставок продуктов.

В заключение приведем пример утверждения относительно условий потребительски согласованного и производственно реализуемого увеличения поставок конечной продукции в замкнутой экономической модели.

Утверждение 6.7. *Пусть дано равновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ и задана некоторая номенклатура R. Тогда другое равновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$ таким, что $\tilde{\tilde{\xi}}_{j0} > \tilde{\xi}_{j0}$ для всех $j \in R$,* *заведомо существует, если в состоянии* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *в полной ограничивающей номенклатуре* $T(R)$ *нет насыщенных элементов-производителей и если потребительский спрос на каждый продукт из номенклатуры* R *не удовлетворен.*

Это утверждение показывает, что сбалансированное увеличение поставок заданных продуктов возможно, если нет «узких мест» ни в их производстве (насыщенность элементов-производителей), ни в потреблении (удовлетворенный спрос). Заметим, что здесь речь идет только о дефицитных продуктах; увеличение выпусков недефицитных продуктов всегда возможно с производственной стороны, но наталкивается на удовлетворенный спрос с потребительской стороны.

Глава VII

МОНОТОННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВЫПУСКА КОНЕЧНОЙ ПРОДУКЦИИ

§ 7.1. Задачи о монотонных изменениях чистых выпусков

В этой главе мы рассматриваем один из двух основных для нас типов направленных вариаций квазиравновесных состояний производственной системы: монотонные изменения чистых выпусков в классе состояний квазиравновесия. (Другой, более общий тип направленных вариаций — немонотонные изменения — будет рассмотрен в гл. VIII). Под монотонными изменениями подразумеваются такие переходы от исходных квазиравновесий к новым, при которых приращения чистых выпусков всех продуктов имеют один знак, а точнее, либо все они неотрицательны — «монотонные увеличения», либо все неположительны — «монотонные уменьшения» чистых выпусков. Анализ условий монотонного увеличения чистых выпусков, которому посвящена бо́льшая часть этой главы, частично реализует изложенную в предыдущей гл. VI программу исследования внутренних возможностей наращивания производства в неравновесной системе. Направленные вариации квазиравновесных состояний производственной системы, приводящие к монотонному увеличению чистых выпусков продуктов, имеют очевидный экономически содержательный смысл: они направлены на более высокий уровень удовлетворения внешнего спроса — если такой спрос имеется. Несколько менее естественными с содержательных позиций, но важными с «технической» точки зрения являются вариации, приводящие к монотонным уменьшениям чистых выпусков. Такие вариации могут потребоваться для согласования выпуска продуктов со спросом на них в тех случаях, когда предыдущее наращивание производства привело к появлению избыточных количеств некоторых продуктов.

Задачи о монотонном увеличении чистых выпусков исследуются отдельно для недефицитных и для дефицитных продуктов, как это делалось при постановке таких задач в гл. VI. В § 7.2

дается доказательство теоремы об «универсальной» возможности квазиравновесного наращивания чистых выпусков всех недефицитных продуктов; никаких дополнительных условий для этого не требуется. Этот результат позволяет обосновать возможность «продуктивного» квазиравновесного режима любой производственной системы, для элементов-производителей которой производство является прибыльным.

В §§ 7.3, 7.5 формулируются и доказываются достаточные условия для возможности квазиравновесного наращивания чистых выпусков тех или иных совокупностей дефицитных продуктов. Эти условия сводятся к отсутствию насыщенных элементов в полной ограничивающей номенклатуре для искомых продуктов, и им придается «эффективный» характер. С этой целью приводится конструктивная рекуррентная процедура построения полной ограничивающей номенклатуры. Процедура имеет естественный экономический смысл качественного выявления структуры полных (не только прямых, но и косвенных) производственных затрат дефицитных продуктов. Насыщенный элемент, если он обнаруживается в ходе этой процедуры (а он обязательно обнаружится, если он вообще имеется), играет роль «узкого места» в структуре затрат, ограничивающих желаемое наращивание выпусков.

Само доказательство теорем о монотонном наращивании дефицитных продуктов можно рассматривать как описание «блочного» управления системой с целью перевода ее в желаемое состояние. Вся система расчленяется на три блока; первый блок составляют производители недефицитных продуктов, второй блок — элементы, производящие дефицитные продукты из самоограничивающей номенклатуры, а третий блок образуют все остальные элементы. Такое расчленение позволяет организовать перевод элементов из каждого блока в отдельности (т. е. независимо от элементов из других блоков) в такие состояния, которые обеспечат прирост чистых выпусков всех продуктов из самоограничивающей номенклатуры, и в то же время новое состояние всей системы в целом будет квазиравновесием.

Сравнивая состояния элементов в новом и старом квазиравновесиях, удается указать качественный характер изменения потоков продуктов внутри производственной системы. В частности, можно указать потоки, которые заведомо не возрастут, и тем самым локализовать те внутренние потоки, которые, возможно, придется увеличить при переводе системы в новое состояние.

В § 7.4 приводится обоснование возможности произвольного снижения уровней выпусков без выхода системы из состояний квазиравновесия.

При доказательстве теорем настоящей главы примем, без ограничения общности, что все цены $\gamma_i = 1$, $i = 1, \ldots, N$.

§ 7.2. Монотонное увеличение выпуска недефицитных продуктов

Этот параграф посвящен изучению условий, обеспечивающих возможность монотонного увеличения как полных, так и чистых выпусков недефицитных продуктов.

Как и всюду, будем считать, что производственная система, квазиравновесие которой изучается, является системой нормальных элементов (см. определение 2.5 в гл. II).

Покажем (теорема 7.1), что чистые выпуски недефицитных продуктов всегда можно несколько увеличить и при этом разбиение продуктов на дефицитные и недефицитные не изменяется.

Теорема 7.1. *Пусть в системе нормальных элементов существует квазиравновесие* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *с разбиением номенклатуры* Ω *на дефицитную* I *и недефицитную* K. *Тогда найдется такое число* $\varkappa > 0$, *что для любого вектора чистых выпусков* $\approx{x}_0$, *удовлетворяющего соотношениям*

$$\tilde{\xi}_{i0} \leqslant \approx{\xi}_{i0} \leqslant \tilde{\xi}_{i0} + \varkappa, \qquad i \in K, \tag{1}$$

$$\approx{\xi}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in I, \tag{2}$$

в системе существует квазиравновесие $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ *с той же дефицитной номенклатурой* I, *причем*

а) *при* $i \in K$ *имеют место соотношения*

$$\approx{\xi}_{ji} \geqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad j \in K; \qquad \approx{\xi}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}, \quad j \in I, \tag{3}$$

и все $\approx{\xi}_{ji}$ — *непрерывные функции от* $\approx{x}_0$;

б) *при* $i \in I$ *имеют место равенства*

$$(\approx{y}_i, \approx{x}_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i). \tag{4}$$

В соответствии с утверждением этой теоремы возможно увеличение чистых выпусков недефицитных продуктов без изменения выпусков дефицитных, причем так, что это будет приводить внутри системы лишь к увеличению потоков недефицитных продуктов. Внутренние потоки дефицитных продуктов (как и сама дефицитная номенклатура) при таком изменении квазиравновесия не изменяются.

Доказательство теоремы 7.1. Доказательство теоремы 7.1 будет проведено по следующей схеме. Во-первых, мы построим некий оператор, существование и свойства неподвижной точки которого обеспечат существование квазиравновесия, обладающего свойствами квазиравновесия из утверждения теоремы 7.1. Во-вторых, покажем, что этот оператор действительно имеет неподвижную точку с требуемыми свойствами, а именно, что он удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке сжимающего оператора (см., например, [16]).

Приведем такую формулировку этой теоремы, в которой она используется далее.

Рассмотрим замкнутое множество $M \subseteq R^N$, некоторое множество $D \subseteq R^N$ и оператор $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t)\colon\ M \times D \to R^N.$$

Вектор $t \in D$ играет роль параметра. Некоторую норму вектора $x \in R^N$ обозначим через $\|x\|$.

Теорема о неподвижной точке сжимающего оператора. Пусть оператор $\Psi(x, t)$ удовлетворяет условиям:

1. Оператор Ψ при каждом $t \in D$ является сжимающим на множестве M, т. е.

$$\|\Psi(x^1, t) - \Psi(x^2, t)\| \leqslant \alpha\|x^1 - x^2\| \tag{5}$$

для любых x^1, $x^2 \in M$, где константа сжатия α не зависит от t и удовлетворяет соотношению

$$0 \leqslant \alpha < 1. \tag{6}$$

2. Оператор Ψ при каждом $t \in D$ переводит множество M в себя:

$$\Psi(x, t) \in M \quad \text{при} \quad x \in M. \tag{7}$$

3. Оператор $\Psi(x, t)$ при каждом фиксированном $x \in M$ является непрерывным по t.

Тогда оператор $\Psi(x, t)$ при каждом t имеет на M единственную неподвижную точку $x^* = x^*(t)$, т. е.

$$x^*(t) = \Psi(x^*(t), t) \in M. \tag{8}$$

Эта неподвижная точка, рассматриваемая как функция от параметра t, является непрерывной функцией.

Замечание 7.1. Рассмотрим шар

$$M^1 = \{x \| x - \tilde{x}\| \leqslant r\}$$

радиуса r с центром в точке $\tilde{x}$ и сжимающий на M^1 оператор $\Psi(x, t)$, т. е. удовлетворяющий на M^1 соотношениям (5), (6) при каждом $t \in T$.

Тогда выполнение условия: при каждом $t \in T$

$$\|\Psi(\tilde{x}, t) - \tilde{x}\| \leqslant (1 - \alpha)r \tag{9}$$

— обеспечивает то, что оператор $\Psi(x, t)$ переводит множество M^1 в себя; при этом соотношение типа (7) принимает следующий вид:

$$\|\Psi(x, t) - \tilde{x}\| \leqslant r. \tag{10}$$

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы 7.1.

1. Для каждого $i \in K$ определим число $\widehat{y}_i$ следующим соотношением:

$$\widehat{y}_i = \frac{1}{2}\left(\widetilde{y}_i + \widetilde{y}_{i\max}\right). \tag{11}$$

Так как $\widetilde{y}_i < \widetilde{y}_{i\max}$, то в силу определения (11) имеем

$$\widetilde{y}_i < \widehat{y}_i < \widetilde{y}_{i\max}, \qquad i \in K. \tag{12}$$

Для всех $i \in K$ определим вектор (y_i, x_i) как решение задачи $\langle i;\ y_i,\ \xi_{ji},\ I\rangle$, где $0 \leqslant y_i \leqslant \widetilde{y}_{i\max}$ (поскольку $y_i \leqslant \widetilde{y}_{i\max}$, то в силу свойства нормального элемента y_i-я компонента решения задачи $\langle i;\ y_i,\ \widetilde{\xi}_{ji},\ I\rangle$ есть действительно y_i). Рассмотрим функцию $\Pi_i(y_i)$ — значение задачи $\langle i;\ y_i,\ \widetilde{\xi}_{ji},\ I\rangle$ на отрезке $[0,\ \widetilde{y}_{i\max}]$. Эта функция (согласно свойству нормального элемента) непрерывная, вогнутая и возрастающая на указанном отрезке. По известному свойству вогнутых функций (см., например, [29]) во всех точках $y_i \in [0,\ \widetilde{y}_{i\max})$ у функции существует правая производная $\Pi'_{i+}(y_i)$; в силу строгой монотонности $\Pi_i(y_i)$

$$\Pi'_{i+}(y_i) > 0, \qquad y_i \in \left[0,\ \widetilde{y}_{i\max}\right). \tag{13}$$

В то же время график функции $\Pi_i(y_i) \equiv y_i - \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_{ji}$ лежит под прямой $\bar{f}(y_i) = y_i$, поскольку $\sum\limits_{j=1}^{N} \xi_{ji} \geqslant 0$, причем $\Pi_i(0) = \bar{f}(0) = 0$. Поэтому в силу вогнутости функции $\Pi_i(y_i)$ и того факта, что производная $\bar{f}'(y_i) \equiv 1$, получаем

$$\Pi'_{i+}(0) \leqslant 1. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) следует

$$0 < \Pi'_{i+}(y_i) \leqslant 1, \qquad y_i \in \left[0,\ \widetilde{y}_{i\max}\right), \tag{15}$$

поскольку в силу вогнутости функции $\Pi_i(y_i)$ функция $\Pi'_{i+}(y_i)$ является невозрастающей функцией y_i.

Используя правые производные функций $\Pi_i(y_i)$, $i \in K$, и числа $\widehat{y}_i$, определяемые соотношением (11), положим

$$q = \min_{i \in \Omega \setminus I} \Pi'_{i+}\left(\widehat{y}_i\right). \tag{16}$$

Из соотношений (11) и (15) следует, что

$$0 < q \leqslant 1. \tag{17}$$

Используя число q и числа $\hat{y}_i$, $i \notin I$, определим число $\varkappa$, фигурирующее в утверждении теоремы 7.1, соотношением

$$\varkappa = \frac{1}{|\Omega \setminus I|} q \min_{i \notin I} \frac{1}{2} (\hat{y}_i - \tilde{y}_i), \tag{18}$$

где $|K|$ — количество элементов множества K. В силу соотношений (12) и (17) $\varkappa > 0$.

2. Введем норму $\|Y\|$ N-мерного вектора $Y = (y_1, \ldots, y_N)$ соотношением

$$\|Y\| = \sum_{l=1}^{N} |y_l| \tag{19}$$

и определим множество M как пересечение шара

$$M^1 = \{Y = (y_1, \ldots, y_N)\colon \|Y - \tilde{Y}\| \leqslant r\}, \quad \tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N), \tag{20}$$

радиуса

$$r = \min_{k \notin I} \frac{\hat{y}_k - \tilde{y}_k}{2} \tag{21}$$

с конусом

$$C = \{Y\colon\ y_i \geqslant \tilde{y}_i,\ i \notin I;\ y_i = \tilde{y}_i,\ i \in I\}, \tag{22}$$

т. е. рассмотрим множество $M = M^1 \cap C$, очевидно, являющееся выпуклым и компактным.

На этом множестве M рассмотрим оператор, определенный следующим образом. Каждому N-мерному вектору $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N) \in M$ поставим в соответствие совокупность решений задач $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \tilde{\xi}_{ji},\ I\rangle$:

$$\Pi_i = \max,$$
$$(y_i, x_i) \in G_i, \quad \xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}; \quad j \in I, \quad y_i \leqslant \bar{y}_i \tag{23}$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$; решение задачи (23) обозначим через $(\bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{x}}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Далее, N^2-мерному вектору $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_N)$ (совокупность N-мерных векторов $\bar{\bar{x}}_k = (\bar{\bar{\xi}}_{1k}, \ldots, \bar{\bar{\xi}}_{Nk})$, $k = 1, \ldots, N$) поставим в соответствие N-мерный вектор $z = (z_1, \ldots, z_N)$ с помощью формулы

$$z_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ik} + \approx{\xi}_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{24}$$

где числа $\overset{\approx}{\xi}_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, есть произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям (1) и (2).

Построения (23) и (24) позволяют определить оператор $\Psi = \Psi(\bar{Y}, \overset{\approx}{x}_0)$, зависящий от параметра — вектора $\overset{\approx}{x}_0 = (\overset{\approx}{\xi}_{10}, \ldots, \overset{\approx}{\xi}_{N0})$, в виде цепочки преобразований $\bar{Y} \to \{(\bar{\bar{y}}_i, x_i)\} \to z$.

Если доказать, что этот оператор удовлетворяет на M условиям теоремы о неподвижной точке сжимающего оператора, то в силу утверждения этой теоремы у оператора $\Psi(\overline{Y}, \approx{x}_0)$ существует его неподвижная точка — вектор Y^*:

$$Y^* = \Psi(Y^*, \overset{\approx}{x}_0) \in M, \tag{25}$$

причем этот вектор является непрерывной вектор-функцией параметра $\overset{\approx}{x}_0$.

3. Определим состояние каждого элемента P_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, как решение задачи (23) при $\bar{y}_i = y_i^*$ — т. е. при i-й компоненте неподвижной точки Y^*. Обозначим это решение через $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$. Совокупность таких состояний $\{(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)\}$ есть квазиравновесие, удовлетворяющее утверждениям доказываемой теоремы 7.1. Покажем это. Поскольку $Y^* \in M$, имеем согласно (19)—(22)

$$y_i^* = \tilde{y}_i, \qquad i \in I, \tag{26}$$

$$0 \leqslant y_i^* - \tilde{y}_i \leqslant \sum_{k=1}^{N} |y_k^* - \tilde{y}_k| \leqslant \frac{\hat{y}_i - \tilde{y}_i}{2}, \qquad i \in K. \tag{27}$$

Из (27) в силу определения (11) числа $\hat{y}_i$ получаем неравенства

$$\tilde{y}_i \leqslant y_i^* < \hat{y}_i < \tilde{y}_{i\,\max}, \qquad i \in K. \tag{28}$$

При $i \in I$ из (26) следует, что задачи $\langle i;\ y_i^*, \tilde{\xi}_{ji}, I\rangle$ и $\langle i;\ \tilde{y}_i, \tilde{\xi}_{ji}, I\rangle$ совпадают, а следовательно, в силу единственности их решения

$$(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) \quad \text{при} \quad i \in I. \tag{29}$$

Отметим, что вектор $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$, являющийся решением задачи $\langle i;\ \tilde{y}_i, \tilde{\xi}_{ji}, I\rangle$, есть также решение задачи $\langle i;\ \tilde{\xi}_{ji}, I\rangle$, так как $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ — исходное квазиравновесие в теореме 7.1. Но поскольку вектор $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ — решение задачи $\langle i;\ \tilde{y}_i, \tilde{\xi}_{ji}, I\rangle$, то согласно (29) вектор $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ является решением той же задачи, а следовательно, и совпадающей с ней задачи $\langle i;\ \overset{\approx}{\xi}_{ji}, I\rangle$ ($\overset{\approx}{\xi}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}$, $j \in I$, в силу (29)); напомним, что сказанное относится к $i \in I$.

При $i \in K$ из доказанного неравенства (28) и свойства 1, *б*) нормальных элементов (см. гл. II, § 2.2) получаем, что y-я компонента решения задачи $\langle i;\ y_i^*, \tilde{\xi}_{ji}, I\rangle$ совпадает с ограничением, так что с учетом левой части (28)

$$\tilde{y}_i \leqslant \overset{\approx}{y}_i = y_i^*, \qquad i \in K. \tag{30}$$

В то же время, согласно предположению 3 относительно технологического множества нормального элемента (см. гл. II), $\bar{\bar{\xi}}_{ji}$, $j = 1, 2, \ldots, N$,— это неубывающие функции ограничения $\bar{y}_i$ в задаче (23), а потому в силу (30) и определения векторов $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ имеем

$$\overset{\approx}{\xi}_{ji} \geqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad i \in K, \tag{31}$$

откуда, с учетом ограничений на ξ_{ji}, $j \in I$, в задаче (23), следует

$$\overset{\approx}{\xi}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}, \quad j \in I, \quad i \in K. \tag{32}$$

Из (30), (32) и определения вектора $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ как решения задачи $\langle i;\, y_i^*, \tilde{\xi}_{ij}, I\rangle$ следует, что вектор $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ при $i \in K$ есть решение задачи $\langle i;\, \overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{\xi}_{ji}, I\rangle$. Итак, мы доказали, что совокупность векторов $\{(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)\}$ удовлетворяет условию 1° в определении квазиравновесия 1.10 (§ 1.5) при дефицитной номенклатуре I, т. е. при той же самой, что и в исходном состоянии системы. Заметим теперь, что в силу (32) вектор $(\tilde{y}_{i\,\max}, \tilde{x}_{i\,\max})$ является решением задачи $\langle i;\, \overset{\approx}{\xi}_{ji}, I\rangle$, $i \in K$, а следовательно (в силу единственности решения этой задачи), справедливо равенство

$$\overset{\approx}{y}_{i\,\max} = \tilde{y}_{i\,\max}, \quad i \in K.$$

Из этого равенства и соотношений (30), (28) имеем

$$\overset{\approx}{y}_i < \overset{\approx}{y}_{i\,\max}, \quad i \in K,$$

т. е. состояния элементов P_i, $i \in K$, удовлетворяют предположению о состояниях элементов, производящих недефицитные продукты, которое должно выполняться в системе нормальных элементов (предположение 5 в § 2.3). Докажем теперь, что условие 2° из определения квазиравновесия также выполнено.

Из (24) в определении оператора Ψ имеем при $\bar{Y} = Y^*$, согласно (25), $y_i^* = \sum\limits_{k=1}^{N} \overset{\approx}{\xi}_{ik} + \overset{\approx}{\xi}_{i0}$ при всех $i, k = 1, 2, \ldots, N$ ($\bar{\bar{\xi}}_{ik}$ в данном случае есть $\overset{\approx}{\xi}_{ik}$). Это равенство в силу равенств в (26) и (30) есть не что иное, как доказываемое балансовое равенство

$$\overset{\approx}{y}_i = \sum_{k=1}^{N} \overset{\approx}{\xi}_{ik} + \overset{\approx}{\xi}_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{33}$$

Таким образом, состояние системы $\{(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)\}$ есть квазиравновесие с номенклатурой дефицитных продуктов I и вектором чистых выпусков $\overset{\approx}{x}_0$, удовлетворяющим (1), (2).

Для этого квазиравновесия выполнение соотношений (3) следует из (31) и (32), а соотношений (4) — из (29).

Непрерывность функций $\tilde{\tilde{\xi}}_{ji}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $i \in K$, как функций от вектора $\tilde{\tilde{x}}_0$ сразу же следует из непрерывности неподвижной точки Y^* по «параметру» $\tilde{\tilde{x}}_0$, имеющей место согласно теореме о неподвижной точке сжимающего отображения, и непрерывности ξ_{ji}-х компонент векторов $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$, рассматриваемых как функции от ограничений $\bar{y}_i = y_i^*$ задачи (23) (эта непрерывность следует из свойства 1 нормальных элементов).

Для доказательства теоремы осталось доказать, что оператор $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0)$ на M удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке сжимающего оператора.

4. Докажем, что оператор $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0)$ является сжимающим на M, т. е. удовлетворяет соотношениям типа (5).

Пусть $\bar{Y}^1$, $\bar{Y}^2$ — произвольные векторы из M. Поставим в соответствие вектору $\bar{Y}^1 = (\bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_i^1, \ldots, \bar{y}_N^1)$ совокупность решений $\{(\bar{\bar{y}}_i^1, \bar{\bar{x}}_i^1)\}$ задач типа (23) при $\bar{y}_i = \bar{y}_i^1$ и вектор $z^1 = (z_1^1, \ldots$ $\ldots, z_i^1, \ldots, z_N^1)$ с помощью соотношений типа (24), вектору $\bar{Y}^2$ соответственно совокупность решений $\{(\bar{\bar{y}}^2, \bar{\bar{x}}_i^2)\}$ и вектор z^2. Тогда в силу определения нормы вектора соотношением (19) имеем согласно (24)

$$\|\Psi(\bar{Y}^1, \tilde{\tilde{x}}_0) - \Psi(\bar{Y}^2, \tilde{\tilde{x}}_0)\| = \sum_{i=1}^{N} \left| z_i^1 - z_i^2 \right| = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{k=1}^{N} (\bar{\bar{\xi}}_{ik}^1 - \bar{\bar{\xi}}_{ik}^2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left| \bar{\bar{\xi}}_{ik}^1 - \bar{\bar{\xi}}_{ik}^2 \right| = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \bar{\bar{\xi}}_{ik}^1 - \bar{\bar{\xi}}_{ik}^2 \right|. \quad (34)$$

Для любого $k = 1, 2, \ldots, N$ имеет место одно из следующих неравенств:

либо

$$\bar{y}_k^1 \geqslant \bar{y}_k^2, \quad (35)$$

либо

$$\bar{y}_k^1 < \bar{y}_k^2. \quad (36)$$

Тогда в силу предположения о монотонности, имеющего место для нормальных элементов (см. гл. II), получим, что для каждого k

$$\bar{\bar{\xi}}_{ik}^1 \geqslant \bar{\bar{\xi}}_{ik}^2 \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots, N, \quad (37)$$

если выполнено (35), либо

$$\bar{\bar{\xi}}_{ik}^1 \leqslant \bar{\bar{\xi}}_{ik}^2 \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots, N, \quad (38)$$

если выполнено (36).

Как из (37), так и из (38) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \left| \bar{\bar{\xi}}_{ik}^{1} - \bar{\bar{\xi}}_{ik}^{2} \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{\bar{\xi}}_{ik}^{1} - \bar{\bar{\xi}}_{ik}^{2} \right) \right|, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{39}$$

Подставляя (35) в (30), получаем (после подстановки заменив индекс k на i, а i на j), что

$$\| \Psi (\overline{Y}^1, \tilde{\tilde{x}}_0) - \Psi (\overline{Y}^2, \tilde{\tilde{x}}_0) \| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{\bar{\xi}}_{ji}^{1} - \bar{\bar{\xi}}_{ji}^{2} \right) \right|. \tag{40}$$

Покажем теперь, что для любого $i = 1, 2, \ldots, N$

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{\bar{\xi}}_{ji}^{1} - \bar{\bar{\xi}}_{ji}^{2} \right) \right| \leqslant (1 - q) \left| \bar{y}_i^1 - \bar{y}_i^2 \right|, \tag{41}$$

где число q определено в (16).

При $i \in I$ из равенств $\tilde{y}_i = \bar{y}^1$ и $\tilde{y}_i = \bar{y}_i^2$, имеющих место в силу (22), и определения множества M следует $\bar{\bar{\xi}}_{ji}^{1} = \bar{\bar{\xi}}_{ji}^{2}$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, N$, а потому справедливость (41) очевидна.

При $i \in K$ из (20)—(22) с учетом (11) получаем, что для данного i

либо

$$\tilde{y}_i \leqslant \bar{y}_i^1 \leqslant \bar{y}_i^2 \leqslant \hat{y}_i < \tilde{y}_{i\,\max}, \tag{42}$$

либо

$$\tilde{y}_i \leqslant \bar{y}_i^2 < \bar{y}_i^1 \leqslant \hat{y}_i < \tilde{y}_{i\,\max}. \tag{43}$$

Рассмотрим значение $\Pi_i(\bar{y}_i)$ экстремальной задачи $\langle i;\ \bar{y}_i;$ $\tilde{\xi}_{ji},\ I \rangle$ при $\bar{y}_i = \bar{y}_i^1$ и $\bar{y}_i = \bar{y}_i^2$. Напомним, что согласно свойству 1 нормальных элементов (гл. II) $\Pi_i(\bar{y}_i) = \bar{\bar{y}}_i - \sum_{j=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ji}$ — вогнутая по $\bar{y}_i$ функция. В силу свойства вогнутых функций и определения числа q соотношением (16) имеем либо (при (42))

$$q (\bar{y}_i^2 - \bar{y}_i^1) \leqslant \Pi_i (\bar{y}_i^2) - \Pi_i (\bar{y}_i^1), \tag{44}$$

либо (при (43))

$$q (\bar{y}_i^1 - \bar{y}_i^2) \leqslant \Pi_i (\bar{y}_i^1) - \Pi_i (\bar{y}_i^2). \tag{45}$$

Заметим, что поскольку $\bar{y}_i^1 < \tilde{y}_{i\,\max}$, $\bar{y}_i^2 < \tilde{y}_{i\,\max}$, то в силу свойства 1, *б*) нормального элемента (гл. II) y-е компоненты решений задачи (23) при $\bar{y}_i = \bar{y}_i^1$ и $\bar{y}_i = \bar{y}_i^2$ совпадают с ограничениями, т. е. $\bar{\bar{y}}_i^1 = \bar{y}_i^1$ и $\bar{\bar{y}}_i^2 = \bar{y}_i^1$. Поэтому при выполнении (44) получим

$$q (\bar{y}_i^2 - \bar{y}_i^1) \leqslant (\bar{y}_i^2 - \bar{y}_i^1) - \left(\sum_{j=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ji}^{2} - \sum_{j=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ji}^{1} \right),$$

или

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\bar{\bar{\xi}}_{ji}^{2} - \bar{\bar{\xi}}_{ji}^{1} \right) \leqslant (1 - q) (\bar{y}_i^2 - \bar{y}_i^1), \tag{46}$$

а при выполнении (45) получим

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{\xi}_{ji}^{1}-\bar{\xi}_{ji}^{2}\right)\leqslant(1-q)\left(\bar{y}_i^1-\bar{y}_i^2\right). \tag{47}$$

Так как $1-q\geqslant 0$ согласно (17), то как при (46), так и при (47) получим справедливость (41).

Из (40) и (41) следует, что

$$\left\|\Psi\left(\bar{Y}^1, \tilde{\tilde{x}}_0\right)-\Psi\left(\bar{Y}^2, \tilde{\tilde{x}}_0\right)\right\|\leqslant(1-q)\sum_{i=1}^{N}\left|\bar{y}_i^1-\bar{y}_i^2\right|=\alpha\left\|\bar{y}^1-\bar{y}^2\right\| \tag{48}$$

при

$$\alpha=1-q. \tag{49}$$

Согласно (17) и (49)

$$0\leqslant\alpha<1, \tag{50}$$

поэтому выполнение (48) означает, что оператор Ψ — сжимающий.

Докажем, что оператор Ψ переводит множество M в себя. Если $\bar{Y}\in M$, то аналогично доказательству соотношений (29), (31), (32) получим справедливость соотношений

$$\bar{\bar{\xi}}_{ji}=\tilde{\xi}_{ji},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\quad i\in I, \tag{51}$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{ji}=\tilde{\xi}_{ji},\quad j\in I,\quad i\in K, \tag{52}$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{ji}\geqslant\tilde{\xi}_{ji},\quad j\in K,\quad i\in K. \tag{53}$$

Из (51) и (52), заменив в этих соотношениях i на k, а j на i, получим в силу (24) при $i\in I$

$$z_i=\sum_{k\in I}\bar{\bar{\xi}}_{ik}+\sum_{k\in K}\bar{\bar{\xi}}_{ik}+\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}=\sum_{k\in I}\tilde{\xi}_{ik}+\sum_{k\in K}\tilde{\xi}_{ik}+\tilde{\xi}_{i0}=\tilde{y}_i, \tag{54}$$

так как согласно (2) $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}=\tilde{\xi}_{i0}$ при $i\in I$ и

$$\tilde{y}_i=\sum_{k=1}^{N}\tilde{\xi}_{ik}+\tilde{\xi}_{i0}\ \text{для всех}\ i=1,2,\ldots,N. \tag{55}$$

Из (51) и (53), заменив i на k, а j на i, получаем в силу (24) при $i\in K$ с учетом (1) и (55), что

$$z_i=\sum_{k=1}^{N}\bar{\bar{\xi}}_{ik}+\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}\geqslant\sum_{k=1}^{N}\tilde{\xi}_{ik}+\tilde{\xi}_{i0}=\tilde{y}_i. \tag{56}$$

Из (54) и (56) следует, что $\Psi(\bar{Y},\ \tilde{\tilde{x}}_0)\in C$, где конус C определен в (22).

Докажем теперь, что $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0)$ принадлежит M^1 — шару, определенному соотношениями (20), (21). Для этого воспользуемся замечанием к теореме о неподвижной точке сжимающего оператора, согласно которому (см. (9)) достаточно показать, что

$$\|\Psi(\tilde{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0) - \tilde{Y}\| \leqslant (1-\alpha)r, \tag{57}$$

где $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_i, \ldots, \tilde{y}_N)$, r и α определены соотношениями (21) и (49).

Из определения векторов $(\bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{x}}_i)$ как решений задач (23) получаем при $\bar{y}_i = \tilde{y}_i$, $i = 1, \ldots, N$, что $\bar{\bar{x}}_i = \tilde{x}_i$, а потому (см. (24) и (55))

$$\|\Psi(\tilde{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0) - \tilde{Y}\| = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{k=1}^{N} \tilde{\xi}_{ik} + \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} - \tilde{y}_i \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left| \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0} \right| \leqslant |K| \cdot \varkappa \tag{58}$$

(в последнем неравенстве учтены соотношения (1), (2)). Из (58), (18) и (21) следует неравенство

$$\|\Psi(\tilde{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0) - \tilde{Y}\| \leqslant qr,$$

совпадающее в силу (49) с доказываемым неравенством (57). Таким образом, мы доказали, что $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0) \in M^1$ при $\bar{Y} \in$ M. С учетом ранее доказанной принадлежности вектора $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0)$ шару C получаем, что $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0) \in M^1 \cap C = M$.

Непрерывность оператора $\Psi(\bar{Y}, \tilde{\tilde{x}}_0)$ сразу же следует из линейности по $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}$ преобразования $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \to z$, определяемого соотношением (24), при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$. Итак, все условия теоремы о неподвижной точке сжимающего оператора действительно выполняются. Теорема 7.1 доказана.

Только что доказанная теорема о возможности монотонного увеличения выпусков недефицитных продуктов позволяет дать простое доказательство теоремы 2.2 из гл. II о существовании квазиравновесий с положительными чистыми выпусками всех продуктов. Действительно, такое «нетривиальное» квазиравновесие можно получить как результат монотонного увеличения выпусков в исходно взятом тривиальном квазиравновесии $\{(0, 0)\}$, в котором все продукты считаются недефицитными (это допускается условиями теоремы 2.2). Приведем это доказательство.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим тривиальное квазиравновесие: $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i) = (0, 0)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, N$ с множеством дефицитных продуктов $I = \varnothing$. В силу предположения 1 (гл. II) такое квазиравновесие всегда существует. Поскольку в таком квазиравновесии состояние $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ каждого элемента P_i есть решение следующей задачи (59)—(60):

$$\Pi_i = \max, \qquad (y_i, x_i) \in G_i, \tag{59}$$

$$y_i \leqslant \tilde{y}_i = 0, \tag{60}$$

то вектор $(\tilde{y}_{i\,\max}, \tilde{x}_{i\,\max})$ есть решение задачи (59), совпадающий, в силу единственности решения экстремальной задачи (59), с вектором $(y_{i\,\max}, x_{i\,\max})$. Для нормального элемента имеет место $y_{i\,\max} > 0$, поэтому

$$0 = \tilde{y}_i < \tilde{y}_{i\,\max} = y_{i\,\max}.$$

Это соотношение говорит о том, что продукт i действительно можно считать недефицитным, а поэтому квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.1.

Зафиксируем число $\varkappa$ из утверждения этой теоремы и выберем вектор $\bar{x}_0 = (\bar{\xi}_{10}, \ldots, \bar{\xi}_{N0})$ из утверждения доказываемой теоремы так:

$$\bar{\xi}_{i0} = \varkappa > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Тогда в силу утверждения теоремы 7.1 и того факта, что $K = \Omega$, всегда найдется квазиравновесие с произвольным вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$, удовлетворяющим соотношению (2.33). Теорема 2.2 доказана.

§ 7.3. Монотонное увеличение чистых выпусков дефицитных продуктов

В этом параграфе рассматривается вопрос о том, при каких условиях в системе наряду с данным квазиравновесием существует другое квазиравновесие с бóльшими чистыми выпусками тех или иных дефицитных продуктов.

Как утверждалось в гл. VI и как будет продемонстрировано ниже, увеличение выпуска дефицитных продуктов, в отличие от недефицитных, мы можем обеспечить лишь при наличии «особых» условий, а именно: при отсутствии в определенной части системы насыщенных элементов (§ 6.2). В роли такой подсистемы выступает полная ограничивающая номенклатура тех продуктов, возможность увеличения чистого выпуска которых изучается (§ 6.3).

Теорема 7.2. *Пусть производственная система нормальных элементов находится в квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ и дефицитной номенклатурой $I \neq \varnothing$. Пусть $T \subseteq I$ — некоторая самоограничивающая номенклатура, и пусть все элементы P_i, $i \in T$,— ненасыщенные.*

Тогда в системе существует такое квазиравновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i,\ \tilde{\tilde{x}}_i)\}$, *что*

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in T, \tag{61}$$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \notin T, \tag{62}$$

и в этом квазиравновесии потоки продуктов внутри системы удовлетворяют условиям

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}, \tag{63}$$

если

а) $\qquad i \in K, \quad j \in I,$

б) $\qquad i \in I \backslash T, \ j \in \Omega,$

и удовлетворяют условиям

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \tag{64}$$

если

в) $\qquad i \in T, \quad j \in I \backslash T,$

и

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \geqslant \tilde{\xi}_{ji} \tag{65}$$

если

г) $\qquad i \in K, \quad j \in K,$

(*где* K — *недефицитная номенклатура,* $\Omega = K \cup I$ — *полная номенклатура*).

Доказательство теоремы 7.2 будет приведено в § 7.5.

В теореме 7.2 указывается на те потоки продуктов внутри системы, которые заведомо не возрастут или, более того, заведомо останутся неизменными (соотношения (63) и (64)) либо, наоборот, могут лишь возрасти (65) при том способе монотонного увеличения выпусков, который употребляется в этой теореме (это не означает, что так будет при любом монотонном увеличении выпусков). Эти соотношения сведены в табл. 7.1, где знаки = находятся в клетках, которые соответствуют равенствам (63), знаки $\leqslant$ — неравенствам (64), а знаки $\geqslant$ — неравенствам (65).

Таблица 7.1.

j \ i	T	$I\backslash T$	K
T		=	=
$I\backslash T$	$\leqslant$	=	=
K		=	$\geqslant$

Эта таблица иллюстрируется рис. 7.1, где условно изображены направления потоков продуктов. На этом рисунке все элементы представлены в виде трех блоков: T, $I \backslash T$, K. Сплошная стрелка, соединяющая два блока, означает, что все потоки продуктов от элементов первого блока (исходного) к элементам второго блока (конечного) заведомо не возрастают, двойная сплошная стрелка —

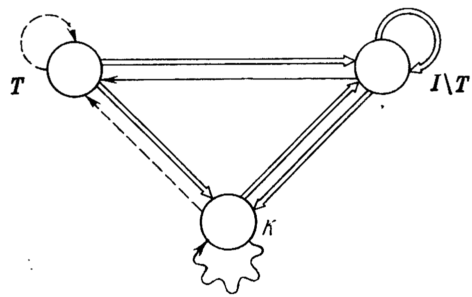


Рис. 7.1.

что все такие потоки остаются неизменными, а волнистая стрелка — что соответствующие потоки заведомо не уменьшатся. Из табл. 7.1 видно, что при переходе от одного квазиравновесия к другому могут возрастать (но не обязательно возрастают) лишь потоки внутри T, а также от K к T; на рис. 7.1 эти потоки обозначены пунктирными стрелками — это как раз те потоки, которые не вошли в (63)—(65).

Такой «блочный» подход к системе реализуется и в самом доказательстве теоремы 7.2. А именно, в этом доказательстве все производители $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_N$ разбиваются как раз на три вышеуказанных блока: K, T и $I \backslash T$. Все элементы из блока T в ходе построения переводятся в сбалансированные состояния, обеспечивающие бо́льшие чистые выпуски продуктов из T. При этом в новом состоянии элементам блока T может потребоваться некоторых продуктов больше, чем в исходном состоянии, но это могут быть лишь продукты из того же блока T и из «недефицитного» блока K; что же касается продукции блока $I \backslash T$, то ее потребуется заведомо не больше, чем ранее. Для покрытия увеличившейся потребности блока T в продукции блока K переведем все элементы блока K в новые состояния, существование которых гарантируется теоремой о монотонном увеличении выпусков недефицитной продукции. В новом состоянии блока K потребление дефицитных продуктов в этом блоке остается прежним. Все элементы блока $I \backslash T$ оставим в прежнем состоянии; потребность в продукции этого блока со стороны других блоков, переведенных в новые состояния, заведомо не возрастет. Совокупность новых состояний всех блоков образует квазиравновесие производственной системы в целом, поскольку состояние каждого элемента представляет собой решение соответствующей экстремальной задачи на максимум прибыли при соблюдении требуемых балансов по всем продуктам. Полученные при этом выпуски всех продуктов вовне производственной системы оказываются удовлетворяющими требуемым условиям (61) и (62).

Пусть теперь нам задано произвольное подмножество дефицитных продуктов $R \subseteq I$, не обязательно представляющее собой самоограничивающую номенклатуру. Пусть $T(R)$ — какая-либо полная ограничивающая номенклатура для R. Учитывая, что номенклатура $T(R)$ является самоограничивающей, в качестве непосредственного следствия из теоремы 7.2 получаем следующую теорему.

Теорема 7.3. (Достаточное условие монотонного увеличения конечного выпуска номенклатуры R.) *Пусть задано квазиравновесие системы нормальных элементов* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *с вектором чистых выпусков* $\tilde{x}_0$ *и задано множество* $R \subseteq I$. *Допустим, что полная ограничивающая номенклатура* $T(R)$ *для* R *(хотя бы одна, если их несколько) не содержит насыщенных элементов. Тогда существует квазиравновесие* $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$, *удовлетворяющее условиям* (61)—(65) *при* $T = T(R)$, *так что, в частности,*

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0} \quad \text{для всех} \quad i \in R.$$

Рассмотрим теперь вопрос об «эффективной» проверке условий теоремы 7.3. Дело в том, что изучение возможности увеличения конечного выпуска заданной номенклатуры дефицитных продуктов R требует построения полной ограничивающей номенклатуры $T(R)$ для R и выяснения, есть ли в $T(R)$ хотя бы один насыщенный элемент.

Данное в § 6.3 определение полной ограничивающей номенклатуры неконструктивно, а потому проверка условий теоремы 7.3 затруднена.

Эту трудность можно устранить, дав иное, конструктивное определение той же полной ограничивающей номенклатуры $T(R)$, с помощью следующей рекуррентной процедуры. Сначала в множество $T(R)$ включается само множество R, далее включается ограничивающая номенклатура T_i для каждого элемента P_i, $i \in R$; на последующих шагах в выстраиваемое множество включаются ограничивающие номенклатуры элементов, чьи индексы включены в это множество на предыдущем шаге. Поскольку каждая ограничивающая номенклатура является подмножеством дефицитной номенклатуры, то процедура построения полной ограничивающей номенклатуры заканчивается за конечное число шагов, не превышающее числа дефицитных продуктов.

Формально эта процедура, а вместе с тем и выстраиваемая ею полная ограничивающая номенклатура, задается следующим определением, эквивалентность которого первоначальному определению доказывается ниже (теорема 7.4).

Определение 7.1. Пусть система находится в квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I, и пусть задано подмножество $R \subseteq I$. Определим номенклатуры продуктов $T^0(R), T^1(R), \ldots$ $\ldots, T^k(R)$ соотношениями

$$T^0(R) \equiv R, \tag{66}$$

$$T^k(R) = \{j\colon\ j \in T_i,\ \ i \in T^{k-1}(R)\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где T_i — ограничивающая номенклатура элемента P_i в данном квазиравновесии.

Множество

$$T(R) = \bigcup_{k \geqslant 0} T^k(R) \tag{67}$$

будем называть *полной ограничивающей номенклатурой для* R. Подчеркнем, что хотя число множеств-«слагаемых» $T^k(R)$ в выражении (67) формально неограничено, но в действительности, как легко понять, всегда можно ограничиться конечным их числом, заведомо не превышающим числа всех дефицитных продуктов. Действительно, в силу конечности дефицитной номенклатуры, построение полного ограничивающего множества путем объединения множеств $T^0(R) \cup T^1(R) \cup T^2(R) \ldots$ заведомо оборвется на некотором шаге, когда каждый элемент, который мог бы быть теперь включен в выстраиваемое множество, либо уже был включен на одном из предыдущих шагов, либо оказывается насыщенным, а следовательно, его ограничивающее множество пусто.

Если элемент, включаемый в $T^k(R)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеет несколько ограничивающих номенклатур, то рассматривается какая-либо одна из них. Перебирая всевозможные комбинации ограничивающих номенклатур таких элементов, получим несколько «экземпляров» полных ограничивающих номенклатур — как это было и при исходном определении в § 6.3.

Приведем теперь пример, иллюстрирующий рекуррентную процедуру построения полной ограничивающей номенклатуры $T(R)$.

Пример 7.1. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 — производственные элементы, образующие систему нормальных элементов. Пусть в реализовавшемся квазиравновесии установлена дефицитная номенклатура $I = \{2, 3, 4, 5\}$; пусть в этом состоянии системы ограничивающие номенклатуры таковы: $T_2 = \{3, 5\}$, $T_3 = \{2, 4\}$, $T_4 = \varnothing$ (элемент P_4 насыщен) и $T_5 = \{3, 4\}$. В качестве R рассмотрим номенклатуру $\{4, 5\}$. Тогда $T^0(R) = \{4, 5\}$, $T^1(R) = \{3, 4\}$, $T^2(R) = \{2, 4\}$, $T^3(R) = \{3, 5\}$, т. е. $T(R) = \{2, 3, 4, 5\}$. Заметим также, что $T(4) = \varnothing$, а $T(5) = \{2, 3, 4, 5\}$. Процесс построения номенклатуры $T(4, 5)$ проиллюстрирован также рис. 7.2, на котором стрелка (P_j, P_i) означает, что $j \in T_i$.

Описанная итеративная процедура построения полной ограничивающей номенклатуры для R учитывает по существу структуру часто рассматриваемых в экономическом анализе «полных затрат» (как прямых, так и косвенных) ограничивающих продуктов, т. е. структуру «косвенных поставщиков» продуктов из $T(R)$.

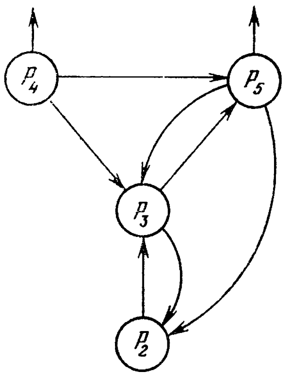


Рис. 7.2.

Эта процедура позволяет всегда (и даже, быть может, еще до построения всего множества $T(R)$) дать ответ на интересующий нас вопрос о наличии «узких мест» в такой структуре.

Построение полной ограничивающей номенклатуры заканчивается, когда на некотором шаге каждый элемент, который мог бы быть в нее включен, уже включен. Действительно, можно считать, что каждая «ветвь» древовидной структуры полных затрат, появляющейся в рекуррентной процедуре построения $T(R)$, обрывается либо при повторном появлении уже встречавшегося ранее элемента, либо при появлении насыщенного элемента. Именно тот случай, когда в ходе построения полной ограничивающей номенклатуры хотя бы в одном месте встречается насыщенный элемент, означает обнаружение «узкого места» с точки зрения интересующего нас монотонного увеличения чистых выпусков дефицитной номенклатуры R. Если же процедура построения $T(R)$ доводится до конца без обнаружения насыщенных элементов, то это гарантирует (в силу теоремы 7.3) возможность искомого увеличения.

В заключение докажем эквивалентность обоих определений полной ограничивающей номенклатуры $T(R)$.

Теорема 7.4. *Множества $T(R)$, выделяемые определениями* 6.6 *и* 7.1 *(или семейства таких множеств — в случае неединственности ограничивающих номенклатур), совпадают.*

Доказательство теоремы 7.4. Зафиксируем некоторую ограничивающую номенклатуру T_i каждого элемента P_i, $i \in I$, в квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I. Обозначим полную ограничивающую номенклатуру из определения 6.6 через $\bar{T}(R)$, а из определения 7.1 через $\bar{\bar{T}}(R)$ и покажем, что

$$\bar{T}(R)=\bar{\bar{T}}(R). \tag{68}$$

Из определения множества $\bar{\bar{T}}(R)$ сразу же следует, что $\bar{\bar{T}}(R)$ является самоограничивающей номенклатурой и $R \subseteq \bar{\bar{T}}(R)$, так что имеет место включение

$$\bar{\bar{T}}(R) \supseteq \bar{T}(R). \tag{69}$$

Поэтому остается показать, что $\bar{\bar{T}}(R)$ обладает свойством минимальности, т. е. что включение (69) не может быть строгим. Предположим противное: существует индекс i^* такой, что $i^* \in \bar{\bar{T}}(R)$, но $i^* \notin \bar{T}(R)$. Тогда согласно определению $\bar{\bar{T}}(R)$ должна существовать цепочка $i_0, i_1, \ldots, i_l$ такая, что $i_0 \in R$, $i_k \in T_{i_{k-1}}$ для $k=1, \ldots, l$ и $i_l = i^*$. Поскольку $i_0 \in \bar{T}(R)$, а $i_l \notin \bar{T}(R)$, то в этой цепочке должен найтись элемент i_s такой, что $i_s \in \bar{T}(R)$, а $i_{s+1} \notin \bar{T}(R)$. А это с учетом связи $i_{s+1} \in T_{i_s}$ противоречит самоограничиваемости множества $\bar{T}(R)$. Это противоречие и доказывает справедливость равенства (68). Теорема 7.4 доказана.

Замечание 7.2. Обратимся еще раз к свойству «аддитивности» полной ограничивающей номенклатуры

$$T(R) = \bigcup_{i \in R} T(i), \tag{70}$$

отмечавшемуся в § 6.3. Данное выше конструктивное определение полной ограничивающей номенклатуры делает соотношение (70) достаточно очевидным. Это соотношение позволяет сводить локализацию «узких мест» для наращивания выпуска номенклатуры R к более точной локализации «узких мест» для отдельных продуктов $i \in R$. Действительно, мы можем заранее провести конструктивную процедуру построения $T(i)$ с одновременным обнаружением «узких мест» (или констатацией отсутствия таковых) в $T(i)$. Тем самым для каждого дефицитного продукта i решится вопрос о наличии или отсутствии гарантии для возможности увеличения чистого выпуска продукта i без уменьшения остальных. Теорема 7.3 и соотношение (70) показывают, что этого вполне достаточно для того, чтобы предрешить вопрос о наличии или отсутствии такой гарантии для произвольной номенклатуры $R \subseteq I$. А именно, гарантия возможности одновременного монотонного увеличения чистых выпусков всех продуктов из R эквивалентна наличию такой гарантии для каждого продукта $i \in R$ по отдельности. Подчеркнем, что речь идет именно о «гарантиях», т. е. о достаточных условиях искомых монотонных увеличений.

§ 7.4. Монотонное уменьшение чистых выпусков

В этом параграфе показывается, что для любого квазиравновесия с ненулевым чистым выпуском найдется квазиравновесие с любым меньшим чистым выпуском (в векторно-покомпонентном смысле).

Теорема 7.5. *Пусть в системе нормальных элементов существует квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}_{\approx}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0 \geq 0$. Тогда для любого вектора x_0 такого, что*

$$0 \leqq \overset{\approx}{x_0} \leqq \tilde{x}_0, \tag{71}$$

существует квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ *с вектором чистых выпусков* $\tilde{\tilde{x}}_0$ *и такое, что*

$$\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\} \leqq \{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}. \tag{72}$$

В соответствии с соотношением (72) уменьшение чистых выпусков (см. (71)), предусматриваемое теоремой 7.5, приведет к сокращению некоторых потоков продуктов, причем ни один из потоков не увеличится.

Доказательство теоремы 7.5. Для каждого i $(i = 1, \ldots, N)$ определим множество

$$\bar{G}_i = \{(y_i, x_i) : (y_i, x_i) \in G_i,\ 0 \leqq x_i \leqq \tilde{x}_i,\ 0 \leqslant y_i \leqslant \tilde{y}_i\} \tag{73}$$

и по нему — множество $X_i = \{x_i : (y_i, x_i) \in \bar{G}_i$ при некотором $y_i\}$. Очевидно, что $\bar{G}_i$, а значит и X_i, есть непустое компактное выпуклое множество.

Рассмотрим выпуклое компактное множество $X = \prod_{i=1}^{N} X_i$ и определим однозначное отображение этого множества в себя как композицию следующих трех отображений:

1. Каждому N^2-мерному вектору $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_N) \in X$ поставим в соответствие N-мерный вектор $\hat{y} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, \hat{y}_N)$ по формуле

$$\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{N} \hat{\xi}_{ik} + \tilde{\tilde{\xi}}_{i0}, \tag{74}$$

где $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}$ — i-я компонента вектора $\tilde{\tilde{x}}_0$, фигурирующего в теореме 7.5.

2. Каждому вектору $\hat{y}$ поставим в соответствие набор $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i), i = 1, 2, \ldots, N\}$ $(N+1)$-мерных векторов, каждый из которых является решением задачи вида

$$\begin{gathered} \Pi_i = \max, \\ (y_i, x_i) \in G_i, \quad \xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad y_i \leqslant \hat{y}_i. \end{gathered} \tag{75}$$

3. Набору $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ поставим в соответствие N^2-мерный вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_N)$. Покажем, что отображение

$$\varphi(\hat{x}) : \hat{x} \to \hat{y} \to \{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\} \to \bar{x} \tag{76}$$

действительно является однозначным отображением множества X в себя. Однозначность следует из единственности решения задачи (75) (см. предположение 2 в гл. II) для нормальных элементов. Поэтому остается показать, что $\bar{x} \in X$, для чего достаточно проверить, что вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяет условиям (73). Этот факт устанавливается непосредственно из вида задачи (75), если показать, что

$$\hat{y}_i \leqslant \tilde{y}_i. \tag{77}$$

В этом неравенстве число $\hat{y}_i$ определено соотношением (74), а $\tilde{y}_i$ — балансовым равенством

$$\tilde{y}_i = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\xi}_{ik} + \tilde{\xi}_{i0}, \tag{78}$$

имеющим место в квазиравновесии. Из условий (73) (заменив в (73) индекс i на k) имеем, так как $\hat{x} \in X$, что

$$\hat{\xi}_{ik} \leqslant \tilde{\xi}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, N. \tag{79}$$

Из неравенств (79) и (71) следует с учетом (74) и (78), что

$$\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{N} \hat{\xi}_{ik} + \hat{\tilde{\xi}}_{i0} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \tilde{\xi}_{ik} + \tilde{\xi}_{i0} = \tilde{y}_i.$$

Неравенство (77), а с ним и требуемое соотношение $\bar{x} \in X$ установлены.

Отображение $\varphi(\hat{x})$ есть непрерывное на X отображение как композиция непрерывных отображений: непрерывность отображений $\hat{x} \to \hat{y}$ и $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\} \to \bar{x}$ очевидна, а непрерывность отображения $\hat{y} \to \{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ следует из свойства Н.1 (см. § 2.2).

Итак, однозначное непрерывное отображение $\varphi(x)$ преобразует компактное выпуклое множество $X \subset R^{N^2}$ в себя, т. е. оно удовлетворяет условиям теоремы Брауэра [29], формулировка которой приводится далее.

Теорема Брауэра. Однозначное непрерывное отображение $\varphi(x)$ компактного выпуклого множества X, принадлежащего евклидову пространству R^n, в себя имеет неподвижную точку

$$x^* = \varphi(x^*) \in X.$$

Рассмотрим теперь такое состояние системы $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$, что для каждого i вектор $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered} \Pi_i = \max, \\ (y_i, x_i) \in G_i, \\ \xi_{ji} \leqslant \xi^*_{ji}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \end{gathered} \tag{80}$$

где ξ^*_{ji} — соответствующие компоненты вектора x^*_i, неподвижной точки отображения φ.

Покажем, что так определенное состояние системы есть квазиравновесие, удовлетворяющее утверждению доказываемой теоремы 7.5, и тем самым докажем эту теорему.

Определим числа y_i^*, $i=1, 2, \ldots, N$, соотношениями

$$y_i^* = \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^* + \tilde{\tilde{\xi}}_{i0}. \tag{81}$$

Тогда в силу (77)

$$y_i^* \leqslant \tilde{y}_i, \tag{82}$$

поскольку (71) есть частный случай (74) при $\hat{\xi}_{ik} = \xi_{ik}^*$. Заметим теперь, что поскольку $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ есть решение задачи $\langle i;\ \tilde{y}_i, \tilde{\xi}_{ji}, \Omega\rangle$, то (см. гл. II, § 2.2)

$$\tilde{y}_i \leqslant \tilde{y}^{\Omega}_{i\,\max},$$

где $\tilde{y}^{\Omega}_{i\,\max}$ есть y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \tilde{\xi}_{ji}, \Omega\rangle$. Из этого неравенства и соотношения (82) следует $y_i^* \leqslant \tilde{y}^{\Omega}_{i\,\max}$. Тогда в силу свойства Н.1 (см. гл. II, § 2.2) получаем, что y_i^* есть y-я компонента решения задачи (75) при $\hat{y}_i = y_i^*$. В то же время ξ_{ji}^*, $j=1, 2, \ldots, N$, есть $\hat{\xi}_{ji}$-е компоненты решения этой задачи при $\hat{y}_i = y_i^*$, поскольку x^* есть неподвижная точка отображения φ из (76). Таким образом, вектор (y_i^*, x_i^*) есть решение задачи

$$\Pi_i = \max,$$
$$(y_i, x_i) \in G_i,$$
$$\xi_{ji} \leqslant \xi_{ji}^*, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$
$$y_i \leqslant y_i^*.$$

Но в силу свойства Н.3 этот же вектор есть решение задачи (80). Итак, для всех i $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i) = (y_i^*, x_i^*)$. Последние равенства означают, что состояние системы $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ удовлетворяет балансовым равенствам типа (81), а состояния отдельных элементов есть решения задач $\langle i;\ \tilde{\tilde{\xi}}_{ji}, \Omega\rangle$. Другими словами, состояние системы является квазиравновесием при $I=\Omega$. Выполнение нестрогого варианта соотношений (72) (с неравенством $\leqq$) сразу следует из (73), а в силу (71) и (81) оно заведомо полустрогое ($\lneq$). Теорема 7.5 доказана.

Теорема 7.5 важна для анализа возможных вариаций выпуска конечной продукции. Во-первых, именно благодаря этой теореме мы можем утверждать, что если существует монотонная вариация, при которой чистые выпуски продуктов из некоторого множества R возрастут, то обязательно существует такая вариация, при которой чистый выпуск одного продукта $i \in R$ возрастет, а чистые выпуски остальных продуктов из R останутся неизменными. Во-вторых, именно теорема 7.5 гарантирует нам возможность уменьшить чистые выпуски таких продуктов, спрос на которые недостаточен. Наконец, возможность снижения чистых выпусков части продуктов без выведения систем из класса состояний квазиравновесия может требоваться для «блочного» управления системой при необходимости согласования выпусков из одних блоков с изменяющимися производственными потребностями других блоков. Более подробно об этом будет рассказано в гл. VIII.

Подчеркнем, что существенная нетривиальность теоремы о возможности монотонного уменьшения чистых выпусков обусловлена требованием квазиравновесности состояния системы. Если этого требования не выдвигать, то возможность уменьшения чистых выпусков в классе лишь технологически реализуемых (сбалансированных), но не обязательно квазиравновесных состояний устанавливается гораздо проще [1]).

В качестве приложения теоремы 7.5 приведем формулировку «уточненной» теоремы о возможности монотонного увеличения чистых выпусков продуктов в заданной номенклатуре P (включающей, вообще говоря, и дефицитные, и недефицитные продукты) при сохранении чистых выпусков всех остальных продуктов на прежнем уровне и при сохранении квазиравновесности системы в целом. Приводимая формулировка представляет собой обобщенную сводку теорем 7.1, 7.3 и 7.5, и ее справедливость непосредственно вытекает из этих теорем.

Теорема 7.6. *Пусть в системе нормальных элементов реализовалось квазиравновесие с дефицитной номенклатурой I и вектором чистого выпуска $\tilde{x}_0$. Пусть задана некоторая произвольная номенклатура продуктов $P \subseteq \Omega$, и пусть в данном квазиравновесии в полной ограничивающей номенклатуре $T(R)$, где $R = P \cap I$, нет насыщенных элементов. Тогда в системе найдется квазиравновесие, в котором вектор чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0 = (\tilde{\tilde{\xi}}_{10}, \ldots, \tilde{\tilde{\xi}}_{N0})$ удовлетворяет соотношениям*

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in P,$$
$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \notin P.$$

---

[1]) Можно воспользоваться, например, допустимостью «спуска» от точки (y_i, x_i) к $(0, 0)$ по лучу в пределах выпуклого технологического множества G_i — подобно тому, как это делалось в § 2.2 при доказательстве существования технологически реализуемого продуктивного режима системы нормальных элементов (теорема 2.1). Если же каждое множество G_i удовлетворяет «условию свободного расходования» [29], т. е., в частности, наряду с точкой (y_i, x_i) содержит каждую точку (y_i^1, x_i) с $0 \leqslant y_i^1 < y_i$ (что означает технологическую допустимость «недопроизводства» или «выбрасывания» производимого продукта), то возможность любого уменьшения чистых выпусков без требования квазиравновесности становится тривиальной.

§ 7.5. Доказательства утверждений о монотонном увеличении

Этот параграф носит вспомогательный характер. Он содержит ряд вспомогательных утверждений относительно свойств ненасыщенного элемента, лемму о возможности увеличения выпуска продуктов из произвольного подмножества полной ограничивающей номенклатуры, а также опирающееся на эту лемму доказательство теоремы 7.2 из § 3 настоящей главы.

Лемма 7.1. *Пусть элемент P_i — ненасыщенный и $V_i(\alpha)$ — множество таких решений экстремальной задачи $\langle i;\ \tilde{\xi}_{ji},\ I,\ T_i;\ \alpha\rangle$ при некотором $T_i \subseteq I$ и некотором $\alpha \in [0, \varepsilon]$, что выполнено соотношение* (6.24) *при $j = i$.*

Тогда

а) *$V_i(\alpha)$ — выпуклое множество при каждом $\alpha \in [0, \varepsilon]$;*

б) *точечно-множественное отображение $\alpha \to V_i(\alpha)$ является замкнутым и ограниченным*[1]) *на* $[0, \varepsilon]$.

Справедливость этого утверждения следует из предложения 17.1 в [24]. Однако для нашего частного случая проще непосредственно доказать это утверждение, чем проверить выполнение условий указанного предложения.

Доказательство леммы 7.1. Справедливость утверждения а) леммы следует из свойств множества максимумов вогнутой функции $\Pi_i = y_i - \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_{ji}$ на выпуклом множестве, определяемом условиями задачи (6.35) при фиксированном α. (Заметим, что множество

$$X_i^\alpha = \left\{x_i = (\xi_{1i}, \ldots, \xi_{Ni}) : \sum_{j=1}^{N} (\xi_{ji} - \tilde{\xi}_{ji})^+ \leqslant \alpha\right\}$$

выпукло, так как функция $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} (\xi_{ji} - \tilde{\xi}_{ji})^+$ — сумма выпуклых функций вида $(\xi_{ji} - \tilde{\xi}_{ji})^+$ — выпукла.)

Докажем теперь выполнение утверждения б).

Примем, что функция $\psi(\alpha)$, фигурирующая в определении 6.1 (см. соотношение (6.24)), непрерывна на $[0, \varepsilon]$ и $\psi(0) = 0$ — это,

---

[1]) Напомним, что точечно-множественное отображение $\varphi(x) : X \to Y$, т. е. отображение, когда некоторой точке $x \in X$ в соответствие ставится некоторое множество $\varphi(x) \subseteq Y$, называется *замкнутым* на X, если из выполнения условий $\lim\limits_{\nu\to\infty} x^\nu = x^0$, где $x^0 \in X$, $x^\nu \in X$, и $\lim\limits_{\nu\to\infty} y^\nu = y^0$, где $y^\nu \in \varphi(x^\nu)$ при всех ν, следует $y^0 \in \varphi(x^0)$. Отображение φ называется *ограниченным* на X, если $\varphi(X)$ — ограниченное множество. Основные сведения о точечно-множественных отображениях можно найти, например, в [24].

как уже отмечалось, не ограничивает общности функций типа ψ при выполнении условий ненасыщенности элемента P_i.

Ниже в доказательстве для упрощения обозначений будем всюду опускать индекс i. Обозначим задачу (6.35) через $\langle\alpha, T\rangle$.

Ограниченность отображения $V(\alpha)$ сразу же следует из ограниченности технологического множества G.

Предположим, что утверждение б) леммы 7.1 о замкнутости отображения $\alpha\to V(\alpha)$ неверно. Это означает, что найдутся такая последовательность α^n, сходящаяся к α^*, и такая последовательность векторов $z^n = \left(y^{\alpha^n}, x^{\alpha^n}\right) \in V\left(\alpha^n\right)$, сходящаяся к некоторому вектору $z^* = (y^*, x^*)$, что

$$z^* = (y^*, x^*) \notin V(\alpha^*). \tag{83}$$

Вектор z^* удовлетворяет ограничениям задачи $\langle\alpha^*, T\rangle$ и условию $y^* - \tilde{y}_i \geqslant \alpha^* + \psi(\alpha^*)$. (Этот факт немедленно становится очевидным, если вектор z^n подставить в ограничения задачи $\langle\alpha^n, T\rangle$ и в соотношение (6.24) при $\alpha = \alpha^n$ и перейти к пределу при $n\to\infty$.) Поэтому соотношение (83) означает, что вектор (y^*, x^*) не есть решение задачи $\langle\alpha^*, T\rangle$, а существует другой вектор $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{x})$, который принадлежит $V(\alpha^*)$, т. е.

$$\Pi\left(\hat{z}\right) = \hat{y} - \sum_{j=1}^{N} \hat{\xi}_j > \Pi(z^*) = y^* - \sum_{j=1}^{N} \xi_j^*.$$

Положим

$$\varkappa = \Pi(\hat{z}) - \Pi(z^*) > 0. \tag{84}$$

Тогда в силу непрерывности функции $\Pi(z)$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$

$$\left|\Pi\left(z^n\right) - \Pi(z^*)\right| < \frac{1}{2}\varkappa. \tag{85}$$

Из соотношений (84) и (85) следует, что для всех $n > N$

$$\alpha^n < \alpha^*. \tag{86}$$

Действительно, если бы неравенство (86) не имело места, то тогда вектор $\hat{z}$ был бы допустим для задачи $\langle\alpha^n, T\rangle$, так что

$$\Pi(z^n) \geqslant \Pi(\hat{z}),$$

что противоречит соотношениям (84) и (85).

Рассмотрим число

$$\alpha^\lambda = \frac{2}{3}\alpha^* + \frac{1}{3}\alpha^n. \tag{87}$$

для некоторого $n > N$. Из (86) следует, что $\alpha^\lambda < \alpha^*$. Тогда существует такой номер $m > n$, что

$$\alpha^\lambda < \alpha^m < \alpha^*. \tag{88}$$

Рассмотрим теперь вектор
$$z^{\lambda}=\frac{2}{3}\hat{z}+\frac{1}{3}z^{n}.$$

Этот вектор допустим для задачи $\langle\alpha^m, T\rangle$, решением которой является вектор z^m; поэтому в силу (87), (88)
$$\Pi(z^m)\geqslant\Pi(z^{\lambda})=\frac{2}{3}\Pi(\hat{z})+\frac{1}{3}\Pi(z^n). \tag{89}$$

Воспользовавшись неравенствами (84), (85), из (89) получаем
$$\Pi(z^m)>\frac{2}{3}(\Pi(z^*)+\varkappa)+\frac{1}{3}\left(\Pi(z^*)-\frac{\varkappa}{2}\right)=\Pi(z^*)+\frac{1}{2}\varkappa.$$

Полученное неравенство противоречит соотношению (85), так как согласно определению номер m больше номера $n>N$. Это противоречие и доказывает справедливость утверждения б) леммы. Лемма 7.1 доказана.

Рассмотрим номенклатуру L такую, что
$$L\subseteq T, \tag{90}$$

где T есть самоограничивающая номенклатура в квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с множеством дефицитных продуктов I и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ в системе нормальных элементов.

Ниже нам понадобится множество векторов $X(\theta, \tau)$, введенное соотношением
$$X(\theta,\tau)=\left\{z:\ z\geqq 0,\ \theta\leqslant\sum_{\substack{j\in T\\ i\in L}}(\xi_{ji}-\tilde{\xi}_{ji})^{+}\leqslant\tau\right\}, \tag{91}$$

где $z=\{\xi_{ji},\ j\in T,\ i\in L\}$, а θ и τ — произвольные числа, связанные соотношением
$$0<\theta\leqslant\tau. \tag{92}$$

Лемма 7.2. *Множество $X(\theta, \tau)$ есть компактное множество, гомеоморфное выпуклому.*

Доказательство леммы 7.2. Компактность множества $X(\theta, \tau)$ очевидна. Докажем, что множество $X(\theta, \tau)$ гомеоморфно выпуклому множеству
$$\begin{gathered}\hat{X}(\theta,\tau)=\Big\{\hat{z}=\{\hat{\xi}_{ji},\ j\in T,\ i\in L\}:\ \hat{z}\geqq 0,\\ \theta\leqslant\sum_{\substack{j\in T\\ i\in L}}\Delta\hat{\xi}_{ji}\leqslant\tau\Big\},\quad \Delta\hat{\xi}_{ji}=\hat{\xi}_{ji}-\tilde{\xi}_{ji}.\end{gathered} \tag{93}$$

С этой целью необходимо показать, что существует такое взаимно однозначное непрерывное отображение φ множества $X(\theta, \tau)$ на множество $\hat{X}(\theta, \tau)$, что обратное к нему отображение Ψ также является непрерывным. Чтобы доказать взаимную однозначность отображения φ: $X(\theta, \tau) \to \widehat{X}(\theta, \tau)$ и тот факт, что φ есть отображение $X(\theta, \tau)$ на $\widehat{X}(\theta, \tau)$, достаточно показать справедливость соотношений $\varphi(\Psi(y)) = y$ для каждого $y \in \widehat{X}(\theta, \tau)$ и $\Psi(\varphi(x)) = x$ для каждого $x \in X(\theta, \tau)$.

Для каждой точки z определим множества индексов $I_i^+(z)$, $I_i^-(z)$ и числа $a^+(z)$, $a^-(z)$:

$$I_i^+(z) = \{j \in T : \Delta\xi_{ji} \geqslant 0\}, \quad I_i^-(z) = \{j \in T : \Delta\xi_{ji} < 0\}, \tag{94}$$

$$a^+(z) = \sum_{\substack{i \in L \\ j \in I_i^+(z)}} \Delta\xi_{ji}, \quad a^-(z) = \sum_{\substack{i \in L \\ j \in I_i^-(z)}} |\Delta\xi_{ji}|. \tag{95}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{\substack{i \in L, \\ j \in T}} (\Delta\xi_{ji})^+ = a^+(z)$, так что в силу определения множества $X(\theta, \tau)$

$$0 < \theta \leqslant a^+(z) \leqslant \tau \quad \text{для всех} \quad z \in X(\theta, \tau). \tag{96}$$

Отображение φ: $z \to \widehat{z}$, где $\widehat{z} = \{\widehat{\xi}_{ji}\}$, $j \in T$, $i \in L$, $z \in X(\theta, \tau)$, определим так:

$$\widehat{\xi}_{ji} = \begin{cases} \xi_{ji}, & j \in I_i^-(z), \\ \xi_{ji} + \left(\xi_{ji} - \widetilde{\xi}_{ji}\right) \cdot \dfrac{a^-(z)}{a^+(z)}, & j \in I_i^+(z). \end{cases} \tag{97}$$

Заметим, что в силу неотрицательности $a^-(z)$ (см. (95)) для всех $i \in L$ справедливы соотношения

$$I_i^+(\widehat{z}) = I_i^+(z), \quad I_i^-(\widehat{z}) = I_i^-(z), \tag{98}$$

$$a^-(\widehat{z}) = a^-(z), \quad a^+(\widehat{z}) = a^+(z) + a^-(z). \tag{99}$$

В силу (96) $a^+(z) > 0$ при $z \in X(\theta, \tau)$ и, следовательно, отображение $\varphi(z)$ определено для всех $z \in X(\theta, \tau)$. Подсчитаем сумму

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} \Delta\widehat{\xi}_{ji} = \sum_{\substack{i \in L \\ j \in I_i^-(z)}} \Delta\widehat{\xi}_{ji} + \sum_{\substack{i \in L \\ j \in I_i^+(z)}} \Delta\widehat{\xi}_{ji} =$$

$$= \sum_{\substack{i \in L \\ j \in I_i^-(z)}} \Delta\xi_{ji} + \left(\sum_{\substack{i \in L \\ j \in I_i^+(z)}} \Delta\xi_{ji}\right)\left(1 - \frac{a^-(z)}{a^+(z)}\right) =$$

$$= -a^-(z) + a^+(z) + a^-(z) = a^+(z). \tag{100}$$

Таким образом, в силу (96) $\widehat{z} = \varphi(z) \in \widehat{X}(\theta, \tau)$ при каждом $z \in X(\theta, \tau)$, так что φ есть отображение множества $X(\theta, \tau)$ в $\widehat{X}(\theta, \tau)$. Непрерывность этого отображения очевидна в силу непрерывности сумм $a^+(z)$, $a^-(z)$, определенных соотношениями (95), и левой части неравенства (96).

Зададим отображение $\Psi(\hat{z})$: $\hat{z} \to z$, $\hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau)$, следующим образом:

$$\xi_{ji} = \begin{cases} \hat{\xi}_{ji}, & j \in I_i^-(\hat{z}), \\ \hat{\xi}_{ji} - (\hat{\xi}_{ji} - \tilde{\xi}_{ji}) \cdot \dfrac{a^-(\hat{z})}{a^+(\hat{z})}, & j \in I_i^+(\hat{z}). \end{cases} \tag{101}$$

Заметим, что для этого отображения $\Psi(\hat{z})$ справедливы соотношения (99), причем здесь $0 < \theta \leqslant \sum\limits_{i \in L, j \in T} \Delta\hat{\xi}_{ji} \leqslant a^+(\hat{z})$ для каждого $\hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau)$.

Непрерывность этого отображения устанавливается аналогично непрерывности отображения $\varphi(z)$.

Из определения (101) вытекает, что если $\hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau)$, то

$$\xi_{ji} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad j \in T, \ i \in L, \tag{102}$$

так как при $\hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau)$

$$1 - \frac{a^-(\hat{z})}{a^+(\hat{z})} = \frac{\sum\limits_{j \in T, i \in L} \Delta\hat{\xi}_{ji}}{a^+(\hat{z})} \geqslant \frac{\theta}{a^+(\hat{z})} > 0.$$

Подсчитаем сумму

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} (\Delta\xi_{ji})^+ = \sum_{\substack{j \in I_i^-(\hat{z}) \\ i \in L}} (\Delta\xi_{ji})^+ + \sum_{\substack{j \in I_i^+(\hat{z}) \\ i \in L}} (\Delta\xi_{ji})^+ = \sum_{\substack{j \in I_i^+(\hat{z}) \\ i \in L}} (\Delta\xi_{ji}); \tag{103}$$

в последнем равенстве учтено, что по определению (94) множества $I_i^-(\hat{z})$

$$\sum_{\substack{j \in I_i^-(\hat{z}) \\ i \in L}} (\Delta\xi_{ji})^+ = 0.$$

Из соотношений (103) и (101) следует

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} (\Delta\xi_{ji})^+ = \sum_{\substack{j \in I_i^+(\hat{z}) \\ i \in L}} \Delta\xi_{ji} = \left(\sum_{\substack{j \in I_i^+(\hat{z}) \\ i \in L}} \Delta\hat{\xi}_{ji}\right)\left(1 - \frac{a^-(\hat{z})}{a^+(\hat{z})}\right) =$$

$$= a^+(\hat{z}) - a^-(\hat{z}) = \sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} \Delta\hat{\xi}_{ji}. \tag{104}$$

Отсюда, в частности, следует выполнение соотношений (100) при отображении (101). Из (104), имея в виду, что $\hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau)$, получаем

$$\theta \leqslant \sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} (\Delta \xi_{ji})^+ \leqslant \tau,$$

т. е. (см. (102) и (91)) $\Psi(\hat{z}) \in X(\theta, \tau)$ при $\hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau)$. Для доказательства гомеоморфизма осталось показать, что

$$\varphi(\Psi(\hat{z})) = \hat{z} \quad \text{для всех} \quad \hat{z} \in \hat{X}(\theta, \tau), \tag{105}$$

$$\Psi(\varphi(z)) = z \quad \text{для всех} \quad z \in X(\theta, \tau). \tag{106}$$

Для доказательства (105) подставим в правую часть определения (97) вместо ξ_{ji} его выражение из (101) и покажем, что левая часть равна исходному $\hat{\xi}_{ji}$.

Для всех $j \in I_i^-(\hat{z})$, $i \in L$, этот факт очевиден в силу (99). Пусть теперь $j \in I_i^+(\hat{z})$. Тогда из равенства

$$\xi_{ji} + \Delta\xi_{ji}\left(\frac{a^-(z)}{a^+(z)}\right) = \tilde{\xi}_{ji} + \Delta\xi_{ji}\left(1 + \frac{a^-(z)}{a^+(z)}\right)$$

получим

$$\tilde{\xi}_{ji} + \Delta\hat{\xi}_{ji}\left(\frac{a^-(\hat{z})}{a^+(\hat{z})}\right) = \tilde{\xi}_{ji} + \Delta\hat{\xi}_{ji}\left(1 - \frac{a^-(\hat{z})}{a^+(\hat{z})}\right)\left(1 + \frac{a^-(\hat{z})}{a^+(\hat{z})}\right) = \\ = \tilde{\xi}_{ji} + \Delta\hat{\xi}_{ji} = \hat{\xi}_{ji}, \tag{107}$$

поскольку в силу тождества (100) справедливо соотношение

$$\left(1 + \frac{a^-(z)}{a^+(z)}\right) \cdot \left(1 - \frac{a^-(z)}{a^+(z)}\right) = 1. \tag{108}$$

Соотношение (105) доказано. Для доказательства соотношения (106) подставим в правую часть (101) вместо $\hat{\xi}_{ji}$ их выражение из (97) и, используя (108) и (99), совершенно аналогично докажем справедливость соотношения (106). Лемма 7.2 доказана.

Лемма 7.3. *Пусть даны квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы нормальных элементов и самоограничивающая номенклатура $T \subseteq I$. Пусть все элементы P_i, $i \in L$, где L удовлетворяет условию* (90), *ненасыщенные. Тогда для любого числа $\tau > 0$ существуют состояния (y_i^*, x_i^*) элементов P_i, $i \in L$, которые удовлетворяют условиям:*

1) *вектор (y_i^*, x_i^*), $i \in L$, есть решение, во-первых, экстремальной задачи $\langle i;\ \xi_{ji}^*,\ I\rangle$ и, во-вторых, экстремальной задачи $\langle i;\ \alpha,\ T_i\rangle$*

при некотором ограничивающем множестве T_i *и таком* α, *что*

$$\alpha \leqslant \tau; \tag{109}$$

2) *справедливы соотношения*

$$y_i^* - \sum_{j\in L} \xi_{ij}^* > \tilde{y}_i - \sum_{j\in L} \tilde{\xi}_{ij}, \qquad i \in L. \tag{110}$$

Доказательство леммы 7.3. Доказательство леммы существенно опирается на следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы Какутани о неподвижной точке точечно-множественного отображения.

Теорема Эйленберга — Монтгомери [30, 39]. Пусть X есть компактное подмножество евклидова пространства, гомеоморфное выпуклому множеству. Пусть также $f(z)$ — замкнутое точечно-множественное отображение множества X в себя, причем при каждом $z \in X$ $f(z)$ — множество, гомеоморфное выпуклому. Тогда существует такая точка $z \in X$, что $z^* \in f(z^*)$.

Ниже вводятся множество $X(\theta, \tau)$, играющее роль множества X в сформулированной теореме, и точечно-множественное отображение $f(z)$, $z \in X(\theta, \tau)$, которые будут удовлетворять условиям теоремы Эйленберга — Монтгомери.

Рассмотрим множество Z векторов $z = \{\xi_{ji},\ j \in T,\ i \in L\}$. Для любых чисел τ и θ, связанных соотношениями

$$0 < \tau \leqslant \varepsilon, \quad 0 < \theta \leqslant \tau, \tag{111}$$

где ε — число из определения 6.1 (не)насыщенного элемента, введем множество $X(\theta, \tau)$ соотношением (91), т. е.

$$X(\theta, \tau) = \left\{ z:\ z \geqq 0,\ \theta \leqslant \sum_{\substack{j\in T\\ i\in L}} (\Delta\xi_{ji})^+ \leqslant \tau \right\} \tag{112}$$

при $\Delta\xi_{ji} = \xi_{ji} - \tilde{\xi}_{ji}$.

Согласно лемме 7.2 так определенное множество $X(\theta, \tau)$ при $0 < \theta \leqslant \tau$ компактно и гомеоморфно выпуклому множеству, т. е. удовлетворяет требованиям к множеству X из теоремы Эйленберга — Монтгомери.

Зададим точечно-множественное отображение $f(z)$ множества $X(\theta, \tau)$ в пространстве $Z \subseteq R^{|T|\cdot|L|}$ как композицию следующих отображений:

1. Каждому вектору $z \in X(\theta, \tau)$ поставим в соответствие вектор $\beta = (\beta_j,\ j \in T)$ с помощью соотношений

$$\beta_j = \tau \frac{\sum_{i\in L} (\Delta\xi_{ji})^+}{\sum_{k\in T, i\in L} (\Delta\xi_{ki})^+} \tag{113}$$

(напомним, что все цены $\gamma_i = 1$, $i = 1, \ldots, N$). Поскольку $\tau \geqslant \sum_{k\in T, i\in L} (\Delta\xi_{ki})^+ \geqslant \theta > 0$, то функции $\beta_j = \beta_j(z)$, $j \in T$, определены и непрерывны на $X(\theta, \tau)$ и для них справедливы соотношения

$$\beta_j \geqslant \sum_{i\in L} (\Delta\xi_{ji})^+ \geqslant 0, \qquad j \in T, \tag{114}$$

$$\sum_{j\in T} \beta_j = \tau. \tag{115}$$

2. Каждому вектору β, удовлетворяющему (115), поставим в соответствие вектор $h = (h_j)_{j\in T}$, определенный следующим образом:

если $j \in T \backslash L$, то

$$h_j(\beta_j) \equiv \beta_j, \tag{116}$$

если $j \in L$, то γ_j — корень уравнения

$$h_j + \psi_j(h_j) = \beta_j, \tag{117}$$

где $\psi_j(\xi)$, $j \in L$,— монотонная возрастающая функция, фигурирующая в определении ограничивающего множества. Как уже отмечалось, эту функцию можно считать непрерывной и равной нулю при $\xi = 0$. Тогда уравнение (117) имеет при каждом $\beta_j \in [0, \tau]$ единственный корень

$$h_j = h_j(\beta_j) \geqslant 0, \tag{118}$$

причем $h_j(\beta_j)$ — непрерывная возрастающая функция, равная нулю при $\beta_j = 0$.

3. Используя отображение $h(\beta)$, каждому вектору β, удовлетворяющему (115), поставим в соответствие вектор $\delta = (\delta_i)_{i\in L}$, определенный соотношениями

$$\delta_i = h_i + \eta, \qquad i \in L, \tag{119}$$

где

$$\eta = \frac{1}{|L|}\left(\tau - \sum_{k\in L} h_k\right) = \frac{1}{|L|}\left(\sum_{j\in T} \beta_j - \sum_{k\in L} h_k\right) =$$

$$= \frac{1}{|L|}\left(\sum_{j\in T\backslash L} \beta_j + \sum_{k\in L} \psi_k(h_k)\right); \tag{120}$$

последнее равенство имеет место в силу (117).

Отображение $\delta(\beta)$ есть непрерывная вектор-функция (поскольку $\psi_k(h_k)$ непрерывна по h_k, которая в свою очередь непрерывна по β_k), удовлетворяющая соотношениям

$$\sum_{i\in L} \delta_i = \tau, \qquad \delta_i \geqslant 0, \quad i \in L, \tag{121}$$

$$0 \leqslant h_i < \delta_i, \qquad i \in L. \tag{122}$$

Выполнение соотношений (121) следует из неотрицательности векторов h и β и функций $\psi_k(h_k)$, $k \in L$; при этом в силу (119), (120)

$$\sum_{i \in L} \delta_i = \sum_{i \in L} h_i + |L| \cdot \eta = \tau.$$

Докажем теперь соотношения (122). Из соотношений (121) следует, так как $\tau > 0$, что найдется такой $i = i^* \in L$, что $\delta_{i*} > 0$, и, следовательно, $h_{i*} + \eta > 0$. Допустим, что $h_{i*} > 0$; тогда $\psi_{i*}(h_{i*}) > 0$ и в силу (120) $\eta > 0$. Тогда в силу (119) соотношения (122) выполнены. Если же сразу $\eta > 0$, то приходим к предыдущему случаю.

4. Для каждого числа δ_i, $i \in L$, из (121) рассмотрим задачу (6.35), в которой $\alpha = \delta_i$, а T_i — ограничивающая номенклатура элемента P_i, $i \in L$. Поставим в соответствие δ_i множество $V_i(\delta_i)$ решений $\left(y_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i}\right)$ данной задачи таких, что

$$y_i^{\delta_i} - \tilde{y}_i \geqslant \delta_i + \psi_i(\delta_i). \tag{123}$$

Так как все элементы P_i, $i \in L$,— ненасыщенные и в силу (122) и (111)

$$0 \leqslant \delta_i \leqslant \tau \leqslant \varepsilon, \tag{124}$$

то множества $V_i(\delta_i)$, $i \in L$, непустые.

В результате каждому вектору $\delta = (\delta_i)_{i \in L}$, удовлетворяющему условиям (121), соответствует прямое произведение

$$V(\delta) = \prod_{i \in L} V_i(\delta_i) \subset \prod_{i \in L} G_i,$$

где G_i — технологическое множество i-го элемента. Каждому элементу множества $V(\delta)$ сопоставим соответствующий вектор

$$z^{\delta} = \left(\xi_{ji}^{\delta_i}\right)_{j \in T, i \in L},$$

т. е. множеству $V(\delta)$ — его проекцию на Z; обозначим эту проекцию при фиксированном δ через $Z(\delta)$. В силу утверждения леммы 7.1 все $V(\delta)$, а следовательно, и $Z(\delta)$ являются выпуклыми ограниченными множествами, а точечно-множественное отображение $\delta \to Z(\delta)$, определенное на множестве (121),— замкнутым и ограниченным. Композиция

$$z \to \beta(z) \to h(\beta) \to \delta(h) \to V(\delta) \to Z(\delta) \tag{125}$$

задает точечно-множественное отображение $f(z)$: $X(\theta, \tau) \to Z$.

Относительно отображения $f(z)$ ниже будут установлены два факта.

Первый факт. Для каждого $\tau > 0$ существует такое $\theta > 0$, что $f(z)$ отображает множество $X(\theta, \tau)$ в себя, т. е.

$$f(z) \in X(\theta, \tau) \quad \text{при} \quad z \in X(\theta, \tau). \tag{126}$$

Второй факт. $f(z)$ — замкнутое отображение, и при каждом $z \in X(\theta, \tau)$ множество $f(z)$ — выпуклое.

Установив эти факты, мы тем самым докажем, что $X(\theta, \tau)$ и $f(z)$ удовлетворяют условиям теоремы Эйленберга — Монтгомери (напомним, что $X(\theta, \tau)$ — компактное множество, гомеоморфное выпуклому множеству). В силу этой теоремы у отображения $f(z)$ существует неподвижная точка $z^* \in X(\theta, \tau)$, которая в свою очередь определяет, в силу (125), векторы δ^* и (y_i^*, x_i^*), $i \in L$.

Докажем, что такая совокупность векторов (y_i^*, x_i^*), $i \in L$, удовлетворяет утверждениям доказываемой леммы 7.3.

Поскольку вектор (y_i^*, x_i^*), есть решение задачи (6.35) при $\alpha = \delta^* \leqslant \varepsilon$, то в силу свойства ненасыщенного элемента (см. § 6.3) утверждение 1) леммы 7.3 справедливо.

Выполнение утверждения 2) — соотношений (110) — следует из цепочки неравенств

$$y_i^* - \sum_{j \in L} \xi_{ij}^* - \Big(\tilde{y}_i - \sum_{j \in L} \tilde{\xi}_{ij}\Big) \geqslant (y_i^* - \tilde{y}_i) - \sum_{j \in L} (\Delta\xi_{ij})^+ \geqslant$$

$$\geqslant \delta_{i*} + \psi_i(\delta_i^*) - \beta_i^* > 0, \qquad i \in L,$$

имеющих место в силу соотношений (123), соотношений $\sum\limits_{j \in L} (\Delta\xi_{ij})^+ \leqslant \delta_i^*$ и соотношений (см. (123) и (117))

$$\delta_i^* + \psi_i(\delta_i^*) > h_i^* + \psi_i(h_i^*) = \beta_i^*, \qquad i \in L.$$

Таким образом, для доказательства леммы 7.3 осталось показать выполнение указанных выше двух фактов, гарантирующих существование неподвижной точки $z^* \in f(z^*)$. Докажем их поочередно.

Справедливость первого факта. Рассмотрим множество векторов $\delta = (\delta_i)_{i \in L}$ таких, что

$$\sum_{i \in L} \Big(y_i^{\delta_i} - \tilde{y}_i\Big) \geqslant \tau, \qquad y_i^{\delta_i} \geqslant \tilde{y}_i, \quad i \in L,$$

где $y_i^{\delta_i}$ есть y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \delta_i,\ T_i \rangle$, $\delta_i \in [0, \varepsilon_i]$. Положим

$$\theta = \inf \sum_{i \in L} \delta_i \tag{127}$$

на этом множестве. Покажем, что

$$\theta > 0. \tag{128}$$

С этой целью предположим противное, т. е. предположим существование такой последовательности векторов $\delta^n = (\delta_i^n)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \delta_i^n = 0, \qquad i \in L, \tag{129}$$

и при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{i \in L} \left(y_i^{\delta_i^n} - \tilde{y}_i \right) \geqslant \tau, \quad y_i^{\delta_i^n} - \tilde{y}_i \geqslant 0, \quad i \in L. \tag{130}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность векторов $\left(y_i^{\delta_i^n} \right)_{i \in L}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к некоторому вектору $(y_i^0)_{i \in L}$, который согласно (130) удовлетворяет условию

$$\sum_{i \in L} (y_i^0 - \tilde{y}_i) \geqslant \tau > 0, \quad y_i^0 - \tilde{y}_i \geqslant 0, \quad i \in L. \tag{131}$$

Вместе с тем в силу замкнутости отображения V_i: $\alpha \to (y_i^\alpha, x_i^\alpha)$, установленной в лемме 7.1, y_i^0 является y-й компонентой решения задачи (6.35) при $\delta_i = 0$, совпадающей с задачей $\langle i; \tilde{\xi}_{ji}, I \rangle$. Так как решение последней задачи единственно, то для всех $i \in L$ имеет место равенство $y_i^0 = \tilde{y}_i$, что противоречит (131). Тем самым показано, что соотношение (129) не выполняется, а следовательно, справедливо соотношение (128).

Докажем теперь, что отображение $f(z)$ переводит множество $X(\theta, \tau)$ в себя, где θ определено соотношением (127). Для этого достаточно показать, что если вектор $\delta = (\delta_i)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i \in L} \delta_i = \tau, \quad \delta_i \geqslant 0, \tag{132}$$

а вектор $\left(y_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i} \right)$ является решением задачи $\langle i; \delta_i, T_i \rangle$ и удовлетворяет условию (121), то выполняется соотношение

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} \left(\Delta \xi_{ji}^{\delta_i} \right)^+ \geqslant \theta. \tag{133}$$

Обозначим $\alpha_i = \sum_{j \in T} \left(\Delta \xi_{ji}^{\delta_i} \right)^+$ и рассмотрим задачу $\langle i; \alpha_i, T_i \rangle$, решением которой является вектор $\left(y_i^{\alpha_i}, x_i^{\alpha_i} \right)$. Поскольку $\alpha_i \leqslant \delta_i$, а вектор $\left(y_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i} \right)$ допустим для задачи $\langle i; \alpha_i, T_i \rangle$, то $\left(y_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i} \right) = \left(y_i^{\alpha_i}, x_i^{\alpha_i} \right)$. Тогда в силу соотношений (132), (121) и (123) имеем

$$\sum_{i \in L} \left(y_i^{\alpha_i} - \tilde{y}_i \right) = \sum_{i \in L} \left(y_i^{\delta_i} - \tilde{y}_i \right) \geqslant \tau.$$

Вместе с тем из определения числа θ (см. (127)) следует

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} \left(\Delta \xi_{ji}^{\alpha_i} \right)^+ = \sum_{\substack{j \in T \\ i \in L}} \left(\Delta \xi_{ji}^{\delta_i} \right)^+ = \sum_{i \in L} \alpha_i \geqslant \theta,$$

что совпадает с доказываемым неравенством (133). Первый факт доказан.

Справедливость второго факта. Напомним, что отображение $f(z)$ получено в результате композиции отображений (125). Каждое из отображений $z \to \beta(z)$, $\beta \to h$, $h \to \delta(\beta)$ и $V(\delta) \to f(z)$ является непрерывным однозначным отображением, т. е. замкнутым как точечно-множественное отображение. Воспользуемся теперь следующим известным свойством композиции отображений (см. теорему 4.6 в [29]), заключающимся в том, что композиция замкнутых ограниченных отображений является замкнутым отображением. Поэтому для доказательства замкнутости отображения $f(z)$ достаточно показать замкнутость и ограниченность отображения $\delta \to V(\delta)$. Отображение $\delta \to V(\delta)$ есть прямое произведение отображений $\delta_i \to V_i(\delta_i)$, $i \in L$, каждое из которых в силу леммы 7.1 замкнутое и ограниченное, так что по известному свойству прямого произведения замкнутых отображений (см. теорему 4.5 в [29]) отображение $\delta \to V(\delta)$ также замкнутое и ограниченное. Тем самым замкнутость отображения $f(z)$: $X(\theta, \tau) \to X(\theta, \tau)$ установлена. Выпуклость множества-образа $f(z)$ при каждом $z \in X(\theta, \tau)$ немедленно следует из выпуклости каждого из множеств $V_i(\delta_i)$, $i \in L$ (см. лемму 7.1), и того обстоятельства, что множество $f(z)$ есть проекция прямого произведения $V(\delta) = \prod_{i \in L} V_i(\delta_i)$.

Лемма 7.3 доказана.

Следствие 1 леммы 7.3. *Пусть выполнены все условия леммы 7.3. Тогда для любого числа $\mu > 0$ найдутся состояния (y_i^*, x_i^*) элементов P_i, $i \in L$, удовлетворяющие утверждению леммы 7.3 и дополнительным соотношениям*

$$|\xi_{ji}^* - \tilde{\xi}_{ji}| \leqslant \mu, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad i \in L. \tag{134}$$

Доказательство. Из условия 1), которому удовлетворяют, согласно утверждению леммы 7.3, состояния (y_i^*, x_i^*) $i \in L$, следует, что вектор (y_i^*, x_i^*) (фигурирующий в лемме 7.3) является решением задачи (6.35) при некотором $\alpha \leqslant \tau$. Этот вектор, как легко видеть, есть также решение задачи

$$\Pi_i = y_i - \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji} = \max, \qquad (y_i, x_i) \in G_i,$$
$$\xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad j \in I \setminus T_i; \qquad \xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji} + (\xi_{ji}^* - \tilde{\xi}_{ji})^+, \quad j \in T_i, \tag{135}$$

причем в силу (109) справедливы соотношения

$$(\xi_{ji}^* - \tilde{\xi}_{ji})^+ \leqslant \tau, \quad j \in T_i. \tag{136}$$

Справедливость соотношения (134) вытекает из соотношений (136), единственности решения задачи (135), непрерывной зависимости его от ограничений, а также произвольности выбора τ в лемме 7.3. Следствие 1 доказано,

Следствие 2 леммы 7.3. *Пусть выполнены все условия леммы* 7.3 *при* $L=T$. *Тогда в дополнение ко всем утверждениям следствия* 1 *леммы* 7.3 *имеет место*

$$\xi_{ji}^* \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{ji}, \quad j \in I \setminus T, \quad i \in T. \tag{137}$$

Доказательство. В силу определения множества T справедливо соотношение $T = \bigcup\limits_{i \in T} T_i$, следовательно, для каждого T_i

$$I \setminus T \subseteq I \setminus T_i.$$

Из последнего соотношения и определения вектора (y_i^*, x_i^*) как решения задачи вида (6.35), удовлетворяющего, в частности, соотношениям $\xi_{ji}^* \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{ji}$, $j \in I \setminus T_i$, непосредственно вытекает справедливость соотношений (137). Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 7.2. Рассмотрим порознь элементы системы, принадлежащие подмножествам K, T, $I \setminus T$.

При $i \in K$ каждый элемент P_i поместим в состояние $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$, фигурирующее в теореме 7.1. Переобозначим вектор $\tilde{\tilde{x}}_0$ в этой теореме на $\bar{x}_0$, зарезервировав обозначение $\tilde{\tilde{x}}_0$ для последующего. Определим число μ соотношением

$$\mu = \frac{1}{N} \min_{i \in K} (\bar{\xi}_{i0} - \tilde{\tilde{\xi}}_{i0}), \tag{138}$$

где $\bar{\xi}_{i0}$, $i \in K$,— соответствующие компоненты вектора $\bar{x}_0$ из утверждения теоремы 7.2.

При $i \in T$ каждый элемент P_i поместим в состояние $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}) = (y_i^*, x_i^*)$, фигурирующее в следствиях 1 и 2 леммы 7.3, выбрав μ согласно (138).

При $i \in I \setminus T$ каждый элемент P_i поместим в состояние

$$(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i), \quad i \in I \setminus T. \tag{139}$$

Справедливость (63) для случая а) ($i \in K$) следует из (3), для случая б) ($i \in I \setminus T$) — из (139), а справедливость (64) для случая в) ($i \in T$) следует из (137).

Справедливость соотношений (65) для случая г) следует из соотношений (3) — см. утверждение теоремы 7.1 — и выбора состояний $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$ элементов P_i, $i \in K$.

Определим вектор $\tilde{\tilde{x}}_0$ соотношениями

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\tilde{y}}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde{\xi}}_{il}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{140}$$

Покажем теперь, что так определенное состояние всей системы $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ является квазиравновесием с вектором выпуска конечной продукции $\approx{x}_0$. Из соотношений (63) и (64) можно (заменив в них индекс j на i и одновременно i на l), как легко видеть (см. рис. 7.1), получить следующее «объединенное» нестрогое неравенство:

$$\approx{\xi}_{il} \leqslant \tilde{\xi}_{il}, \text{ если } \begin{cases} \text{а) } i \in K, & l \in I \setminus T, \\ \text{б) } i \in T, & l \in \Omega \setminus T, \\ \text{в) } i \in I \setminus T, & l \in \Omega. \end{cases} \tag{141}$$

Перейдем теперь к доказательству соотношений (61) и (62).

При $i \in K$ из (141), случай а), и (134) при $L = T$ (с учетом замены индексов j на i, а i на l) получаем

$$\sum_{l \in I \setminus T} \approx{\xi}_{il} \leqslant \sum_{l \in I \setminus T} \tilde{\xi}_{il}, \quad \sum_{l \in T} \approx{\xi}_{il} \leqslant \sum_{l \in T} \tilde{\xi}_{il} + N \cdot \mu,$$

откуда

$$\sum_{l \in I} \approx{\xi}_{il} \leqslant \sum_{l \in I} \tilde{\xi}_{il} + N \cdot \mu. \tag{142}$$

Кроме того, в силу (138)

$$\bar{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0} + N \cdot \mu. \tag{143}$$

Обозначим временно «новые» состояния элементов P_i, $i \in K$, взятые из утверждения теоремы 7.1, через $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$, помня, что $\bar{y}_i = \approx{y}_i$, $\bar{\xi}_{ji} = \approx{\xi}_{ji}$ (но $\bar{\xi}_{i0}$ может не равняться $\approx{\xi}_{i0}$ из (140)). Тогда балансовые равенства при $i \in K$ имеют вид

$$\bar{y}_i = \sum_{l \in K} \bar{\xi}_{il} + \sum_{l \in I} \bar{\xi}_{il} + \bar{\xi}_{i0}.$$

Переходя теперь к $\approx$ для тех слагаемых, для которых это справедливо, и учитывая балансовые равенства, получим

$$\approx{y}_i = \sum_{l \in K} \approx{\xi}_{il} + \sum_{l \in I} \bar{\xi}_{il} + \bar{\xi}_{i0},$$

откуда с учетом (142) и (143) имеем

$$\approx{y}_i \geqslant \sum_{l \in K} \approx{\xi}_{il} + \sum_{l \in I} \approx{\xi}_{il} + \approx{\xi}_{i0},$$

что и доказывает (62) для $i \in K$.

При $i \in T$, согласно определению векторов $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$, $i \in T$, из (110) (при $L = T$ и замене в них j на l) получаем

$$\approx{y}_i - \sum_{i \in T} \approx{\xi}_{il} - \sum_{l \in \Omega \setminus T} \approx{\xi}_{il} >$$
$$> \tilde{y}_i - \sum_{l \in T} \tilde{\xi}_{il} - \sum_{l \in \Omega \setminus T} \tilde{\xi}_{il} + \left(\sum_{l \in \Omega \setminus T} \tilde{\xi}_{il} - \sum_{l \in \Omega \setminus T} \approx{\xi}_{il} \right).$$

Из этих соотношений (с учетом балансовых равенств $\tilde{y}_i = \sum_{l=1}^{N} \tilde{\xi}_{il} + \tilde{\xi}_{i0}$ и определений (140)) находим, что

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0} + \left(\sum_{l \in \Omega \setminus T} \tilde{\xi}_{il} - \sum_{l \in \Omega \setminus T} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} \right),$$

что и доказывает в силу (141), случай б), справедливость (61) при $i \in T$.

При $i \in I \setminus T$ из (141) для случая в) и из равенства $\tilde{\tilde{y}}_i = \tilde{y}_i$ (в силу (139)) следует

$$\tilde{\tilde{y}}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} \geqslant \tilde{y}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\xi}_{il} = \tilde{\xi}_{i0},$$

что и доказывает (62) при $i \in I \setminus T$. Теорема 7.2 доказана.

Глава VIII

НЕМОНОТОННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВЫПУСКА КОНЕЧНОЙ ПРОДУКЦИИ

§ 8.1. Задачи о немонотонных изменениях чистых выпусков

В этой главе изучается более общий и более сложный тип направленных вариаций квазиравновесных состояний производственной системы: немонотонные изменения чистых выпусков, схема которых была описана в гл. VI (§ 6.3). Напомним, что речь идет о наращивании выпусков выделенных «особо важных» продуктов при разрешении снижать (если потребуется) до некоторых установленных уровней исходные чистые выпуски некоторых других, «менее важных» продуктов. Такое разрешение предоставляет дополнительные возможности для желаемого наращивания «важных» выпусков, поскольку теперь такое наращивание может опираться не только на «внутренний потенциал роста» производственной подсистемы, но и на сэкономленные дополнительные количества продуктов, возникающие как «высвобожденные ресурсы».

В число этих высвобожденных ресурсов прежде всего входят сами заранее указанные «маловажные» продукты, часть которых можно дополнительно направить на производство «более важных» продуктов. Однако этим возможность «внутренней экономии» не ограничивается; как уже говорилось в § 7.4, разрешение уменьшить чистые выпуски элементов-производителей из некоторого списка позволяет получить для «внешнего» использования дополнительные положительные количества всех продуктов, входящих в полную порождающую номенклатуру, составленную для этого списка. Ниже в § 8.2 приводится определение полной порождающей номенклатуры, имеющее конструктивный характер: описывается рекуррентная процедура (аналогичная процедуре построения полной ограничивающей номенклатуры в § 7.3), которая выстраивает номенклатуру всех прямо или косвенно затрачиваемых продуктов, т. е. объединенную номенклатуру, состоящую из всех элементов-поставщиков, затем всех поставщиков этих поставщиков и т. д. Первоначальная возможность экономии маловажных продуктов S влечет за собой «лавину» высвобождения ресурсов, входящих в полную порождающую номенклатуру для S (т. е. в $Q(S)$). При этом валовые выпуски соответствующих продуктов несколько уменьшаются, но чистые — увеличиваются (за счет компенсирующего снижения суммарных внутрипроизводственных затрат).

Возможность вливания высвобожденных ресурсов в производство «важных» дефицитных продуктов позволяет ослабить требования к производственной подсистеме, обеспечивающие увеличение чистых выпусков этих продуктов. В § 8.2 формулируются, а в § 8.3 доказываются достаточные условия для такого увеличения выпусков. Эти достаточные условия подобны условиям для монотонного увеличения (§ 7.3) и сводятся к отсутствию насыщенных элементов в соответствующей полной условно-ограничивающей номенклатуре, которая отличается от «безусловной» полной ограничивающей номенклатуры из гл. VII своего рода «устранением» высвобождаемых ресурсов. Важно отметить, что такое устранение не сводится к простому вычеркиванию продуктов, оказавшихся в достатке, а требует особого «структурного» рассмотрения и специальной рекуррентной процедуры построения.

В ходе этой процедуры выявляются (если они есть) насыщенные элементы — «узкие места» с точки зрения изучаемого перевода системы в желаемое состояние. Поскольку выстраиваемая полная условно-ограничивающая номенклатура, возможно, у́же «безусловной», то возможностей для появления этих «узких ме́ст» остается меньше, чем в случае монотонного наращивания — что и не удивительно ввиду тех дополнительных возможностей, которые предоставляются постановкой задачи о немонотонных изменениях.

Доказательство теоремы о достаточных условиях немонотонного увеличения чистых выпусков, приводимое в этой главе, по существу представляет собой синтез скоординированных процессов высвобождения ресурсов и наращивания выпусков требуемых продуктов. Эту теорему, как и теорему о достаточных условиях монотонного выпуска дефицитных продуктов в гл. VII, можно рассматривать как описание «блочного» управления производственной системой при указании качественной направленности изменений состояний элементов этих блоков и межблочных потоков продуктов.

§ 8.2. Достаточные условия немонотонного изменения чистых выпусков

В этом параграфе будут указаны достаточные условия, обеспечивающие возможность немонотонного изменения выпуска конечной продукции. Поскольку такое немонотонное изменение продукции, поставляемой вовне производственной системы, связано с изменением потоков продуктов внутри системы, представляется важным с точки зрения управления проанализировать характер этих изменений.

Теорема 8.1. (О высвобождении ресурсов.) *Пусть в системе нормальных элементов реализовано квазиравновесие* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *с вектором чистых выпусков* $\tilde{x}_0$. *Пусть выделена произвольная номенклатура* $S \subseteq \Omega$ *продуктов такая, что*

$$\tilde{\xi}_{i0} > 0 \text{ при } i \in S. \tag{1}$$

Тогда для любого набора чисел $\{\hat{\xi}_{i0}\}$, $i \in S$, *удовлетворяющих условию*

$$0 \leqslant \hat{\xi}_{i0} < \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in S, \tag{2}$$

существует квазиравновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$, *в котором*

1) *вектор чистых выпусков* $\tilde{\tilde{x}}_0$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant \hat{\xi}_{i0}, \quad i \in S, \tag{3}$$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in Q(S)\setminus S, \tag{4}$$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \notin Q(S); \tag{5}$$

2) *имеют место следующие соотношения для состояний элементов*:

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad i \in Q(S), \quad j \in \Omega, \tag{6}$$

$$(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i), \quad i \notin Q(S). \tag{7}$$

Доказательство этой теоремы приведено в § 8.3.

Замечание 8.1. Обратим внимание на тот факт, что согласно соотношениям (7) состояния элементов P_i, $i \notin Q(S)$, при переходе к «новому» квазиравновесию не изменяются.

Теорема 8.1 описывает увеличение чистых выпусков части продуктов, достигаемое не увеличением их валовых выпусков, а уменьшением их затрат внутри производственной системы. Возможность такого уменьшения затрат появляется по самой постановке задачи о немонотонных изменениях, вследствие допускаемого уменьшения конечного выпуска части продукции в заданной номенклатуре S «маловажных» продуктов. Поскольку затраты на производство «маловажных» продуктов можно уменьшить, это приводит к «автоматическому» увеличению чистых выпусков затрачиваемых продуктов, т. е. чистых выпусков тех производителей, которые являются поставщиками для производителей «маловажной» продукции. Более того, при этом можно даже несколько уменьшить валовые выпуски, а значит, и собственные производственные затраты указанных поставщиков. Это в свою очередь позволяет аналогичным образом уменьшить выпуски, а значит, и производственные затраты поставщиков этих поставщиков, и т. д. Список всех производителей, втягиваемых в такой лавинообразный процесс «высвобождения ресурсов», совпадает с полной порождающей номенклатурой $Q(S)$ для S. Этот факт вытекает из возможности дать для $Q(S)$ конструктивное определение в терминах рекуррентной процедуры его построения (аналогичной процедуре построения полной ограничивающей номенклатуры $T(R)$, приведенной в § 7.3).

Определение 8.1. Пусть множества $Q^0(S)$ и $Q^k(S)$, $k=1, 2, \ldots$, определены соотношениями

$$Q^0(S)\equiv S,\ Q^k(S)=\{j\colon\ j\in Q_i,\ i\in Q^{k-1}(S)\},\quad k=1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где Q_i — порождающая номенклатура элемента P_i в состоянии $(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$. Множество

$$Q(S)=\bigcup_{k\geqslant 0} Q^k(S) \tag{9}$$

назовем *полной порождающей номенклатурой* для S в данном квазиравновесии.

Доказательство эквивалентности определений 6.9 и 8.1 полной порождающей номенклатуры для S буквально повторяет доказательство теоремы 7.5 (с заменой ограничивающей номенклатуры T_i на порождающую номенклатуру Q_i и номенклатуры R на номенклатуру S).

Перейдем теперь к изучению условий немонотонного изменения выпуска конечной продукции в случае, когда увеличение чистых выпусков может происходить не только за счет уменьшения производственных затрат интересующих нас продуктов, но и за счет увеличения их валовых выпусков.

Пусть система находится в квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I, недефицитной номенклатурой K и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Зафиксируем некоторое множество $S\subseteq\Omega$ такое, что

$$\text{если}\quad i\in S,\quad \text{то}\quad \tilde{\xi}_{i0}>0. \tag{10}$$

Разобьем все элементы системы на четыре блока:

$$Q=Q(S),\qquad A=T\diagdown Q,\qquad B=K\diagdown Q,\qquad C=I\diagdown(A\cup Q), \tag{11}$$

где $T\diagdown Q$ — какая-либо условно-самоограничивающая номенклатура $T\diagdown Q\subseteq I$.

Все эти множества попарно не пересекаются, и $A\cup B\cup C\cup Q=\Omega$. Разбиение множества Ω на эти блоки схематически показано на рис. 8.1.

Условия немонотонного изменения, приводимые ниже, позволяют характеризовать возможность увеличения чистых выпусков продуктов блока $A = T \setminus\setminus Q$ в случае, когда допускается снижение чистых выпусков продуктов $i \in S$.

Теорема 8.2. *Пусть задано квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы нормальных элементов. Пусть задана некоторая номенклатура S, удовлетворяющая (10), и пусть $Q(S)$ — полная порождающая номенклатура для S, а $T \setminus\setminus Q(S)$ — какая-либо условно-самоограничивающая номенклатура (при условии $Q(S)$) в этом квазиравновесии. Пусть все элементы P_i, $i \in T \setminus\setminus Q(S)$, ненасыщены. Тогда для любого набора чисел $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, такого, что*

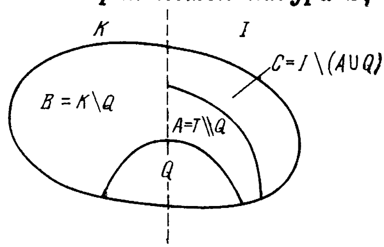


Рис. 8.1.

$$0 \leqslant \hat{\xi}_{i0} < \tilde{\xi}_{i0}, \qquad (12)$$

найдется квазиравновесие $\{(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)\}$, обладающее следующими свойствами:

1. *Вектор чистых выпусков $\overset{\approx}{x}_0$ в этом квазиравновесии удовлетворяет соотношениям*

$$\overset{\approx}{\xi}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in Q(S) \setminus S \quad \text{или} \quad i \in T \setminus\setminus Q(S), \qquad (13)$$

$$\overset{\approx}{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \notin S, \qquad (14)$$

$$\overset{\approx}{\xi}_{i0} \geqslant \hat{\xi}_{i0}, \quad i \in S. \qquad (15)$$

2. *Характер изменения потоков продуктов ξ_{ji} между отдельными элементами блоков A, B, C и Q* (см. 11)) *представлен табл. 8.1, в каждой (ji)-й клетке которой указан знак соответствующей разности $\overset{\approx}{\xi}_{ji} - \tilde{\xi}_{ji}$ (незаполненность клетки означает неопределенность знака этой разности).*

Таблица 8.1

$j \setminus i$	A	B	C	Q
A		$=$	$=$	$=$
B		$\geqslant$	$=$	$=$
C	$\leqslant$	$=$	$=$	$=$
Q		$\geqslant$	$=$	$\leqslant$

Доказательство теоремы 8.2 приведено в § 8.3.

Изменение потоков продуктов при переходе к новому квазиравновесию, указанное в табл. 8.1, иллюстрируется рис. 8.2. Так же как на рис. 7.1, сплошная стрелка, соединяющая два блока, означает, что все потоки продуктов из одного блока к другому заведомо не возрастают, двойная сплошная стрелка — что соответствующие потоки не изменяются, а волнистая стрелка — что соответствующие потоки заведомо не убывают; наконец, все остальные потоки, знаки изменения которых остаются неопределенными, обозначены пунктирными стрелками.

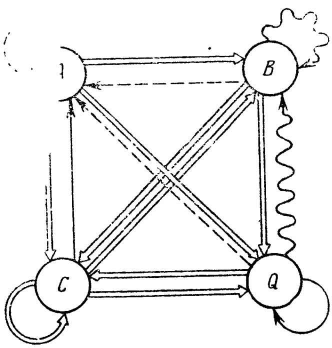


Рис. 8.2.

Замечание 8.2. Утверждение теоремы 8.2 можно несколько усилить, гарантировав возможность увеличения чистых выпусков в более широкой номенклатуре, нежели та, что указана в теореме 8.2. А именно, в соотношении (13) можно заменить множество $T\setminus Q$ на

$$P = (T\setminus Q \cup K \cup Q)\setminus S.$$

Доказательство этого представляет собой лишь незначительное усложнение доказательства теоремы 8.2, поэтому мы его приводить не будем.

Пояснить (но не доказать!) возможность такого усиления можно тем, что, во-первых, за счет уменьшения выпуска продуктов из S, в соответствии с утверждением теоремы 8.1, чистые выпуски продуктов из множества $Q(S)\setminus S$ можно увеличить, во-вторых (см. теорему 7.1), выпуски всех недефицитных продуктов также можно увеличить так, чтобы это увеличение превзошло ту дополнительную потребность в недефицитных продуктах, которая возникает при увеличении чистых выпусков продуктов из $T\setminus Q(S)$ (см. теорему 7.2).

Опишем теперь схему доказательства теоремы 8.2, которая может также рассматриваться как способ перевода системы в новое квазиравновесие, фигурирующее в утверждении теоремы 8.2. Основная идея такого перевода — в мысленном расчленении системы на блоки A, B, C и Q и в переводе элементов из каждого блока в такие состояния, чтобы после «соединения» всех блоков в систему состояние ее было квазиравновесием с требуемыми свойствами. В данном случае мы поступим следующим образом:

1) Все элементы из блока Q переведем в состояния, предписанные теоремой 8.1 настоящего параграфа. В результате такого перевода уменьшаются количества продуктов из S, поставляемых вовне блока, но увеличивается выпуск вовне всех продуктов из $Q\setminus S$, причем уменьшаются потоки продуктов между элементами Q.

2) Далее увеличим чистые (а при этом и полные) выпуски всех продуктов, производимых элементами из блока B (т. е. вы-

пуски ряда недефицитных продуктов). С этой целью поместим элементы блока B в те состояния, которые предписываются теоремой 7.1 (§ 7.2) для увеличения чистых выпусков недефицитных продуктов K. Подчеркнем, однако, что состояния тех элементов-производителей недефицитных продуктов, которые, быть может, оказались ранее в блоке Q, мы на этом этапе не изменяем. Однако при достаточно малом изменении состояния блока B его потребности в этих недефицитных продуктах ($K \backslash B$) возрастут не настолько, чтобы исчерпать «резерв» их чистых выпусков, достигнутый на предыдущем этапе в блоке Q. Потоки продуктов внутри блока B в новом состоянии заведомо не уменьшаются.

3) Увеличим чистые выпуски продуктов номенклатуры $T \backslash Q$ путем перевода элементов блока A в состояния, предписываемые леммой 7.3 (§ 7.5), где следует взять $L = A$.

Для того чтобы такой перевод мог быть осуществлен, необходимо, чтобы потребности (возможно, возросшие) со стороны элементов блока A в продуктах, производимых в блоках B и Q, были удовлетворены. Эти потребности, коль скоро они возросли не чрезмерно, могут быть удовлетворены как раз за счет продуктов, произведенных в блоках B и Q и поставляемых вовне в бо́льших, чем в исходном состоянии, количествах; при этом увеличиться могут разве лишь потоки внутри A, от Q к A и от B к A, но не другие потоки.

4) Все элементы из блока C оставим в прежнем состоянии.

После такого перевода подведем баланс по каждому продукту, а именно, найдем разность между валовым выпуском каждого продукта и суммарной потребностью в нем внутри системы, которая и является чистым выпуском данного выпуска. Приводимые в доказательстве теоремы 8.2 построения предусматривают, в рамках вышеизложенной схемы, выбор таких конкретных состояний всех производственных элементов, при котором окончательно получаемые уровни чистых выпусков удовлетворяют соответствующим утверждениям теоремы 8.2. Кроме того, все межэлементные потоки продуктов удается согласовать с устанавливаемыми квотами таким образом, что итоговое состояние системы в целом удовлетворяет определению квазиравновесия. Полное доказательство теоремы 8.2 приводится в следующем § 8.3.

В гл. VII (§ 7.3) наряду с условиями монотонного увеличения чистых выпусков продуктов самоограничивающей номенклатуры T (теорема 7.2) были получены условия возможности увеличения чистых выпусков продуктов произвольной заданной номенклатуры $R \subseteq I$ (теорема 7.3).

Аналогично этому, ниже в порядке конкретизации теоремы 8.2 указываются условия, обеспечивающие увеличения чистых выпусков продуктов из произвольно заданной номенклатуры

$R \subseteq I$ с учетом возможности снижения чистых выпусков продуктов из номенклатуры S, $S \cap R = \varnothing$.

Пусть заданы номенклатуры R и S из Ω такие, что

$$R \subseteq I, \qquad S \subseteq \{i : \tilde{\xi}_{i0} > 0, \quad i \notin R\}. \tag{16}$$

Рассмотрим множество $Q(S)$ — полную порождающую номенклатуру для S и множество $T(R) \setminus Q(S)$ — полную условно-ограничивающую номенклатуру для R (при условии $Q(S)$).

В качестве непосредственного следствия теоремы 8.2 получаем следующее утверждение.

Теорема 8.3. (Достаточное условие увеличения конечного выпуска номенклатуры R при уменьшении конечного выпуска номенклатуры S.) *Пусть задано квазиравновесие системы нормальных элементов* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *с вектором чистых выпусков* $\tilde{x}_0$ *и заданы номенклатуры* R *и* S, *удовлетворяющие* (16). *Допустим, что полная условно-ограничивающая номенклатура* $T(R) \setminus Q(S)$ (*хотя бы одна, если их несколько*) *не содержит насыщенных элементов. Тогда для любых* $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, *из* (12) *существует квазиравновесие* $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$, *удовлетворяющее условиям* (13)—(15) *при* $T \setminus Q(S) = T(R) \setminus Q(S)$, *так, что, в частности,* $\approx{\xi}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}$ *для всех* $i \in R$.

В качестве другого следствия той же теоремы 8.2 — с учетом замечания 8.2 — получаем следующее утверждение.

Теорема 8.4. *Пусть задано квазиравновесие системы нормальных элементов* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *с вектором чистых выпусков* $\tilde{x}_0$, *дефицитной номенклатурой* I *и недефицитной* K, *и пусть заданы номенклатуры* R *и* S, *удовлетворяющие* (16). *Допустим, что полная условно-ограничивающая номенклатура* $T(R) \setminus Q(S)$ (*хотя бы одна, если их несколько*) *не содержит насыщенных элементов. Тогда для любых* $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, *из* (12) *существует квазиравновесие* $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$, *удовлетворяющее* (13)—(15), *если заменить в* (13) *номенклатуру* $T \setminus Q(S)$ *на номенклатуру* $(T(R) \setminus Q(S)) \cup K$, *так что, в частности,* $\approx{\xi}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}$ *для всех* $i \in P = R \cup K \cup (Q(S) \setminus S)$.

Обсудим теперь, подобно тому, как мы это делали в гл. VII, вопрос об эффективной проверке условий теорем 8.3 и 8.4. С этой целью дадим конструктивное определение полной условно-ограничивающей номенклатуры $T(R) \setminus Q(S)$, позволяющее построить ее за конечное число шагов. Это определение еще раз использует рекуррентную процедуру, аналогичную тем, которыми строились множества $T(R)$ и $Q(S)$.

Определение 8.2. Определим последовательность множеств

$$T^0(R) \setminus Q(S), \qquad T^k(R) \setminus Q(S), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

следующим образом:

$$T^0(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)=R\setminus Q(S),$$

$$T^k(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)=\{j\colon\ j\in T_i\setminus Q(S),\ \ i\in T^{k-1}(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)\},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Множество

$$T\,(R)\setminus\!\!\setminus Q\,(S)=\bigcup_{k\geqslant 0}T^k\,(R)\setminus\!\!\setminus Q\,(S)$$

назовем *полной условно-ограничивающей номенклатурой* для R (*при условии* $Q(S)$).

Что касается доказательства эквивалентности определения 8.2 номенклатуры $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)$ и соответствующего определения 6.7 из главы VI (с $Q=Q(S)$), то их эквивалентность снова доказывается буквальным повторением рассуждений теоремы 7.4 с заменой T_i на $T_i\setminus Q(S)$.

В соответствии с определением 8.2 каждая ветвь «древовидной» процедуры построения номенклатуры $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)$ (как и при построении $T(R)$) обрывается на некотором элементе либо тогда, когда «существенная» для него номенклатура $T_i\setminus Q(S)$ уже ранее была включена в выстраиваемую номенклатуру $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)$, либо тогда, когда номенклатура $T_i\setminus Q(S)$ оказалась пустой. Последнее возможно в двух случаях: если вся ограничивающая номенклатура T_i целиком лежит в $Q(S)$ либо если $T_i=\varnothing$, т. е. элемент P_i насыщен. Таким образом, в процессе построения номенклатуры $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)$ устанавливается, содержит ли это множество насыщенный элемент. Тем самым эффективно проверяются условия, гарантирующие увеличение чистых выпусков продуктов из R.

Замечание 8.3. Определения 8.1 и 8.2 делают очевидным свойство «аддитивности» номенклатур $Q(S)$ и $T(R)\setminus\!\!\setminus Q$:

$$Q\,(S)=\bigcup_{i\in S}Q\,(i),\qquad T\,(R)\setminus\!\!\setminus Q=\bigcup_{i\in R}T\,(i)\setminus\!\!\setminus Q.$$

Последнее соотношение, так же как и «аддитивность» самоограничивающей номенклатуры $T(R)$ (см. замечание 7.2), позволяет более точно локализовать «узкие места», препятствующие гарантированному увеличению чистых выпусков продуктов из R.

В заключение параграфа приведем пример построения номенклатур $Q(S)$ и $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)$. Этот пример дополняет пример 7.1 из § 7.2, где строилась номенклатура $T(R)$.

Пример 8.1. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 — производственные элементы, т. е. $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Пусть в системе реализовалось равновесие с дефицитной номенклатурой $I=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. В этом состоянии сети $T_2=\{3,\ 5\}$, $T_3=\{2,\ 4\}$, $T_4=\varnothing$ (т. е. P_4 — насыщенный элемент), $T_5=\{3,\ 4\}$ и $Q_1=\varnothing$, $Q_2=\{5\}$, $Q_3=\{1\}$, $Q_4=\{2,\ 5\}$, $Q_5=\{2\}$. Положим $R=\{4,\ 5\}$, $S=\{1,\ 2\}$. Тогда $T^0(R)=\{4,\ 5\}$, $T^1(R)=\{3,\ 4\}$, $T^2(R)=\{2,\ 4\}$, $T^3(R)=\{3,\ 5\}$, т. е. $T(R)=$

$=\{2, 3, 4, 5\}$; $Q^0(S)=\{1, 2\}$, $Q^1(S)=\{5\}$, $Q^2(S)=\{2\}$, т. е. $Q(S)=$ $=\{1, 2, 5\}$. Поэтому $T(R)\setminus Q(S)=\{3, 4\}$. В то же время $T^0(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)=R\setminus Q(S)=\{4\}$, $T^1(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)=\varnothing$, следовательно, $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)=\{4\}$, т. е. $T(R)\setminus\!\!\setminus Q(S)\subset T(R)\setminus Q(S)$.

§ 8.3. Доказательства утверждений о немонотонных изменениях

В этом параграфе будут доказаны теоремы 8.1 и 8.2.

Для доказательства теоремы 8.1 удобно использовать следующее представление номенклатуры $Q(S)$, введенной определением 8.1.

Введем подмножества E^k, $k=0, 1, \ldots, M$, $M=N-2$, множества $Q(S)$ следующим образом:

$$E^0=S, \quad E^k=Q^k(S)\setminus\bigcup_{t=0}^{k-1}Q^t(S), \qquad k\geqslant 1. \tag{17}$$

Легко видеть, что эти множества E^k, $k=0, 1, \ldots, M$,— непересекающиеся и что в силу (3), (4)

$$Q(S)=\bigcup_{k=0}^{M}E^k. \tag{18}$$

Из определений порождающей номенклатуры Q_i и полной порождающей номенклатуры $Q(S)$ сразу же вытекают следующие свойства этих структур, используемые ниже.

Свойство 1. *Для всех* $i\in Q(S)$ *и всех* $j\in\Omega\setminus Q(S)$ *имеет место равенство*

$$\tilde{\xi}_{ji}=0. \tag{19}$$

Свойство 2. *Для каждого* $i\in E^k$, $k\geqslant 1$, *найдется такой* $l\in E^{k-1}$, *что*

$$\tilde{\xi}_{il}>0. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 8.1. Для каждого $i\in Q(S)$ рассмотрим следующую вспомогательную экстремальную задачу:

$$\Pi_i=\gamma_i y_i-\sum_{i=1}^{N}\gamma_j\xi_{ji}=\max, \tag{21}$$

$$(y_i, x_i)\in G_i, \ \xi_{ji}\leqslant\alpha_i\tilde{\xi}_{ji}, \qquad j=1, 2, \ldots, N, \tag{22}$$

где α_i — некоторое число из отрезка $[0, 1]$. Из свойств нормального элемента следует, что y_i-я компонента решения этой задачи есть непрерывная функция от α_i; при этом, если $\alpha_i=0$, то y_i-я компонента равна 0, а если $\alpha_i=1$, то она совпадает с $\tilde{y}_i$. Поэтому для каждого $\approx{y}_i$, удовлетворяющего соотношениям

$$0\leqslant\overset{\approx}{y}_i<\tilde{y}_i, \tag{23}$$

существует такое число $\approx\alpha_i$,

$$0 \leqslant \overset{\approx}{\alpha}_i < 1, \tag{24}$$

что при $\alpha_i = \overset{\approx}{\alpha}_i$ y-я компонента решения задачи (21), (22) равна $\overset{\approx}{y}_i$. При этом $\overset{\approx}{\xi}_{ji}$, $j = 1, 2, \ldots, N$,— ξ_{ji}-е компоненты этого решения — согласно (22) удовлетворяют соотношениям

$$\overset{\approx}{\xi}_{ji} \leqslant \overset{\approx}{\alpha}_i \tilde{\xi}_{ji},$$

так что с учетом (24)

$$\overset{\approx}{\xi}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad i \in Q(S). \tag{25}$$

Перейдем теперь к построению квазиравновесия из утверждения доказываемой теоремы 8.1, строя векторы

$$(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Для каждого $i \in Q(S) = \bigcup\limits_{k=0}^{M} E^k$ (см. определения (17), (18)) вектор $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ определим с помощью следующей рекуррентной процедуры. Будем просматривать множества индексов E^k последовательно, по $k = 0, 1, \ldots, m, \ldots, M$. К очередному k-му шагу процедуры окажутся построенными состояния $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ для всех $i \in E^m$, $m = 0, 1, \ldots, k-1$; при этом $\overset{\approx}{y}_i$ будут удовлетворять (23), а сами векторы $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ будут являться решениями соответствующих задач (21), (22) при $\alpha_i = \overset{\approx}{\alpha}_i$, удовлетворяющих (24). Тем самым $\overset{\approx}{\xi}_{ji}$ будут удовлетворять (25). На k-м шаге процедуры по ранее найденным $\overset{\approx}{y}_i$, $\overset{\approx}{\alpha}_i$, $i \in E^m$, $m = 0, \ldots, k-1$, будут построены $\overset{\approx}{y}_i$, $i \in E^k$, удовлетворяющие (23). После чего окажется возможным достроить ξ_{ji}-е компоненты векторов $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$, $i \in E^k$, как решения задачи (21), (22) при таких $\overset{\approx}{\alpha}_i$ из (24), которые дают уже построенные $\overset{\approx}{y}_i$; после этого можно будет перейти к следующему, $(k+1)$-му шагу процедуры, вплоть до последнего $k = M$.

Реализуем теперь эту схему.

В силу определения квазиравновесия имеем

$$\tilde{y}_i = \sum_{l=1}^{N} \tilde{\xi}_{il} + \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{26}$$

На начальном шаге процедуры $m = 0$ положим для $i \in E^0 \equiv S$

$$\hat{y}_i = \sum_{l=1}^{N} \tilde{\xi}_{il} + \hat{\xi}_{i0}, \tag{27}$$

где $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$,— числа, фигурирующие в утверждении теоремы 8.1. Из (26) и (27) вытекает выполнение (23) при $\approx{y}_i = \hat{y}_i$; тем самым обеспечена возможность построить $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$ как решения задачи (21), (22) с соответствующим $\approx{\alpha}_i$, удовлетворяющим (24), и $\approx{\xi}_{ji}$, удовлетворяющими (25), и перейти к следующему шагу $k = 1$, как это и определено процедурой.

Пусть теперь к общему k-му шагу, $k \geqslant 1$, построены $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$, $\approx{\alpha}_i$, $i \in E^m$, $m = 0, \ldots, k-1$, удовлетворяющие (23), (24). Тогда для $i \in E^k$ положим

$$\approx{y}_i = \sum_{l \notin E^{k-1}} \tilde{\xi}_{il} + \frac{1}{2} \sum_{l \in E^{k-1}} (1 + \approx{\alpha}_l)\, \tilde{\xi}_{il} + \tilde{\xi}_{i0}. \tag{28}$$

Из (28), (26) с учетом (20) и (24) следует

$$\approx{y}_i - \tilde{y}_i = \frac{1}{2} \sum_{l \in E^{k-1}} (\approx{\alpha}_l - 1)\, \tilde{\xi}_{il} < 0,$$

т. е. для $\approx{y}_i$, $i \in E^k$, выполнены (23) и тем самым обеспечены дальнейшая применимость процедуры построения векторов $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$, $i \in E^k$, и переход к $k+1$-му шагу.

Завершив процедуру (не более чем за $N-1$ шагов), будем иметь состояния $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$, построенные для всех $i \in Q(S)$ и удовлетворяющие, согласно (25), утверждению (6) теоремы 8.1.

Для всех $i \notin Q(S)$ положим

$$(\approx{y}_i, \approx{x}_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i), \tag{29}$$

удовлетворив тем самым соотношению (7) по определению.

Определим вектор $\approx{x}_0 = (\approx{\xi}_{10}, \ldots, \approx{\xi}_{N0})$, как обычно, соотношениями

$$\approx{\xi}_{i0} = \approx{y}_i - \sum_{l=1}^{N} \approx{\xi}_{il}. \tag{30}$$

Ниже будет показано, что так определенное состояние системы $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$ и с дефицитной номенклатурой $I = \Omega$ представляет собой именно такое квазиравновесие, которое фигурирует в утверждении теоремы 8.1.

Для доказательства того, что $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ есть квазиравновесие с $\approx{x}_0$ и $I = \Omega$, надо, согласно определению квазиравновесия, показать справедливость следующих утверждений:

А. Состояние каждого элемента есть решение задачи

$$\begin{aligned} &\Pi_i = \max, && (y_i, x_i) \in G_i, \\ &\xi_{ji} \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{ji}, && j = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{31}$$

Б. При всех $i = 1, 2, \ldots, N$ справедливы неравенства $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant 0$.

Справедливость последних неравенств будет сразу же следовать из соотношений (3)—(5), характеризующих свойства квазиравновесия в утверждении теоремы 8.1. Эти соотношения будут установлены позже.

Докажем утверждение А. Для каждого $i \in Q(S)$ тот факт, что $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$ — решение задачи (28), следует из определения вектора $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$. При $i \notin Q(S)$ этот факт вытекает из определения (31) с учетом свойства Н.2 нормального элемента.

Итак, осталось показать справедливость (3)—(5).

Из соотношений (27), (30), (29) и (25) следует справедливость (3), так как для $i \in S$

$$\hat{\xi}_{i0} = \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\xi}_{il} + \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \sum_{l \in Q(S)} (\tilde{\tilde{\xi}}_{il} - \tilde{\xi}_{il}) + \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{i0}.$$

Докажем теперь справедливость (4). Из (28) с учетом (25), (29) и неравенств $\tilde{\tilde{\xi}}_{il} \leqslant \tilde{\tilde{\alpha}}_l \tilde{\xi}_{il}$ следует для $i \in E^k$, $k \geqslant 1$, что

$$\tilde{\tilde{y}}_i \geqslant \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} + \sum_{l \in E^{k-1}} \left(\frac{1-\tilde{\tilde{\alpha}}_l}{2}\right) \tilde{\xi}_{il} + \tilde{\xi}_{i0}.$$

Тогда в силу (30)

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant \sum_{l \in E^{k-1}} \left(\frac{1-\tilde{\tilde{\alpha}}_l}{2}\right) \tilde{\xi}_{il} + \tilde{\xi}_{i0},$$

что с учетом (20) и (24) дает (12) для всех $i \in E^k$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. для всех $i \in Q(S) \setminus S = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} E^k$.

Теперь докажем равенства (5). Для всех $i \notin Q(S)$ из (30), (29) и (26) с учетом равенств $\tilde{\tilde{\xi}}_{il} = \tilde{\xi}_{il} = 0$ при $i \notin Q(S)$, $l \in Q(S)$, вытекающих из (19), имеем

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\tilde{y}}_i - \sum_{l \notin Q(S)} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} - \sum_{l \in Q(S)} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} = \tilde{y}_i - \sum_{l \notin Q(S)} \tilde{\xi}_{il} - \sum_{l \in Q(S)} \tilde{\xi}_{il} = \tilde{\xi}_{i0}.$$

Теорема 8.1 доказана.

Доказательство теоремы 8.2. Как в утверждении теоремы 8.2, так и в утверждении теоремы 8.1 фигурируют одинаково обозначенные числа $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$; между тем в настоящем доказательстве эти числа играют новую роль. Поэтому в дальнейшем числа $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, фигурирующие в утверждении теоремы 8.2, переобозначим на $\bar{\xi}_{i0}$, чтобы отличать их от чисел $\hat{\xi}_{i0}$ из теоремы 8.1.

Положим

$$\hat{\xi}_{i0} = \frac{1}{2}\left(\bar{\xi}_{i0} + \tilde{\xi}_{i0}\right), \qquad i \in S. \tag{32}$$

Заметим, что так определенные числа удовлетворяют условиям (2) теоремы 8.1 в силу условия (12) доказываемой теоремы 8.2.

Рассмотрим введенные в § 8.2 настоящей главы соотношениями (11) блоки A, B, C и Q.

Каждый элемент P_i, $i \in Q$, поместим в состояние $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$, существование которого гарантируется теоремой 8.1, считая, что фигурирующие в этой теореме числа $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, определены равенствами (32). Тогда в силу утверждений (22)—(24) этой теоремы определены компоненты $\bar{\bar{\xi}}_{i0}$, $i \in Q$, вектора[1] $\overset{\approx}{x}_0$.

С помощью этих компонент вектора $\overset{\approx}{x}_0$ определим число ν соотношением

$$\nu = \frac{1}{2N}\min\left\{\min_{i \in Q \setminus S}\left(\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0}\right), \min_{i \in S}\left(\tilde{\xi}_{i0} - \hat{\xi}_{i0}\right)\right\}. \tag{33}$$

В соответствии с (2) и (4) $\nu > 0$.

Рассмотрим теперь элементы P_i, $i \in B$. В силу утверждения теоремы 7.1 найдутся такие состояния $(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)$ элементов P_i, $i \in B$ (и всех остальных элементов, которые сейчас не понадобятся), что выполнены соотношения

$$0 < \bar{\bar{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in B, \tag{34}$$

где через $\bar{\bar{\xi}}_{i0}$ вновь обозначены i-е компоненты (но теперь уже для $i \in B$) вектора[1] $\overset{\approx}{x}_0$, фигурирующего в утверждении этой теоремы, причем

$$(\overset{\approx}{\xi}_{ji} - \tilde{\xi}_{ji}) < \nu, \qquad i \in B, \quad j \in Q, \tag{35}$$

где ν определено соотношением (33). Положим

$$\varkappa = \frac{1}{N}\min_{i \in B}\left(\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0}\right). \tag{36}$$

В силу (34) $\varkappa > 0$.

---

[1]) Компоненты $\overset{\approx}{\xi}_{i0}$ переобозначены на $\bar{\bar{\xi}}_{i0}$, с тем чтобы зарезервировать обозначение $\overset{\approx}{\xi}_{i0}$ для последующего.

Элементы P_i, $i \in A$, поместим в состояния $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i) = (y_i^*, x_i^*)$, где (y_i^*, x_i^*) — те состояния элементов P_i, $i \in A$, существование которых гарантируется следствием 1 леммы 7.1 (см. § 7.5), если в этом следствии положить $L = A$. При этом число μ, фигурирующее в указанном следствии, определим так:

$$\mu = \min \{\varkappa, \nu\}, \tag{37}$$

а число $\tau > 0$ в этом следствии возьмем произвольным.

Все элементы P_i, $i \in C$, поместим в состояния

$$(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i) = (\tilde{y}_i, \tilde{x}_i).$$

Поскольку $A \cup B \cup C \cup Q = \Omega$, то теперь определены состояния всех элементов P_i, т. е. состояние $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ системы в целом.

Определим теперь вектор $\tilde{\tilde{x}}_0 = (\tilde{\tilde{\xi}}_{10}, \ldots, \tilde{\tilde{\xi}}_{N0})$ соотношениями

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\tilde{y}}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde{\xi}}_{il}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{38}$$

Покажем теперь, что состояние системы $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ есть квазиравновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$ и с дефицитной номенклатурой $I = \Omega$, удовлетворяющее утверждениям теоремы 8.2.

Тот факт, что состояние $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ есть квазиравновесие, вытекает, во-первых, из того, что каждый вектор $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$, $i = 1, \ldots, N$, в силу его определения и с учетом свойств нормального элемента есть, как нетрудно видеть, решение соответствующей экстремальной задачи

$$\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max, \qquad (y_i, x_i) \in G_i,$$

$$\xi_{ji} \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{ji}, \qquad j = 1, \ldots, N;$$

во-вторых, из определений (38), обеспечивающих выполнение балансовых равенств, так как если выполнены соотношения (12)—(15), то $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant 0$.

Докажем сначала справедливость утверждения 2 теоремы 8.2, а потом уже утверждения 1.

Пусть $i \in A$, а $j \in C$. В силу определения множеств A и Q имеем

$$A \cup Q \supseteq \bigcup_{l \in A} T_l, \tag{39}$$

поэтому в силу определения множества C

$$C \subseteq I \diagdown \Big(\bigcup_{l \in A} T_l\Big) \subseteq I \diagdown T_i \text{ для каждого } i \in A. \tag{40}$$

В силу определения векторов $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$, $i \in A$, из утверждения 1 леммы 7.1 имеем

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in I | T_i, \qquad i \in A. \tag{41}$$

Из (40) и (41) следует

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in C, \qquad i \in A. \tag{42}$$

Пусть $i \in B$. Тогда из определения вектора $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$ имеем в силу утверждений теоремы 7.1, что

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in A \cup C, \qquad i \in B \tag{43}$$

(поскольку $A \subseteq I$, $C \subseteq I$), и

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \geqslant \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in B \cup Q, \qquad i \in B \tag{44}$$

(поскольку $B \subseteq K$, $Q \subset I \cup K$).

Пусть $i \in C$. Тогда в силу данного выше определения векторов $(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$ имеем

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in \Omega, \qquad i \in C. \tag{45}$$

Пусть теперь $i \in Q$. Поскольку согласно (11) $A \cup B \cup C = \Omega \backslash Q$, то из соотношений (6) и (7) теоремы 8.1 имеем (с учетом (19))

$$\tilde{\xi}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji} = 0, \qquad j \in A \cup B \cup C, \qquad i \in Q, \tag{46}$$

и

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in Q, \qquad i \in Q. \tag{47}$$

Соотношения (42)—(47) составляют в совокупности утверждение 2 доказываемой теоремы.

Докажем теперь справедливость утверждения 1.

Из определений (38) и (11) имеем для $i \in A \cup B \cup C \cup Q = \Omega$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\tilde{y}}_i - \left(\sum_{l \in A} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} + \sum_{l \in B} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} + \sum_{l \in C} \tilde{\tilde{\xi}}_{il} + \sum_{l \in Q} \tilde{\tilde{\xi}}_{il}\right). \tag{48}$$

Кроме того, по определению чистого выпуска

$$\tilde{\xi}_{i0} = \tilde{y}_i - \left(\sum_{l \in A} \tilde{\xi}_{il} + \sum_{i \in B} \tilde{\xi}_{il} + \sum_{i \in C} \tilde{\xi}_{il} + \sum_{l \in Q} \tilde{\xi}_{il}\right). \tag{49}$$

Выпишем теперь ряд вспомогательных соотношений, являющихся оценками сумм вида $\sum\limits_{l} (\tilde{\tilde{\xi}}_{il} - \tilde{\xi}_{il})$, в которых суммирование ведется по $l \in A$ либо B, а i принадлежит A либо B, C и Q, числа $\tilde{\tilde{\xi}}_{il}$ — это компоненты векторов $\tilde{\tilde{x}}_l$, определенных выше, а $\tilde{\xi}_{il}$ — компоненты векторов $\tilde{x}_l$ (из «исходных» состояний $(\tilde{y}_l, \tilde{x}_l)$ элементов системы).

В силу утверждения следствия 1 леммы 7.1 имеем, с учетом (37),

$$\sum_{l\in A}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)\leqslant N\mu\leqslant N\nu,\qquad i\in B, \tag{50}$$

и

$$\sum_{l\in A}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)\leqslant N\mu\leqslant N\nu,\qquad i\in Q. \tag{51}$$

В силу (42) и (43) (заменив i на l, а j на i) получаем

$$\sum_{l\in A}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)\leqslant 0,\qquad i\in C, \tag{52}$$

$$\sum_{l\in B}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)=0,\qquad i\in A, \tag{53}$$

и

$$\sum_{l\in B}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)=0,\qquad i\in C. \tag{54}$$

Из (35) следует (с заменой i на l и j на i)

$$\sum_{l\in B}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)<N\nu,\qquad i\in Q. \tag{55}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству соотношений (13)—(15).

Рассмотрим случаи $i\in A$, $i\in B$, $i\in C$ и $i\in Q$ порознь. Пусть $i\in A$. В силу (48) и (49)

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}-\tilde{\xi}_{i0}\right)&=\left(\left(\tilde{\tilde{y}}_i-\sum_{l\in A}\tilde{\tilde{\xi}}_{il}\right)-\left(\tilde{y}_i-\sum_{l\in A}\tilde{\xi}_{il}\right)\right)-\\&-\left(\sum_{l\in B}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)+\sum_{l\in C}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)+\sum_{l\in Q}\left(\tilde{\tilde{\xi}}_{il}-\tilde{\xi}_{il}\right)\right)\geqslant\\&\geqslant\left(\tilde{\tilde{y}}_i-\sum_{l\in A}\tilde{\tilde{\xi}}_{il}\right)-\left(\tilde{y}_i-\sum_{l\in A}\tilde{\xi}_{il}\right);\end{aligned} \tag{56}$$

в последнем неравенстве учтены соотношения (53) и равенства (45), (46) (в которых $j\in A$ заменено на i, а $i\in C$ и $i\in Q$ заменены на l).

Из (56) в силу утверждения 2) леммы 7.3, в которых положено $L=A$ и $(y_i^*, x_i^*)=(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)$, $i\in A$, имеем

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}>\tilde{\xi}_{i0},\qquad i\in A. \tag{57}$$

Пусть $i\in B$. Временно обозначим состояния всех элементов P_i, $i=1, \ldots, N$, фигурирующие в утверждении теоремы 7.1, через $(\bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{x}}_i)$. Заметим, что при таком переобозначении

$$(\bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{x}}_i)=(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i),\quad i\in B;\quad \bar{\bar{\xi}}_{i0}=\bar{\bar{y}}_i-\sum_{l=1}^{N}\bar{\bar{\xi}}_{il},\quad i=1, 2, \ldots, N,$$

и

$$(\bar{\bar y}_i, \bar{\bar x}_i) = (\tilde y_i, \tilde x_i), \quad i \in I,$$

согласно принятым выше определениям состояний элементов P_i, $i \in B$ и утверждениям теоремы 7.1. Тогда получаем, согласно (48) и (49),

$$\tilde{\tilde\xi}_{i0} - \tilde\xi_{i0} = \tilde{\tilde y}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde\xi}_{il} - \tilde\xi_{i0} = \bar{\bar y}_i - \sum_{l\in B} \bar{\bar\xi}_{il} - \sum_{l\notin B} \tilde{\tilde\xi}_{il} - \tilde\xi_{i0} =$$

$$= (\bar{\bar\xi}_{i0} - \tilde\xi_{i0}) + \sum_{l=1}^{N} \bar{\bar\xi}_{il} - \sum_{l\in B} \bar{\bar\xi}_{il} - \sum_{l\notin B} \tilde{\tilde\xi}_{il} =$$

$$= (\bar{\bar\xi}_{i0} - \tilde\xi_{i0}) + \sum_{l\in A} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in C} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in Q} \bar{\bar\xi}_{il} - \sum_{l\in Q} \tilde{\tilde\xi}_{il}.$$

Из этих равенств в силу (45) и (46) (с заменой в них $j \in B$ на i и $i \in C$ и $i \in Q$ на l) следует, с учетом (36) и (50),

$$\tilde{\tilde\xi}_{i0} - \tilde\xi_{i0} = (\bar{\bar\xi}_{i0} - \tilde\xi_{i0}) + \sum_{l\in A} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in Q} \bar{\bar\xi}_{il} \geqslant N\varkappa - N\mu + \sum_{l\in Q} \bar{\bar\xi}_{il}.$$

Отсюда, так как всегда $\bar{\bar\xi}_{il} \geqslant 0$, $i \in B$, $l \in Q$, и согласно (37) $\varkappa \geqslant \mu$, имеем

$$\tilde{\tilde\xi}_{i0} \geqslant \tilde\xi_{i0}, \qquad i \in B. \tag{58}$$

Пусть $i \in C$. Из (48), (49) в силу равенств $(\tilde{\tilde y}_i, \tilde{\tilde x}_i) = (\tilde y_i, \tilde x_i)$, $i \in C$ следует, что

$$\tilde{\tilde\xi}_{i0} - \tilde\xi_{i0} = \tilde{\tilde y}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde\xi}_{il} - \tilde\xi_{i0} = \tilde\xi_{i0} + \sum_{l=1}^{N} \tilde\xi_{il} - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde\xi}_{il} - \tilde\xi_{i0} =$$

$$= \sum_{l\in C} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in Q} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in A} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in B} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}).$$

Отсюда в силу (45) и (46) (заменив в них $j \in C$ на i, а $i \in C$ и $i \in Q$ на l), и в силу (52), (54) сразу же получаем

$$\tilde{\tilde\xi}_{i0} \geqslant \tilde\xi_{i0}, \qquad i \in C. \tag{59}$$

Пусть $i \in Q$. Поскольку $\tilde{\tilde x}_l = \tilde x_l$, $l \notin Q$, согласно утверждению теоремы 8.1, то с учетом балансовых равенств (48), (49)

$$\tilde{\tilde\xi}_{i0} = \tilde{\tilde y}_i - \sum_{l=1}^{N} \tilde{\tilde\xi}_{il} = \bar{\bar\xi}_{i0} + \sum_{l\in Q} \tilde{\tilde\xi}_{il} + \sum_{l\notin Q} \tilde\xi_{il} - \sum_{l\in Q} \tilde{\tilde\xi}_{il} - \sum_{l\notin Q} \tilde{\tilde\xi}_{il} =$$

$$= \bar{\bar\xi}_{i0} + \sum_{l\in A} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in B} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) + \sum_{l\in C} (\tilde\xi_{il} - \tilde{\tilde\xi}_{il}) > \bar{\bar\xi}_{i0} - 2N\nu; \tag{60}$$

в последнем неравенстве учтены неравенства (51), (55) и равенства (45) (с заменой в них $j \in Q$ на i и $i \in C$ на l). Тогда при $i \in Q$ из (60) имеем

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0} > (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0}) - 2N\nu,$$

откуда с учетом определения (33) сразу же следует

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in Q \setminus S. \tag{61}$$

При $i \in S$ из (60) имеем, с учетом определения (32),

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0} > (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}) - 2N\nu = \bar{\bar{\xi}}_{i0} - 2\hat{\xi}_{i0} + \tilde{\xi}_{i0} - 2N\nu =$$
$$= (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \hat{\xi}_{i0}) + (\tilde{\xi}_{i0} - \hat{\xi}_{i0}) - 2N\nu. \tag{62}$$

Поскольку $\bar{\bar{\xi}}_{i0} \geqslant \hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$ (согласно утверждению леммы 7.1 и данному выше определению чисел $\bar{\bar{\xi}}_{i0}$), и $\tilde{\xi}_{i0} - \hat{\xi}_{i0} \geqslant 2N\nu$ (согласно определению (33)), то из (62) следует $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0} \geqslant 0$ при $i \in S$. Тогда, возвращаясь к прежнему определению чисел $\bar{\xi}_{i0}$ как чисел $\hat{\xi}_{i0}$, фигурирующих в утверждении теоремы 8.2, получаем

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant \hat{\xi}_{i0}, \qquad i \in S. \tag{63}$$

Из соотношений (57) и (61) следует выполнение неравенств (13), из соотношений (57)—(59) — неравенств (14), а из (63) — неравенств (15). Теорема 8.2 доказана.

Глава IX

НАПРАВЛЕННЫЕ ВАРИАЦИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

§ 9.1. Потребительский выбор и спрос в изменяющихся условиях

В этой главе мы возвратимся к общей модели потребления из гл. III и к свойствам функций потребительского выбора и спроса, порожденных этой моделью. Эти свойства относятся к ситуациям, когда набор продуктов, предоставляемых потребителю, изменяется некоторым специальным образом. Предметом анализа здесь является реакция потребителя на такие изменения внешних условий. Иначе говоря, нас будет интересовать, каким образом изменяется потребительский выбор и (или) спрос в ответ на то или иное изменение количеств предоставляемых продуктов. Можно отметить, что подобные свойства уже рассматривались в гл. III при определении и первоначальном изучении характеристик потребителя. В частности, сами исходные предположения в модели потребления представляют собой не что иное, как предположения относительно характера изменения выбора (спроса) при определенных изменениях условий потребления. Ниже в § 9.2 формулируются дополнительные свойства, характеризующие возможности такого «направленного» варьирования внешних условий потребления, при которых сохраняется определенная «совместимость» предложения продуктов с их потребительским выбором (спросом). В частности, формулируются условия варьирования набора продуктов, обеспечивающего потребительскую согласованность этого набора. Сочетание условий направленного варьирования потребительского выбора, с одной стороны, и полученных ранее в гл. VII и VIII условий направленного варьирования производственного выпуска — с другой, позволит далее (в гл. X) рассматривать направленные вариации состояний замкнутой экономической системы, согласованные как с производственными возможностями, так и с потребительскими запросами.

Качественный вид рассматриваемых в этой главе направленных вариаций потребления по существу сводится к малым приращениям количеств тех продуктов, на которые имеется неудовлетворенный спрос, и к «компенсирующим» изменениям количеств остальных продуктов. Такие вариации приобретают дополнительный содержательный смысл в случае «однокритериального» порождения потребительского выбора и спроса. Напомним, что однокритериальной моделью потребителя мы называем задачу максимизации скалярной целевой функции потребления («функции полезности») при соответствующих ограничениях, в частности при натуральных ограничениях на количества дефицитных продуктов. Как и следовало ожидать, приращение количеств дефицитных продуктов, на которые имеется неудовлетворенный спрос, обеспечивает увеличение потребительской полезности всего набора продуктов. Это позволяет связать осуществимость потребительски направленной вариации набора продуктов с возможностью «улучшения» согласованного состояния замкнутой экономической системы, что будет реализовано при анализе условий эффективности согласованных состояний в следующей гл. X.

Последний § 9.3 содержит доказательства тех свойств направленных вариаций потребления, формулировки которых изложены в § 9.2.

§ 9.2. Свойства варьируемого потребления

Начнем со свойств потребительского выбора, справедливых для общей модели потребления из гл. III. При этом будем рассматривать нормальные функции выбора $f^I(x)$ и нормальную вектор-функцию спроса с параметром $I \subseteq \Omega$, не оговаривая факт «нормальности» особо.

Напомним обозначения. Через I мы обозначаем номенклатуру дефицитных продуктов, а через K — номенклатуру недефицитных продуктов: $K = \Omega \setminus I$.

Формулируемые ниже свойства модели потребительского выбора указывают, каким образом можно целенаправленно варьировать спрос, сохраняя первоначальную потребительскую согласованность набора продуктов (т. е. свойство набора x совпадать с выбором $f^I(x)$). При этом такая вариация будет главным образом направлена на увеличение потребления продуктов, спрос на которые при исходном наборе x был не удовлетворен.

Теорема 9.1. *Пусть набор x потребительски согласован при некоторой номенклатуре дефицитных продуктов I. Пусть H и M — две непересекающиеся номенклатуры продуктов из I, удовлетворяющие условиям:*

$$\text{если } i \in H, \text{ то } \xi_i < F_i^I(x), \tag{1}$$

$$\text{если } i \in M, \text{ то } \xi_i > 0. \tag{2}$$

Тогда для любого $\lambda > 0$ существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$, что для любого набора чисел $\{\zeta_i,\ i \in H\}$, удовлетворяющего неравенствам

$$0 \leqslant \zeta_i - \xi_i < \varepsilon, \qquad i \in H, \tag{3}$$

найдется набор чисел $\{\zeta_i,\ i \in \Omega \backslash H\}$, который удовлетворяет соотношениям

$$0 \leqslant \zeta_i \leqslant \xi_i - \varkappa, \qquad i \in M, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \zeta_i \leqslant \xi_i + \lambda, \qquad i \in K, \tag{5}$$

$$0 \leqslant \zeta_i \leqslant \xi_i, \qquad i \in I \backslash (H \cup M), \tag{6}$$

причем, если

$$i \notin (H \cup M) \text{ и } \xi_i < F_i^I(x), \tag{7}$$

то

$$\zeta_i = \xi_i. \tag{8}$$

При этом вектор $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$, подобно вектору x, потребительски согласован при той же номенклатуре дефицитных продуктов I.

Доказательство теоремы 9.1 приводится в § 9.3.

Теорема 9.1 с экономической точки зрения может быть интерпретирована следующим образом: если все продукты пользуются спросом, то можно, сохраняя такую относительную «неизбыточность» всех продуктов, произвольным образом (но «достаточно мало») увеличить потребление дефицитных продуктов, пользующихся неудовлетворенным спросом и составляющих заданную номенклатуру H (соотношение (3)), не увеличив потребления остальных дефицитных продуктов. При этом для любой наперед заданной номенклатуры M, не пересекающейся с H и удовлетворяющей условию (2), оказывается возможным снизить потребление всех продуктов из M на некоторую конечную величину (соотношение (4)).

Такое варьирование оказывается необходимым при выяснении эффективности тех или иных текущих равновесий экономической системы, о чем пойдет речь в следующей главе.

Обозначим через E^I номенклатуру продуктов, «потенциально пользующихся спросом»:

$$E^I = \{i:\ F_i^I(x) \neq 0 \text{ хотя бы при одном векторе } x \text{ и при дефицитной номенклатуре } I \subseteq \Omega\}. \tag{9}$$

Отметим, что множество E^I не зависит от вектора x.

Теорема 9.2. *Если набор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ потребительски согласован при номенклатуре дефицитных продуктов I, причем*

$$\xi_i < F_i^I(x) \text{ для всех } i \in E^I, \tag{10}$$

то существует число $\delta > 0$ такое, что для любого набора $z =$

$= (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$, *удовлетворяющего условиям*

$$|\zeta_i - \xi_i| < \delta, \quad i \in E^I, \tag{11}$$

$$\zeta_i = \xi_i, \quad i \notin E^I, \tag{12}$$

справедливы соотношения

$$z = f^I(z) \text{ и } \zeta_i < F^I(z), \ i \in E^I. \tag{13}$$

Доказательство теоремы 9.2 приводится в § 9.3.

В соответствии с теоремой 9.2, если данный набор потребительски согласован и спрос на все продукты, потенциально пользующиеся спросом, не удовлетворен, то любое достаточно малое изменение предоставляемого потребителю набора сохраняет свойство потребительской согласованности, оставляя спрос по-прежнему неудовлетворенным.

Предыдущие теоремы 9.1 и 9.2 относятся к общей модели потребления, задаваемой аксиомами для функций выбора (или равносильными аксиомами для функций спроса). Наряду с общей моделью потребления в гл. III был рассмотрен ее частный случай: однокритериальная оптимизационная модель, где функции выбора и спроса порождаются максимизацией потребительской полезности U на допустимом множестве наборов продуктов (см. § 3.6). Вместе с общими свойствами модели потребления, сохраняющимися, разумеется, и в этом специальном случае, однокритериальная модель потребления обладает и рядом специфических свойств. В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства однокритериальных функций выбора и спроса.

Рассмотрим однокритериальную вектор-функцию выбора $f^I(x)$ *как функцию от некоторой одной компоненты* ξ_i *вектора ограничений* x, считая остальные компоненты ξ_j, $j \neq i$, фиксированными; обозначим $f^I(x)$ при таком рассмотрении как $f^{iI}(\xi_i)$.

Пусть $V(\xi_i)$ есть значение функции полезности $U(z)$ на векторе $z = f^{iI}(\xi_i)$, рассматриваемое как функция параметра ξ_i, т. е.

$$V(\xi_i) = U\left(f^{iI}(\xi_i)\right). \tag{14}$$

Теорема 9.3. *Функция* $V(\xi_i) = U(f^{iI}(\xi_i))$ *есть строго возрастающая функция от параметра* ξ_i, *изменяющегося на отрезке* $\left[0, F_i^I(x)\right]$, *где* $F_i^I(x)$ — *соответствующая однокритериальная функция спроса на* i*-й продукт.*

Доказательство теоремы 9.3 приводится в § 9.3.

Теорема 9.3 говорит о том, что с ростом предоставляемого потребителю количества любого продукта, спрос на который не удовлетворен, растет не только потребительский выбор этого продукта, но и «полезность» всего набора продуктов при этом также возрастает, т. е. такое увеличение действительно «полезно» потребителю.

Теорема 9.4. *Пусть при некоторой дефицитной номенклатуре $I \subseteq \Omega$ вектор $\tilde{x}$ таков, что*

$$\tilde{x} = f^I(\tilde{x}), \tag{15}$$

где f^I — однокритериальная функция выбора. Тогда для любого числа $\delta > 0$ и произвольного фиксированного продукта i^* такого, что $\tilde{\xi}_{i*} < F^I_{i*}(\tilde{x})$, найдется вектор $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\tilde{\tilde{x}} = f^I(\tilde{\tilde{x}}), \tag{16}$$

$$\tilde{\xi}_{i*} < \tilde{\tilde{\xi}}_{i*} < \tilde{\xi}_{i*} + \delta, \tag{17}$$

$$0 \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_i \leqslant \tilde{\xi}_i, \quad i \in I \setminus \{i^*\}, \tag{18}$$

$$0 \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_k \leqslant \tilde{\xi}_k + \delta, \quad k \in K. \tag{19}$$

При этом

$$U(\tilde{\tilde{x}}) > U(\tilde{x}). \tag{20}$$

Доказательство теоремы 9.4 приводится в § 9.3.

Согласно этому свойству, если потребительски согласованный набор содержит продукты неудовлетворенного спроса, то путем увеличения количества хотя бы одного такого (дефицитного) продукта и, быть может, некоторых недефицитных продуктов можно увеличить «полезность» выбираемого набора, не нарушая потребительской согласованности.

Оба последних свойства вариаций потребительского спроса играют важную роль (как это будет показано в гл. X) для управления экономической системой, так как они указывают, в каком направлении надо изменять предлагаемый потребителю набор продуктов, чтобы повысить его полезность.

§ 9.3. Доказательства свойств варьируемого потребления

Доказательство теоремы 9.1. Из непрерывности функций выбора и спроса и из соотношений (1), (2) вытекает возможность указать для произвольного числа $\lambda > 0$ такие два числа $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$, где $\varkappa \leqslant \xi_i$ для всех $i \in M$, что любой вектор $y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$, удовлетворяющий условиям

$$\eta_i = \xi_i - \varkappa, \qquad i \in \hat{M}, \tag{21}$$

$$0 \leqslant \eta_i - \xi_i < \varepsilon, \qquad i \in H, \tag{22}$$

$$\eta_i = \xi_i, \qquad i \notin H \cup M, \tag{23}$$

удовлетворяет одновременно условиям

$$|f_i^I(x) - f_i^I(y)| < \lambda, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{24}$$

и при этом,

$$\text{если } \xi_i < F_i^I(x), \text{ то } \eta_i < F_i^I(y). \tag{25}$$

Определим теперь вектор z, фигурирующий в формулировке теоремы 9.1, следующим образом:

$$z = f^I(y). \tag{26}$$

Покажем, что так определенный[1]) вектор $z \geqq 0$ удовлетворяет всем требованиям из утверждения теоремы 9.1.

Действительно, из (1), (25) и (26) следует, что $f_i^I(y) = \eta_i = \zeta_i$, $i \in H$, а потому в силу (22) имеют место неравенства (3). Так как из (26) следует, что согласно (3.74) (см. § 3.5)

$$\xi_i = f_i^I(y) = \min\{\eta_i, F_i^I(y)\}, \quad i \in I, \tag{27}$$

то в силу (21) и включения $M \subseteq I$ справедливы соотношения (4). Справедливость (5) непосредственно вытекает из соотношений (24) и равенства (26), поскольку по условию $x = f^I(x)$. Справедливость соотношений (6) вытекает из соотношений (23) и (27). Что касается соотношений (7) и (8), то их справедливость вытекает из определения (23), условия (25) и соотношения (27), а также (3.74), поскольку если $\xi_i < F_i^I(x)$, то $i \in I$.

Тот факт, что вектор z является потребительски согласованным при данной дефицитной номенклатуре I, сразу следует из определения (26) и свойства 5 (из гл. III). Теорема 9.1 доказана.

Доказательство теоремы 9.2. Из (10) и потребительской согласованности x следует

$$E^I \subseteq I. \tag{28}$$

Далее, из непрерывности функций спроса следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что для всех векторов $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$, удовлетворяющих (11) и (12), имеем:

$$\text{если } \xi_i < F_i^I(x), \text{ то } \zeta_i < F_i^I(z). \tag{29}$$

В то же время из определения (9) и условия (12) с учетом потребительской согласованности x следует, что для $i \notin E^I$

$$0 \leqslant \zeta_i = \xi_i \leqslant F_i^I(x) = 0 = F_i^I(z),$$

а значит, все величины в этой цепочке равны нулю и, следовательно, для $i \in \Omega \backslash E^I$ $\zeta_i = F_i^I(z)$. Для $i \in E^I \subseteq I$ (см. (28)) в силу

[1]) Обратим внимание на то, что у вектора y компоненты $\{\eta_i, i \in H\}$ в рамках условия (22) произвольны; поэтому в определении (26) набор чисел $\{\zeta_i, i \in H\}$ также произволен в рамках условия (3). Вместе с тем набор чисел $\{\zeta_i, i \notin H\}$ уже не произволен и зависит от набора $\{\zeta_i, i \in H\}$. Но именно это неравноправие обоих наборов и предусматривается в формулировке теоремы 9.1.

(10) и (29) имеем $\zeta_i < F_i^I(z)$. Тогда, применяя соотношение (3.74) из § 3.5, получаем справедливость утверждения теоремы 9.2. Теорема 9.2 доказана.

Доказательство теоремы 9.3. В задачах вогнутого программирования значение задачи (т. е. оптимальное значение целевой функции) есть вогнутая функция от ограничений, не убывающая с ростом допустимой области. В данном случае это означает, что $V(\xi_i)$ — значение задачи

$$\begin{gathered} U(z) = \max, \\ z \in Z_0, \quad z \geqq 0, \\ \zeta_j \leqslant \xi_j, \quad j \in I \setminus \{i\}, \\ \zeta_i \leqslant \xi_i \end{gathered} \tag{30}$$

— есть вогнутая неубывающая функция. Неубывающая функция, определенная на отрезке, не является (строго) возрастающей только в том случае, когда ее область определения содержит интервал постоянства функции. Но вогнутая на отрезке функция может быть константой на некотором интервале, только если эта константа есть максимальное значение функции на всей области ее определения. Поэтому, если показать, что $V(F_i^I(\tilde{x}_0)) > V(\xi_{i0})$ при $0 \leqslant \xi_i < F_i^I(\tilde{x})$, то отсюда будет следовать, что неубывающая функция $V(\xi_i)$ ни на каком интервале, принадлежащем отрезку $0 \leqslant \xi_i \leqslant F_i^I(\tilde{x})$, не может сохранять постоянное значение, а это завершит доказательство теоремы 9.3.

Предположим противное, т. е. что найдется такое число $r \geqslant 0$, для которого имеет место неравенство

$$r < F_i^I(\tilde{x}), \tag{31}$$

и при этом

$$V(r) = V(F_i^I(\tilde{x})). \tag{32}$$

Заметим, что i-я компонента вектора $z(r)$ (решения задачи (30) при $\xi_i = r$) должна удовлетворять неравенству

$$\zeta_i(r) \leqslant r. \tag{33}$$

С другой стороны, i-я компонента вектора $z(F_i^I(\tilde{x}))$, как легко видеть, совпадает со значением функции спроса $F_i^I(\tilde{x})$. Поэтому

$$\zeta_i(F_i^I(\tilde{x})) = F_i^I(\tilde{x}). \tag{34}$$

Из (31), (33) и (34) получаем

$$\zeta_i(r) < \zeta_i(F_i^I(\tilde{x})). \tag{35}$$

Таким образом, вектор $z(r)$ (который является, в силу (31), допустимым для задачи (30) при $\xi_i = F_i^I(\tilde{x})$) не совпадает с решением $z(F_i^I(\tilde{x}))$ этой задачи (в силу (35)), но доставляет, в силу предположения (32), то же самое значение целевой функции. Существование такого вектора $z(r)$ противоречит единственности решения задачи (30), вытекающей из строгой вогнутости (см. § 3.6) функции $U(x)$. Теорема 9.3 доказана.

Доказательство теоремы 9.4. Как и в доказательстве теоремы 9.3, обратимся к экстремальной задаче (30), переобозначив в ней j на i, а i на i^*. Обозначим решение этой задачи через $z(\xi_{i*})$. Поскольку $z(\xi_{i*})$ можно рассматривать как функцию выбора $f^I(x)$, то в соответствии с предположением 1° относительно непрерывности нормальной функции выбора решение $z(\xi_{i*})$ непрерывно по ξ_{i*}.

Определим γ так:

$$\gamma = \frac{1}{2}\min\{\delta, F_{i*}^I(\tilde{x}) - \tilde{\xi}_{i*}\}. \tag{36}$$

Число γ положительно, поскольку i^* — продукт неудовлетворенного спроса. Обозначим вектор $z(\tilde{\xi}_{i*} + \gamma)$, т. е. вектор $z(\xi_{i*})$ при

$$\xi_{i*} = \tilde{\xi}_{i*} + \gamma, \tag{37}$$

через $\approx{x}$. Так определенный вектор $\approx{x}$ удовлетворяет соотношениям (16)—(20). Покажем это и тем самым докажем теорему 9.4.

Справедливость соотношения (16) следует из того, что по определению однокритериальной функции выбора $f^I(\approx{x})$ есть решение (единственное в силу строгой вогнутости функции U) экстремальной задачи

$$\begin{gathered} U(z) = \max, \\ z \in Z_0, \qquad z \geqq 0, \\ z_I \leqq \approx{x}_I \end{gathered} \tag{38}$$

и в то же время вектор $\approx{x}$, являющийся решением задачи вида (30) при $i = i^*$ и при $\xi_i = \xi_{i*}$ из равенства (37), очевидным образом должен также являться решением задачи (38). Справедливость соотношений (18), (19) и правой части (17) непосредственно следует из ограничений задачи (30) при $i = i^*$ и определений (36) и (37). Справедливость неравенства (20) и левой части неравенства (17) немедленно следует из теоремы 9.3 ввиду строгого возрастания на $(\tilde{\xi}_{i*}, F_{i*}(\tilde{x}))$ значения экстремальной задачи (30), рассматриваемого как функция ограничения ξ_{i*}. Теорема 9.4 доказана.

Глава X

УСЛОВНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СОГЛАСОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ

§ 10.1. Как сравнивать и оценивать согласованные состояния экономической системы

В этой главе нам предстоит конкретизировать содержательные представления о сравнимости различных согласованных состояний экономической системы по их относительной «эффективности» (в смысле «лучше — хуже») и разработать способы выделения «неулучшаемых» среди таких состояний. Как уже говорилось ранее в § 6.1, мы будем придерживаться той предпосылки, что конечной целью экономической деятельности является удовлетворение внепроизводственных потребностей, а в рамках рассматриваемой здесь модели — обеспечение выпуска конечной продукции, удовлетворительного или желательного в некотором смысле, который подлежит уточнению. При этом мы будем рассматривать лишь согласованные состояния системы, т. е. состояния квазиравновесия (если речь идет о производственной системе без явного участия потребителя) или состояния равновесия (если исследуется замкнутая экономическая система в целом). Во всех случаях предметом оценки и сравнения будут, согласно сказанному выше, векторы чистых выпусков, достижимые в рассматриваемых согласованных состояниях.

Состояние с «наилучшим», или «экстремальным», или «неулучшаемым» (в некотором принятом смысле) вектором чистых выпусков среди всех согласованных состояний можно было бы, сохраняя традиционную терминологию, называть «эффективным». Однако следует помнить, что мы сравниваем здесь не все технологически реализуемые векторы чистых выпусков, а лишь те из них, которые реализуются в согласованных (а не просто сбалансированных) состояниях системы: только в квазиравновесиях либо, более того, только в равновесиях. По этой причине состояние, оказывающееся «эффективным» (в смысле определенной неулучшаемости своего вектора чистых выпусков) среди согласованных состояний указываемого типа (квазиравновесий либо равновесий), в общем случае не будет эффективным среди всех вообще технологически реализуемых (сбалансированных) состояний системы. Имея это в виду, такое согласованное состояние следовало бы, для корректности, называть не «эффективным», а «условно-эффективным» (т. е. эффективным при условии согласованности: квазиравновесности либо равновесности). Всюду далее в этой главе речь идет исключительно об условно-эффективных состояниях, и хотя ради краткости термин «условно» может быть опущен, но он всегда подразумевается.

Таким образом, мы намерены сравнивать и оценивать различные состояния в классе однотипных согласованных состояний (в классе квазиравновесий либо в классе равновесий) и выделять среди них условно-эффективные состояния как «неулучшаемые» в этом классе. При этом судить о различных состояниях мы хотим по соответствующим векторам чистых выпусков. Встает вопрос, как конкретизировать и формализовать сравнительную оценку векторов чистых выпусков, учитывая, если потребуется, специфику согласованных состояний экономической системы. Здесь возможны различные подходы, и мы остановимся на двух основных.

Распространенным подходом к оценке состояний экономической системы является задание критериальной функции. Вспомним, что мы уже применяли такой подход при описании потребительского выбора в гл. III (и в гл. IX); впрочем, соответствующая однокритериальная модель выбора была лишь частным случаем общей модели. Естественно теперь, рассматривая состояние равновесия, т. е. состояние производственной системы, согласованное (по вектору чистых выпусков) с потребительским выбором, взять в качестве оценки вектора чистых выпусков как раз ту критериальную функцию (функцию от набора продуктов), которая фигурирует в описании потребителя. Тем самым мы подходим к сравнению и оценке состояний экономики «с позиций потребителя», не навязывая какого-либо иного, «внешнего» критерия для сравнения и оценки. Состояние равновесия с бо́льшим значением критериальной функции U на векторе чистых выпусков, реализуемом в этом состоянии, естественно считать «лучшим» по сравнению с состоянием с меньшим значением U. Состояние равновесия с наибольшим значением U на всем классе состояний равновесия естественно признать «наилучшим» («неулучшаемым»), т. е. условно-эффективным «в смысле U»; далее такие состояния будем называть U-максимальными.

Сказанное выше непосредственно относится к анализу состояния равновесия в случае, когда в рассматриваемой модели экономики потребитель присутствует явным образом и описание потребителя имеет явный вид. Нетрудно распространить такой «U-подход» на случай, когда рассматривается одна лишь производственная система, и тем самым приспособить его к сравнению и оценке состояний квазиравновесия: в этом случае можно взять любую содержательно осмысленную критериальную функцию U на допустимом множестве векторов чистых выпусков, считая ее, если угодно, критериальной функцией воображаемого внешнего потребителя (или «планирующего органа»).

Иная ситуация возникает, однако, если по каким-либо причинам критериальную функцию U адекватно указать не удается. Это может быть в случае, когда критериальная функция потребителя неизвестна, или когда потребитель описывается общей (не однокритериальной) моделью выбора, или когда потребитель в модели не фигурирует вообще и при этом нет оснований «домысливать» какую-либо определенную критериальную функцию. В подобных случаях можно применять подход, требующий гораздо более слабых исходных данных для сравнения векторов продуктов. Этот «качественный» подход в простейшей форме предполагает лишь, что все продукты «полезны» и что увеличение чистого выпуска каждого продукта без уменьшения чистых выпусков других продуктов заведомо желательно. Сравнение состояний на основании такого подхода приводит нас к обычному определению «векторной эффективности» (или оптимальности по Парето), где компонентами «векторного критерия» взяты чистые выпуски отдельных продуктов. Мы далее разовьем этот подход, применив его в несколько более сильной форме.

Будем предполагать, что из всей номенклатуры продуктов, производимой и потребляемой в системе, выделена номенклатура R «особо важных» продуктов, а все остальные продукты считаются менее важными (см. гл. VI, VIII). Допустим, что увеличение чистого выпуска каждого продукта из номенклатуры R без снижения чистых выпусков всех других «важных» продуктов (из R) заведомо желательно, даже если оно сопровождается снижением чистых выпусков любых «маловажных» продуктов (не из R). В силу такого предположения состояние с некоторым данным вектором чистых выпусков будет считаться «лучше» другого состояния с другим вектором чистых выпусков, если R-компоненты первого вектора превышают одноименные R-компоненты второго (точнее, все превышают нестрого, а хотя бы одна — строго). Согласованное состояние — квазиравновесие или равновесие, не допускающее «улучшения» в указанном выше смысле, будем далее называть R-оптимальным.

Ниже в § 10.2 даются точные определения U-максимальности и R-оптимальности и доказывается существование согласованных состояний, условно-эффективных как в одном, так и в другом смысле. В § 10.3 устанавливаются необходимые условия U-максимальности и R-оптимальности. Эти условия сводятся по существу либо к невозможности нарастить производство желаемых продуктов (в терминах наличия «узкого места» — насыщенного элемента — в определенной производственной подсистеме), либо, если речь идет о равновесии, к тому, что дополнительное количество продуктов просто не нужно с точки зрения потребительского выбора. Все эти условия имеют «качественный» характер, и даже когда оценка состояний производится в «количественных» терминах критериальной функции U, никакие ее численные характеристики в полученных условиях эффективности явным образом не используются.

§ 10.2. Существование условно-эффективных квазиравновесий и равновесий

В этом параграфе мы дадим точные формулировки двух типов условной эффективности: U-максимальности и R-оптимальности, и докажем существование условно-эффективных, как в одном («U»), так и в другом («R») смысле, состояний квазиравновесия и равновесия.

Начнем, следуя логике § 10.1, с однокритериально-оптимизационного подхода, который приводит нас к U-максимальности. При таком подходе критерий для сравнения и оценки состояний производственной системы, а конкретнее — для сравнения и оценки реализуемых векторов чистых выпусков x_0, мы берем из однокритериальной модели потребительского выбора. В этой модели функция выбора $f^I(x_0)$ порождается как (зависящее от G_0 как от параметра) решение задачи

$$U(x) = \max, \qquad x \in G_0, \quad x_I \leqq x_{0I}, \tag{1}$$

где $U(x)$ — критериальная функция потребления, $G_0 \subseteq R_+^N$ — заданное допустимое множество векторов потребительских продуктов, предоставляемых потребителю; в качестве такого вектора в нашей замкнутой модели экономики выступает вектор чистых выпусков производственной части системы. Эту модель или ее «составляющие» мы будем использовать для сравнения и оценки как состояний равновесия, где потребитель фигурирует явно в виде функции выбора

$$f^I(x_0) = f^I(x_0;\ U,\ G_0),$$

так и состояний квазиравновесия, где вместо явного рассмотрения потребительского выбора f^I мы можем ограничиться привлечением некоторой критериальной функции U на данном допустимом множестве G_0.

Таким образом, при однокритериальном подходе мы сравниваем и оцениваем согласованные состояния системы по величине показателя U для реализуемого вектора чистых выпусков x_0, требуя, чтобы x_0 принадлежал заданному допустимому множеству $G_0 \subseteq R^N_+$. Последнее требование при рассмотрении равновесий выполняется автоматически в силу определения функции выбора, а при рассмотрении квазиравновесий мы его налагаем дополнительно. Подчеркнем, что требование $x_0 \in G_0$ не сужает, а наоборот расширяет рамки «U-подхода» к эффективности квазиравновесий, поскольку фактическое отсутствие такого требования также предусматривается здесь как частный случай: $G_0 = R^N_+$.

Как и ранее при описании однокритериального потребительского выбора (гл. III и IX), предполагаем, что $U(x)$ — строго вогнутая непрерывная функция на R^N_+, а $G_0 \subseteq R^N_+$ — выпуклое замкнутое множество, причем $0 \in G_0$. Как и ранее (гл. II), обозначаем через X_0 $\left(X_0^f\right)$ множество векторов чистых выпусков x_0, реализуемых при всевозможных квазиравновесиях (соответственно равновесиях) в данной системе нормальных элементов.

Определение 10.1. Квазиравновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *U-максимальным*, если $\tilde{x}_0$ доставляет максимум функции $U(x)$ на множестве $X_0 \cap G_0$ векторов чистых выпусков.

Определение 10.1′. Равновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *U-максимальным*, если $\tilde{x}_0$ доставляет максимум функции $U(x)$ на множестве X_0^f векторов чистых выпусков.

Согласованное состояние (квазиравновесие или равновесие), не являющееся U-максимальным, будем называть *U-улучшаемым*.

Иной, «качественный» подход к сравнению состояний экономической системы, также изложенный выше в § 10.1, приводит к нижеследующему определению R-оптимальности согласованных состояний (квазиравновесий и равновесий). Этот подход, в отличие от определения U-максимальности, заменяет задание однокритериальной функции U заданием лишь «качественного направления» желаемого изменения вектора чистых выпусков в виде номенклатуры R и дополнительным заданием допустимого множества G_0.

Определение 10.2. Квазиравновесие (равновесие) с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *R-оптимальным*, если не существует квазиравновесия (равновесия) с таким вектором чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$, что

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in R, \tag{2}$$

причем для некоторого $i^* \in R$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i^*0} > \tilde{\xi}_{i^*0}. \tag{3}$$

Фигурирующее в этом определении множество R интерпретируется здесь как множество «важных» продуктов. Определение

R-оптимального состояния требует, чтобы в этом состоянии чистый выпуск ни одного важного продукта не мог быть увеличен путем перехода к новому состоянию (того же типа) без уменьшения чистых выпусков каких-либо других важных продуктов. Таким образом, R-оптимальное квазиравновесие (равновесие) оптимально по Парето на множестве подвекторов «важных» продуктов, выпускаемых вовне в квазиравновесиях (равновесиях). В частности, при $R = \Omega$ имеем Ω-оптимальное квазиравновесие (равновесие) — это квазиравновесие (равновесие) с вектором чистых выпусков x_0, оптимальным по Парето на X_0 (X_0^f).

Согласованное состояние (квазиравновесие и равновесие), не являющееся R-оптимальным, далее будем называть *R-улучшаемым.*

Замечание 10.1. В связи с тем, что чистые выпуски недефицитных продуктов всегда могут быть увеличены по сравнению с чистыми выпусками в данном квазиравновесии (см. гл. VII), впредь, не оговаривая это особо, будем при рассмотрении R-оптимальности всегда предполагать, что номенклатура R состоит только из дефицитных (в данном состоянии системы) продуктов, т. е. $R \subseteq I$.

В соответствии с приведенными определениями, если текущее квазиравновесие (равновесие) не является эффективным (в одном или другом смысле), то в системе при тех же ценах и тех же технологических множествах существует другое, «лучшее», в смысле соответствующего определения эффективности, квазиравновесие (равновесие). Это новое квазиравновесие (равновесие) характеризуется, может быть, иным разделением продуктов на дефицитные и недефицитные и иной системой локальных ограничений (квот) на потребление дефицитных и производство недефицитных продуктов. Если же квазиравновесие (равновесие) эффективно, то переход к «лучшему» квазиравновесию (равновесию) возможен только путем изменения системы цен на продукты или технологических множеств отдельных элементов. Поэтому в эффективном равновесии встает вопрос о выявлении «узких мест» — элементов, препятствующих «улучшению» эффективного равновесия. Ответы на такой вопрос, в различных конкретных постановках, могут быть извлечены из теорем следующего § 10.3, дающих необходимые условия эффективности. Но сначала рассмотрим вопрос о существовании эффективных квазиравновесий и равновесий.

Теорема 10.1. *В системе нормальных элементов всегда существуют:*

1) *U-максимальное квазиравновесие и U-максимальное равновесие;*

2) *R-оптимальное квазиравновесие и R-оптимальное равновесие.*

Доказательство теоремы 10.1. Существование U-максимального состояния квазиравновесия (равновесия) сразу же следует из компактности множества X_0 векторов чистых выпусков x_0, достижимых в квазиравновесиях, и из замкнутости G_0 (соответственно компактности множества X_0^f), поскольку непрерывная функция $U(x)$ всегда достигает максимума на компактном множестве.

Существование R-оптимального квазиравновесия (равновесия) также легко выводится из компактности этих же множеств векторов чистых выпусков. Действительно, таким состоянием заведомо является любое квазиравновесие (равновесие), в котором вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ доставляет максимум, например, непрерывной функции

$$\sum_{i \in R} \xi_{i0}$$

на компактном множестве $X_0 \cap G_0$ (соответственно на X_0^f). Теорема 10.1 доказана.

Теорема 10.1 утверждает существование эффективных квазиравновесий и равновесий, но ничего не говорит об их единственности; и действительно, таких условно-эффективных состояний имеется, вообще говоря, целое множество.

Если эффективное (в U- или R-смысле) квазиравновесие является равновесием, то очевидно, что оно в этом случае заведомо будет эффективным (в том же смысле) равновесием, поскольку множество равновесий является подмножеством множества квазиравновесий. Для свойства U-максимальности оказывается справедливым и более сильное утверждение.

Теорема 10.2. *В системе нормальных элементов всякое U-максимальное квазиравновесие является равновесием при однокритериальной функции выбора f^I с критерием U.*

Из этой теоремы немедленно вытекает

Следствие. *Множества U-максимальных квазиравновесий и U-максимальных равновесий совпадают.*

Доказательство теоремы 10.2. Докажем, что U-максимальное квазиравновесие $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}_I$ может быть представлено как равновесие с $f^I(x; U)$. Рассмотрим вектор $\tilde{x}_0$, который является вектором чистых выпусков в данном U-максимальном квазиравновесии. Покажем, что $\tilde{x}_0$ удовлетворяет условию

$$\tilde{x}_0 = f^I(\tilde{x}_0; U),$$

где $f^I(x_0; U)$ — функция выбора, порожденная задачей (1). Если это будет доказано, то тем самым исходное состояние квазиравновесия будет реализовано как равновесие.

Возьмем решение задачи (1) при $x_0 = \tilde{x}_0$. Пусть это будет вектор $x_0^* = f^I(\tilde{x}_0; U)$. Допустим, что x_0^* не совпадает с $\tilde{x}_0$.

Тогда

$$x_0^*,\ \tilde{x}_0 \in G_0, \qquad x_0^* \neq \tilde{x}_0, \tag{4}$$

и

$$U(x_0^*) > U(\tilde{x}_0). \tag{5}$$

В силу строгой вогнутости функции $U(x)$ и выпуклости множества G_0 тогда из (4)—(5) имеем, что для любого числа $\lambda \in (0, 1)$ вектор x^λ вида

$$x^\lambda = \lambda x_0^* + (1-\lambda)\tilde{x}_0 \tag{6}$$

таков, что

$$x^\lambda \in G_0 \tag{7}$$

и

$$U(x^\lambda) > U(\tilde{x}_0). \tag{8}$$

Но в силу теорем 7.1 и 7.5 из существования квазиравновесия с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ следует существование квазиравновесия с вектором чистых выпусков x^λ вида (6) при некотором достаточно малом числе $\lambda \in (0, 1)$.

Но неравенство (8) для такого x^λ, удовлетворяющего (7), не может иметь места в силу U-максимальности исходного квазиравновесия с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Это противоречие доказывает требуемое равенство, а вместе с ним и то, что квазиравновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ является равновесием при $f^I(x;\ U)$. Теорема 10.2 доказана.

Понятие R-оптимальности характеризует состояние системы менее «детально», чем понятие U-максимальности. Этим можно объяснить то обстоятельство, что столь определенной связи между R-оптимальными равновесиями и квазиравновесиями, как для U-максимальности, в общем случае нет.

В заключение раздела отметим следующий достаточно очевидный факт: состояние системы может быть эффективно в смысле одного подхода («R» или «U») и не быть эффективным в смысле другого. Действительно, если независимо заданы функция $U(x_0)$ и множество G_0, с одной стороны, и номенклатура R — с другой, то U-максимальное состояние может допускать увеличение чистого выпуска продуктов из номенклатуры R; и наоборот, может оказаться, что R-оптимальное состояние «улучшаемо» в смысле увеличения $U(x_0)$, если это достигается ценой уменьшения некоторых компонент ξ_{i0}, $i \in R$.

§ 10.3. Признаки условной эффективности квазиравновесий и равновесий

В настоящем параграфе указываются необходимые условия того, что реализовавшееся в системе квазиравновесие (или равновесие) является эффективным.

При изучении условий U-максимальности состояний системы нам понадобится явно указывать номенклатуру продуктов, увеличение чистых выпусков которых приводит к возрастанию значения критериальной функции $U(x_0)$.

Определение 10.3. Номенклатуру P назовем *желательной номенклатурой* в состоянии системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$, если существует такой вектор $\hat{x}_0$, что

$$U(\hat{x}_0) > U(\tilde{x}_0) \tag{9}$$

и

$$P = \{i:\ \hat{\xi}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}\}. \tag{10}$$

Заметим, что желательная номенклатура P в состоянии с вектором $\tilde{x}_0$, вообще говоря, не единственна.

Теорема 10.3. *Пусть в системе нормальных элементов задано U-максимальное квазиравновесие с дефицитной номенклатурой I и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Тогда для любой желательной номенклатуры P в состоянии с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ в каждой полной ограничивающей номенклатуре $T(P \cap I)$ найдется хотя бы один насыщенный элемент.*

Доказательство теоремы 10.3. Сделаем сначала два предварительных замечания.

А. Из того факта, что векторы $\tilde{x}_0$ и $\hat{x}_0$ связаны соотношениями (9), (10), в силу строгой вогнутости функции U и выпуклости множества G_0 следует, что для любого вектора x^λ вида

$$x^\lambda = \lambda\hat{x}_0 + (1-\lambda)\tilde{x}_0, \quad \lambda \in (0,\ 1),$$

имеют место соотношения

$$U(x^\lambda) > U(\tilde{x}_0), \quad x^\lambda \in G_0, \tag{11}$$

$$\xi^\lambda_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in P, \tag{12}$$

$$\tilde{\xi}_{i0} \geqslant \xi^\lambda_{i0}, \quad i \notin P. \tag{13}$$

Б. В соответствии с утверждениями теорем 7.6 и 7.5, если в номенклатуре $T(P \cap I)$ нет насыщенных элементов, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всех векторов $\tilde{\tilde{x}}_0$, удовлетворяющих условиям

$$\tilde{\xi}_{i0} + \varepsilon > \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \quad i \in P,$$

$$\tilde{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{i0}, \quad i \notin P,$$

в системе существуют квазиравновесия $\{(\tilde{\tilde{y}}_i,\ \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ с векторами чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы. Предположим, что утверждение теоремы 10.3 неверно, т. е. в номенклатуре $T(P \cap I)$ нет насыщенных элементов. Тогда имеет место ситуация, рассмотренная в замечании Б. Выберем теперь число $\lambda \in (0, 1)$ таким, чтобы вектор x^λ из замечания А удовлетворял (наряду с условиями (11)—(13)) соотношениям

$$\tilde{\xi}_{i0} + \varepsilon > \xi_{i0}^\lambda > \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in P.$$

Определим вектор $\tilde{\tilde{x}}_0$ так:

$$\tilde{\tilde{x}}_0 = x_0^\lambda \tag{14}$$

при только что выбранном числе $\lambda \in (0, 1)$.

В силу сказанного в замечании Б квазиравновесие с таким вектором чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$ существует, и в то же время в силу (14) и (11)

$$U(\tilde{\tilde{x}}_0) > U(\tilde{x}_0), \qquad \tilde{\tilde{x}}_0 \in X_0.$$

Последнее соотношение означает, что квазиравновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ не является U-максимальным, что противоречит условию теоремы. Теорема 10.3 доказана.

Напомним, что вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ называется потребительски согласованным, если он удовлетворяет соотношению $x = f^I(x)$; каждая компонента такого вектора удовлетворяет неравенству $\xi_i \leqslant F_i^I(x)$. Те продукты i, для которых это неравенство выполнено как строгое: $\xi_i < F_i^I(x)$, будем называть продуктами *неудовлетворенного спроса*, а о продуктах i, для которых имеет место равенство $\xi_i = F_i^I(x)$, будем говорить, что на них *спрос удовлетворен* (каждый раз подразумевая конкретную дефицитную номенклатуру I, при которой определяется спрос). В частности, указанное равенство заведомо выполняется для каждого $i \notin I$ (см. (3.74) в § 3.7), так что каждый недефицитный продукт заведомо является продуктом, спрос на который в состоянии потребительской согласованности удовлетворен.

Используя понятие удовлетворенного спроса, уточним необходимое условие U-максимальности равновесия.

Теорема 10.4. *Пусть в системе нормальных элементов задано U-максимальное равновесие. Тогда либо спрос на все продукты удовлетворен, либо в любой полной ограничивающей номенклатуре $T(i)$ для каждого продукта i, спрос на который не удовлетворен, существует насыщенный элемент.*

Доказательство теоремы 10.4. Предположим, что утверждение теоремы 10.4 неверно, т. е. существует такой индекс i^*, что

$$\tilde{\xi}_{i^*0} < F_{i^*}^I(\tilde{x}_0), \tag{15}$$

и в некоторой полной ограничивающей номенклатуре $T(i^*)$ нет насыщенного элемента. Соотношение (15) в сочетании с утверждением теоремы 9.4 означает, что желательная номенклатура P

состоит из дефицитного продукта i^* и, быть может, некоторых недефицитных продуктов, так что $P \cap I = \{i^*\}$ в состоянии системы с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Тогда в силу утверждения теоремы 10.3 исходное U-максимальное равновесие не может быть U-максимальным квазиравновесием, каковым оно является согласно теореме 10.2. Теорема 10.3 доказана.

Теоремы 10.3 и 10.4, если их взять в «отрицательной» форме, дают нам *достаточные условия для возможности вариаций состояния квазиравновесия* (теорема 10.3) *и равновесия* (теорема 10.4), приводящих к лучшему (в смысле «U-подхода») квазиравновесию или равновесию. В этом плане доказательство теоремы 10.4 обладает определенным недостатком — в нем дается лишь косвенное обоснование существования нового, лучшего состояния равновесия, без каких-либо сведений о возможном процессе его построения. Поэтому ниже мы приведем не только формулировку, но и самостоятельное доказательство теоремы 10.4′ о достаточном условии U-улучшаемости. Формулировка этой теоремы, как легко видеть, эквивалентна теореме 10.4. Однако «прямое» доказательство теоремы 10.4′, использующее соединение направленных вариаций квазиравновесий и потребительского выбора, дает «качественное» описание процедуры улучшения состояния равновесия, которого не было в ранее данном доказательстве теоремы 10.4.

Теорема 10.4′. *Пусть в системе нормальных элементов задано такое равновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$, что хотя бы на один продукт i спрос не удовлетворен и в некоторой полной ограничивающей номенклатуре $T(i)$ этого продукта нет насыщенных элементов. Тогда данное равновесие — U-улучшаемое.*

Доказательство теоремы 10.4′. Обозначим продукт i, фигурирующий в теореме 10.4′, через i^*. В силу теоремы 7.6 при $R = \{i^*\}$ (заменив в обозначениях теоремы 7.6 $\approx{x}_0$ на $\hat{x}_0$) получаем, что в системе существует такое квазиравновесие $\{(\hat{y}_i, \hat{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\hat{x}_0$, что

$$\hat{\xi}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in \{i^*\} \cup K, \tag{16}$$
$$\hat{\xi}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in I \setminus \{i^*\}. \tag{17}$$

Определим теперь число $\delta > 0$ соотношением

$$\delta = \hat{\xi}_{i^*0} - \tilde{\xi}_{i^*0}. \tag{18}$$

По этому числу δ найдем вектор $\approx{x}_0$, обладающий всеми свойствами вектора $\approx{x}$ из теоремы 9.4. Поскольку (согласно этим свойствам с учетом (16)—(18)) $\approx{x}_0 \leq \hat{x}_0$, то в силу теоремы 7.5 существует такое квазиравновесие $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\overset{\approx}{x}_0$ и дефицитной номенклатурой Ω, что

$$U(\overset{\approx}{x}_0) > U(\tilde{x}_0), \tag{19}$$

$$\overset{\approx}{x}_0 = f^I(\overset{\approx}{x}_0) \tag{20}$$

и (с учетом (16)—(18))

$$\overset{\approx}{x}_0 \leqq \hat{x}_0. \tag{21}$$

Это квазиравновесие с вектором чистых выпусков $\overset{\approx}{x}_0$ удовлетворяет согласно свойству 4 функции выбора (§ 3.7) соотношению (20) и при $I = \Omega$, а следовательно, является равновесием при дефицитной номенклатуре $I = \Omega$. Существование такого равновесия противоречит — в силу неравенства (19) — U-максимальности заданного в условии теоремы 10.4′ равновесия с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Теорема 10.4′ доказана.

Переходя теперь к «R-подходу», сформулируем и докажем теоремы о необходимых условиях R-оптимальности квазиравновесий и равновесий.

Теорема 10.5. *Пусть в системе нормальных элементов задано R-оптимальное квазиравновесие с дефицитной номенклатурой I и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Тогда для каждого $i \in R$ $(R \subseteq I)$ в полной условно-ограничивающей номенклатуре $T(i) \setminus Q(S)$, где*

$$S = \{j:\ j \notin R,\ \tilde{\xi}_{j0} > 0\}, \tag{22}$$

найдется хотя бы один насыщенный элемент.

Доказательство теоремы 10.5. Предположим, что утверждение теоремы 10.5 неверно, т. е. существует такой $i^* \in R$, что в номенклатуре $T(i^*) \setminus Q(S)$ нет насыщенных элементов. Тогда в силу утверждения теоремы 8.3 существует квазиравновесие с таким вектором чистых выпусков $\overset{\approx}{x}_0$, что

$$\overset{\approx}{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in R \setminus \{i^*\},$$
$$\overset{\approx}{\xi}_{i^*0} > \tilde{\xi}_{i^*0}, \qquad i^* \in R.$$

Существование такого квазиравновесия противоречит предположенной R-оптимальности исходного квазиравновесия. Теорема 10.5 доказана.

В нижеследующей теореме 10.6 важную роль играет, так же как и в теореме 10.4, неудовлетворенность спроса на ряд продуктов. Однако, в отличие от теоремы 10.4, здесь важен спрос не при данной дефицитной номенклатуре I, а при «пополненной» номенклатуре I', включающей в себя наряду с дефицитными продуктами из I также и продукты из номенклатуры S, которые фигурируют как «малоценные», т. е.

$$I' = I \cup S.$$

Заметим, что такое пополнение не влияет на потребительскую согласованность вектора $\tilde{x}_0$, т. е. если этот вектор потребительски согласован при дефицитной номенклатуре I, то он будет потребительски согласованным и при дефицитной номенклатуре I' (см. свойство 4 в гл. III).

Теорема 10.6. *Пусть в системе нормальных элементов задано R-оптимальное равновесие с дефицитной номенклатурой I. Тогда либо хотя бы на один продукт из номенклатуры R спрос (при пополненной дефицитной номенклатуре $I' = I \cup S$, где S определено в* (22)) *удовлетворен, либо хотя бы один элемент из номенклатуры $T(i) \setminus\setminus Q(S)$ для каждого $i \in R$ насыщен. (При этом $T(i)$ определено при «исходной» дефицитной номенклатуре I.)*

Доказательство теоремы 10.6. Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т. е. что найдется такой индекс $i = i^* \in R$, для которого в данном равновесии системы в множестве $T(i^*) \setminus\setminus Q(S)$ нет насыщенного элемента, и $\tilde{\xi}_{i0} < F_i^{I'}(\tilde{x}_0)$ при всех $i \in R$. Далее в этом доказательстве воспользуемся теоремой 9.1, причем в качестве множества H, фигурирующего в формулировке этой теоремы, возьмем множество $\{i^*\}$, состоящее из одного индекса, а в качестве множества M — множество S из формулировки теоремы. Встречающиеся ниже числа ε, λ и $\varkappa$ — это как раз те положительные числа, которые фигурируют в теореме 9.1.

Обозначим через $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ рассматриваемое равновесие, а через $\tilde{x}_0$ — вектор чистых выпусков в этом равновесии. В силу предположения об отсутствии насыщенного элемента в $T(i^*) \setminus\setminus Q(S)$ оказываются выполненными все условия, предъявляемые к квазиравновесию $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ теоремой 8.4. Определим число λ из формулировки теоремы 9.1 так:

$$\lambda = \frac{1}{2} \min_{i \in P} \left\{ \tilde{\tilde{\xi}}_{i0} - \tilde{\xi}_{i0} \right\},$$

где P — номенклатура, а $\tilde{\tilde{\xi}}_{i0}$, $i \in P$, — числа, фигурирующие в теореме 8.4. По этому числу $\lambda > 0$ найдем соответствующие числа ε и $\varkappa$ из теоремы 9.1. Выберем фигурирующие в теореме 8.4 числа $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, следующим образом:

$$\hat{\xi}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0} - \varkappa. \tag{23}$$

Так определенные числа $\hat{\xi}_{i0}$, $i \in S$, удовлетворяют требованию, предъявляемому к ним теоремой 8.4 при $R = \{i^*\}$. Тогда согласно утверждению теоремы 8.4 найдется квазиравновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$

с вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$, удовлетворяющим соотношениям

$$\approx{\xi}_{i0} > \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in \{i^*\} \cup (K \setminus S), \tag{24}$$

$$\approx{\xi}_{i0} \geqslant \hat{\xi}_{i0}, \qquad i \in S, \tag{25}$$

$$\approx{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \notin ((K \cup S) \cup \{i^*\}). \tag{26}$$

Выберем теперь вектор $z_0 = (\zeta_{10}, \ldots, \zeta_{i0}, \ldots, \zeta_{N0})$ следующим образом: сначала выберем в качестве компоненты ζ_{i^*0} произвольное число, удовлетворяющее с учетом (24) соотношениям

$$\tilde{\xi}_{i^*0} < \zeta_{i^*0} < \min\left\{\approx{\xi}_{i^*0},\ \tilde{\xi}_{i^*0} + \varepsilon\right\}, \tag{27}$$

и положим в формулировке теоремы 9.1 $x = \tilde{x}_0$, $z = z_0$ и $I = I'$. Так определенная компонента ζ_{i^*0} удовлетворяет условию (9.3) теоремы 9.1 при $H = \{i^*\}$ и $M = S$. Остальные компоненты выберем в соответствии с условиями (9.4)—(9.6) при $H = \{i^*\}$, $M = S$. При этом из (9.8) следует, что в данном случае имеет место равенство

$$\zeta_{i0} = \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \in R \setminus \{i^*\}. \tag{28}$$

Покажем теперь, что при принятом исходном предположении в системе существует равновесие с вектором чистых выпусков z_0. Это в силу (27) и (28) будет противоречить R-оптимальности исходного равновесия с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$, и тем самым теорема 10.6 будет доказана.

Из (26)—(28) получаем

$$\approx{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0} = \zeta_{i0}, \qquad i \in R \setminus \{i^*\},$$

$$\approx{\xi}_{i^*0} \geqslant \zeta_{i^*0} > \tilde{\xi}_{i^*0}, \qquad i^* \in R.$$

Из (23), (25) и (9.4) при $H \cup M = \{i^*\} \cup M$ имеем

$$\approx{\xi}_{i0} \geqslant \zeta_{i0}, \qquad i \in S.$$

Наконец, $\tilde{\xi}_{i0} = 0$, $i \notin (R \cup S)$. Отсюда с учетом (24), (9.5), (26) и (9.6) (при $H \cup M = \{i^*\} \cup M$) имеем

$$\approx{\xi}_{i0} \geqslant \zeta_{i0}, \qquad i \notin (R \cup S).$$

Объединяя полученные соотношения, получим

$$\approx{x}_0 \geqq z_0, \tag{29}$$

а согласно теореме 9.1

$$z_0 = f^{I'}(z_0). \tag{30}$$

Из неравенства (29) и факта существования квазиравновесия с вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$ следует, в соответствии с утверждением теоремы 7.5, существование квазиравновесия $\{(y_i, \hat{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков z_0 при дефицитной номенклатуре Ω. С другой стороны, в силу свойства 4 из § 3.7 дальнейшее расширение дефицитной номенклатуры в (30) от I' до Ω оставит z_0 потребительски согласованным. Таким образом, квазиравновесие $\{(y_i, \hat{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков z_0 при дефицитной номенклатуре Ω является равновесием. Это, как указано выше, и дает искомое противоречие. Теорема 10.6 доказана.

Теорему 10.6, дающую необходимое условие R-оптимальности равновесия, можно (как это делалось выше для U-максимальности) представить в эквивалентной «отрицательной» формулировке. Это дает достаточное условие улучшаемости состояния равновесия «в R-смысле», т. е. достаточное условие существования R-улучшающей направленной вариации состояния равновесия, сочетающей согласованное направленное изменение и производства, и потребления. (Что касается теоремы 10.5 об R-оптимальности, то ее «отрицательная» формулировка возвращает нас к достаточному условию существования немонотонной вариации чистых выпусков из § 8.2.)

Полученные таким образом достаточные условия существования направленных вариаций согласованных состояний (как R-улучшающих, так и U-улучшающих) содержат требование отсутствия насыщенных элементов в тех или иных ограничивающих номенклатурах. Наоборот, необходимые условия эффективности согласованных состояний сводятся к наличию либо насыщенного производственного элемента, либо удовлетворенного потребительского спроса на некоторый продукт. Такие элементы (продукты) можно трактовать как «узкие места», препятствующие улучшению состояния системы в рассматриваемом смысле. Соответствующие процедуры «локализации узких мест», имеющие качественно-конструктивный характер, были изложены в гл. VII и VIII.

Глава XI

СИСТЕМЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КОМПЛЕКТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

§ 11.1. Особенности систем с комплектным характером производства

Эта глава представляет собой дополнение к основному содержанию книги; она целиком посвящена рассмотрению систем производственных элементов более специального вида, нежели те «нормальные» элементы, о которых шла речь всюду в предыдущих главах. Определение и описание основных свойств таких «элементов с комплектной характеристикой» было приведено в гл. II. В той же гл. II при описании нормальных элементов общего вида мы отмечали, что внешнее описание «поведения» нормальных элементов, в силу принятых предположений, в некоторых отношениях сходно с описанием отраслевых технологий в моделях леонтьевского типа; а именно, при фиксированных квотах на затрачиваемые продукты (и фиксированных ценах) увеличение квот на валовой выпуск продукции данного элемента сопровождается увеличением или, во всяком случае, не уменьшением его уровня производственных затрат каждого продукта. Однако следует помнить, что такое сходство с леонтьевской технологией поддерживается лишь на экономически реализуемых, а не на всех технологически допустимых состояниях элемента, и лишь при фиксированных квотах на затрачиваемые продукты (и при фиксированных ценах). Изменение части квот на затрачиваемые продукты может привести к тому, что элемент, например, увеличит свой выпуск, увеличив затраты какого-либо дефицитного продукта (если соответствующая квота повысилась), но при этом уменьшив затраты некоторых других продуктов. Возможность подобных эффектов, связанных с «технологической заменимостью» продуктов, существенно усложняет анализ системы нормальных элементов общего вида.

Производственный элемент с комплектной характеристикой представляет собой как раз такой частный вид нормального элемента, в котором, согласно его определению, эффектов заменимости затрачиваемых продуктов быть не может. Технология производства у такого элемента предусматривает жестко заданные необходимые уровни затрат всех продуктов для производства каждого данного количества выпускаемого продукта; снизить необходимый уровень затрат одного продукта путем повышения затрат других продуктов такая технология не позволяет. Элемент с комплектной характеристикой (К-элемент) представляет собой непосредственное нелинейное обобщение леонтьевской технологии[1]). Он сохраняет многие специфические черты леонтьевской технологии, которые не сохраняются у нормальных элементов общего вида.

Системы К-элементов также оказываются наделенными многими полезными свойствами, которые отсутствуют в системах нормальных элементов общего вида. Анализ возможностей направленных вариаций чистых выпусков в таких системах удается провести более детально, и, соответственно, условия эффективности согласованных состояний устанавливаются в более полной форме.

Ниже в § 11.2 приводится ряд свойств К-элементов, утверждающих качественный характер жесткой монотонной связи между выпуском и затратами различных продуктов. Наличие таких связей приводит к своеобразным качественным следствиям относительно свойств согласованных состояний. Так, показывается, что если в системе К-элементов некоторый элемент затрачивает хотя бы один дефицитный продукт, то это «автоматически» делает его собственную продукцию дефицитной. (Иначе говоря, недефицитные продукты могут производиться только из недефицитных!) В § 11.3 устанавливаются некоторые вспомогательные качественные свойства продуктовых потоков в системе К-элементов, выявляется монотонный характер связей между «внутренними» потоками и конечными выпусками продуктов и локализуются изменения потоков при переходе от одного квазиравновесия к другому. В § 11.4 полученные ранее вспомогательные результаты применяются для анализа условной эффективности согласованных состояний в системе К-элементов.

В такой системе, как и в системе нормальных элементов общего вида, вопрос об условной эффективности реализовавшегося квазиравновесия тесно связан с вопросом о локализации насыщенных элементов. Однако проверка того, является ли К-элемент насыщенным, оказывается проще, чем аналогичная проверка для нормального элемента общего вида. Одно это уже оправдывает рассмотрение системы из элементов с комплектной характеристикой.

[1]) В леонтьевской технологии зависимость необходимых уровней затрат от уровня выпуска предполагается не только заданной, но и линейной. Нелинейные обобщения рассматривались, например, в [1].

Изучение системы элементов с комплектной характеристикой позволяет сделать более сильные, чем в системе элементов общего вида, утверждения относительно (условной) эффективности согласованного состояния. В частности, удается для определенного класса ситуаций получить не только необходимые, как ранее, но и достаточные, и даже необходимые и достаточные условия эффективности, а именно R-оптимальности. Удается также показать, что (при $R=I$) I-оптимальное (квази)равновесие является оптимальным в «усиленном» смысле: в таком состоянии системы невозможно увеличить не только внешние, но и внутренние потоки дефицитных продуктов.

Поскольку элементы с комплектной характеристикой являются частным случаем нормальных элементов, все теоремы предыдущей главы сохраняют силу и в данном случае. В связи с этим в данной главе приводятся только такие более специфические свойства эффективных состояний, которые имеют место именно в системе элементов с комплектной характеристикой.

§ 11.2. Дополнительные свойства К-элементов

В этом параграфе рассматриваются свойства элементов с комплектной характеристикой (К-элементов), которые будут использованы при исследовании свойств квазиравновесий и равновесий. В § 2.2 (гл. II) было приведено определение элементов с комплектной характеристикой (К-элементов), а также указывались два простейших свойства таких элементов (свойства К1, К2). Приводимые далее дополнительные свойства К-элементов связаны в основном с понятием насыщенности.

Дело в том, что для К-элемента можно дать несколько иные определения ограничивающей номенклатуры и насыщенного элемента, нежели те, которые были даны для нормального элемента в общем случае (см. определения 6.1 и 6.5). Эти «новые» определения имеют более простую форму, однако они оказываются эквивалентными определениям 6.1 и 6.5 применительно к К-элементам.

Пусть система находится в квазиравновесии $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ с множеством дефицитных продуктов I. Вновь выпишем экстремальную задачу при ограничениях:

$$\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max, \tag{1}$$

$$(y_i, x_i) \in G_i, \tag{2}$$

$$\xi_{ji} \leqslant \bar{\xi}_{ji}, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$y_i \leqslant \bar{y}_i. \tag{4}$$

Напомним, что задачу (1), (2), (3), (4) мы условились обозначать как $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \bar{\xi}_{ji},\ I\rangle$ (см. гл. II), так что задачи (1), (2) и (1), (2), (3) обозначаются соответственно как $\langle i\rangle$ и $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji},\ I\rangle$, а задача (1), (2), (4) — как $\langle i;\ \bar{y}_i\rangle$ либо просто $\langle i;\ \cdot\rangle$, если имеется в виду любое из сочетаний ограничений (3) и (4) с условиями (1) и (2).

Указываемые далее свойства К.3 — К.6 приводятся без доказательств ввиду их элементарности.

Свойство К.3. Если вектор $(\bar{y}_i,\ \bar{x}_i)$ — состояние К-элемента P_i — является решением экстремальной задачи $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji},\ I\rangle$ или $\langle i;\ \bar{y}_i,\ \bar{\xi}_{ji},\ I\rangle$, то

1) этот же вектор есть решение задачи $\langle i;\ \bar{y}_i\rangle$;

2) y-я компонента вектора $(\bar{y}_i,\ \bar{x}_i)$ удовлетворяет соотношениям

$$\bar{y}_i \leqslant \bar{y}_{i\,\max},$$

где $\bar{y}_{i\,\max}$ — y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \bar{\xi}_{ji},\ I\rangle$, и $\bar{y}_{i\,\max} \leqslant y_{i\,\max}$.

Свойство К.4. Если числа y_i^1 и y_i^2 удовлетворяют соотношению

$$0 \leqslant y_i^1 < y_i^2 \leqslant y_{i\max},$$

то

$$0 \leqslant \Pi_i^1 < \Pi_i^2 \leqslant \Pi_{i\max},$$

где положено $\Pi_i^1 = y_i^1 - \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ji}(y_i^1)$, $\Pi_i^2 = y_i^2 - \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ji}(y_i^2)$,

$$\Pi_{i\,\max} = y_{i\,\max} - \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ji}(y_{i\,\max}).$$

Определение 11.1. Будем говорить, что технология К-элемента P_i (i-я технология) *зависит от j-го продукта в точке* $\bar{y}_i$, если

$$\bar{y}_i < y_{i\,\max} \quad \text{и} \quad \varphi_{ji}(y_i) > 0 \quad \text{при} \quad y_i > \bar{y}_i.$$

Если $\bar{y}_i = y_{i\,\max}$, то будем говорить, что i-я технология не зависит ни от одного продукта.

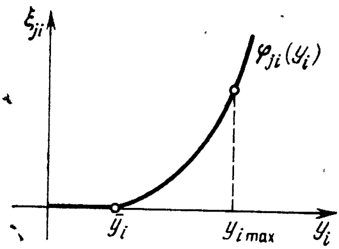


Рис. 11.1.

Согласно этому определению i-я технология зависит от j-го продукта в точке $\bar{y}_i$, если при любом выгодном элементу P_i увеличении выпуска его продукции ($\bar{y}_i < y_i \leqslant y_{i\,\max}$) этот элемент потребляет ненулевое количество продукта j.

Понятие зависимости иллюстрируется с помощью рис. 11.1, на котором изображен график функции $\varphi_{ji}(y_i)$. Согласно определению 11.1 i-я технология зависит от продукта j во всех точках промежутка $[\bar{y}_i, y_{i\,\max})$ и не зависит в точках промежутка $[0, \bar{y}_i)$ и в точках $y_i \geqslant y_{i\,\max}$.

Свойство К.5. Пусть числа $\bar{y}_i$, $\bar{\xi}_{ji}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяют соотношениям

$$0 \leqslant \bar{y}_i \leqslant y_{i\,\max},$$
$$\bar{\xi}_{ji} = \varphi_{ji}(\bar{y}_i), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Зафиксируем произвольную номенклатуру $I \subseteq \Omega$. Тогда $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$, где $\bar{x}_i = (\bar{\xi}_{1i}, \ldots, \bar{\xi}_{Ni})$, является решением задачи $\langle i; \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$ в том и только в том случае, когда либо а) $\bar{y}_i = y_{i\,\max}$; либо б) i-я технология зависит в точке $\bar{y}_i$ от некоторого $j \in I$.

Заметим, что вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ в формулировке свойства К.5, очевидно, является решением задачи $\langle i; \bar{y}_i, \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$. С учетом этого свойство К.5 можно перефразировать следующим образом: вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ является решением задачи $\langle i; \bar{y}_i, \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$, но не является решением задачи $\langle i; \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$, тогда и только тогда, когда $\bar{y}_i < y_{i\,\max}$ и i-я технология не зависит в точке $\bar{y}_i$ ни от одного продукта $j \in I$.

Теорема 11.1. *Пусть система* К-*элементов находится в квазиравновесии* $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ *с дефицитной номенклатурой* I. *Тогда справедливы соотношения*

$$\varphi_{ij}(\bar{y}_{j\,\max}) = 0 \quad \text{для} \quad i \in I, \quad j \in K, \tag{5}$$

где $\bar{y}_{i\,\max}$ — *у-я компонента решения задачи* $\langle j; \bar{\xi}_{ij}, I\rangle$, *а* $K = \Omega \backslash I$.

Доказательство теоремы 11.1. Вспомним, что для недефицитного продукта $j \in K$ должно быть выполнено условие

$$\bar{y}_j < \bar{y}_{j\,\max},$$

тогда как $\bar{y}_j$, в силу определения квазиравновесия, есть y-я компонента решения задачи $\langle j; \bar{y}_j, \bar{\xi}_{ij}, I\rangle$. Поэтому вектор $(\bar{y}_j, \bar{x}_j)$ является решением задачи $\langle j; \bar{y}_j, \bar{\xi}_{ij}, I\rangle$, но не задачи $\langle j; \bar{\xi}_{ij}, I\rangle$, и при этом заведомо $\bar{y}_j < y_{j\,\max}$, так что в силу свойства К.5 j-я технология не может зависеть ни от одного продукта $i \in I$. Это и означает выполнение условия (5). Теорема 11.1 доказана.

Теорема 11.1 говорит о том, что если система К-элементов находится в квазиравновесии, то недефицитный продукт производится лишь из недефицитных продуктов (поскольку $\bar{\xi}_{ij} = 0$ при $i \in I$ и $j \in K$ согласно соотношению (5)).

Ранее в § 6.2 были введены определения ограничивающей номенклатуры и насыщенного элемента, игравшие важную роль в формулировке условий возможности изменения чистых выпусков и условий эффективности (квази) равновесий (гл. VI, VII, VIII, X). Для элементов с комплектной характеристикой, как уже отмечалось выше, могут быть даны самостоятельные определения этих понятий, эквивалентные введенным ранее.

Рассмотрим квазиравновесие системы $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I.

Определение 11.2. Будем называть К-элемент P_i, $i \in I$, *насыщенным в квазиравновесии* $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$, если

$$\bar{y}_i = y_{i\,\max}. \tag{6}$$

Если $\bar{y}_i \neq y_{i\,\max}$, то К-элемент P_i, $i \in I$, назовем *ненасыщенным.*

Заметим, что в силу п. 2) свойства К.3 единственной альтернативой к $\bar{y}_i = y_{i\,\max}$ является[1])

$$\bar{y}_i < y_{i\,\max}. \tag{7}$$

Поэтому эквивалентное определение ненасыщенности К-элемента P_i, $i \in I$,— это неравенство (7).

Определение 11.3. Пусть К-элемент P_i, $i \in I$, находится в состоянии $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$, и пусть T_i — номенклатура тех дефицитных продуктов, от которых технология этого элемента зависит в точке $\bar{y}_i$.

Будем называть эту номенклатуру T_i *ограничивающей номенклатурой элемента P_i (в точке $\bar{y}_i$).*

В соответствии с этим определением номенклатуру T_i составляют те дефицитные продукты, без увеличения потребления которых невозможно увеличить выпуск продукции элемента P_i (поскольку функции $\varphi_{ji}(y_i)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, строго возрастают на множестве $\{y_i\colon \varphi_{ji}(y_i) > 0\}$).

Теорема 11.2. *Для элемента P_i с комплектной характеристикой определения* 6.5 *и* 11.3 *ограничивающей номенклатуры T_i эквивалентны.*

Прежде чем дать доказательство этой теоремы, приведем и прокомментируем

Следствие теоремы 11.2. *Для элемента P_i с комплектной характеристикой определения насыщенности* 6.1 *и* 11.2 *эквивалентны.*

Замечание. Вспомним, что элемент P_i насыщен в смысле определения 6.1 тогда и только тогда, когда пуста его ограничивающая номенклатура в смысле определения 6.5. То же самое, разумеется, имеет место и при использовании определений 11.2 и 11.3 соответственно — это вытекает из самих этих определений.

Итак, в теоремах-условиях существования направленных

---

[1]) Подчеркнем, что для нормального элемента общего вида это не обязательно так! Действительно, введя квоты некоторым специальным образом, мы в принципе можем получить — это заранее не исключается — такую ситуацию, когда валовой выпуск элемента, наиболее выгодный для него, превысит уровень $y_{i\,\max}$ (наиболее выгодный при отсутствии ограничений).

вариаций и эффективности согласованных состояний, где фигурируют насыщенные элементы и ограничивающие номенклатуры, мы в случае системы К-элементов можем пользоваться более простыми и легче проверяемыми определениями 11.2 и 11.3.

Прежде чем доказать теорему 11.2, докажем следующее вспомогательное

Свойство К.6. Пусть вектор $(\bar{y}_i, \bar{x}_i)$ — решение задачи $\langle i; \bar{\xi}_{ji}, I\rangle$. Тогда, какими бы ни были множество $T_i \subseteq I$ и число $\alpha > 0$, решение задачи

$$
\begin{gathered}
\Pi_i = \gamma_i y_i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji} = \max, \\
(y_i,\ x_i) \in G_i, \\
\xi_{ji} \leqslant \bar{\xi}_{ji}, \quad j \notin I \setminus T_i, \\
\sum_{j \in T_i} (\xi_{ji} - \bar{\xi}_{ji})^+ \leqslant \alpha
\end{gathered}
\tag{8}
$$

единственно.

Доказательство свойства К.6. Обозначим два решения задачи (8) через (y_i^1, x_i^1) и (y_i^2, x_i^2) соответственно. Тогда

$$
\Pi_i^1 = \gamma_i y_i^1 - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji}^1 = \gamma_i y_i^2 - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji}^2 = \Pi_i^2, \tag{9}
$$

$$
y_i^1 \leqslant y_{i\max}, \quad y_i^2 \leqslant y_{i\max}. \tag{10}
$$

Очевидно, что (y_i^1, x_i^1) есть решение задачи $< i;\ \xi_{ji}^1,\ I >$, а (y_i^2, x_i^2) — задачи $< i;\ \xi_{ji}^2,\ I >$. Согласно свойству К.3 эти же векторы есть решения задач $< i;\ y_i^1 >$ и $< i;\ y_i^2 >$ соответственно. Поэтому из соотношений (9) и (10) имеем

$$
y_i^1 = y_i^2. \tag{11}
$$

Но в силу свойства К.1

$$
\xi_{ji}^1 = \varphi_{ji}(y_i^1), \quad \xi_{ji}^2 = \varphi_{ji}(y_i^2) \quad \text{для всех} \quad j \in \Omega. \tag{12}
$$

Из соотношений (11) и (12) следует, что $\xi_{ji}^1 = \xi_{ji}^2$, $j \in \Omega$. Свойство К.6 доказано.

Доказательство теоремы 11.2. Обозначим ограничивающее множество, выделяемое определением 6.5, через $T_i^{\text{н}}$, а выделяемое определением 11.3 — через $T_i^{\text{к}}$. Доказательство теоремы проведем в следующем порядке:

1) Докажем, что если $T_i^{\text{к}} = \varnothing$, то $T_i^{\text{н}} = \varnothing$.

2) Докажем, что если $T_i^{\text{к}} \neq \varnothing$, то номенклатура $T_i^{\text{к}}$ удовлетворяет условиям, предъявляемым к $T_i^{\text{н}}$ определением 6.5, т. е. получим, что номенклатура $T_i^{\text{н}}$ существует и $T_i^{\text{н}} = T_i^{\text{к}}$.

3) Докажем, что если $T_i^{\text{и}} = \varnothing$, то $T_i^{\text{к}} = T_i^{\text{н}} = \varnothing$.

4) Докажем, что если $T_i^{\text{н}} \neq \varnothing$, то $T_i^{\text{к}}$ существует и $T_i^{\text{к}} = T_i^{\text{н}}$.

1. Пусть $T_i^{\text{к}} = \varnothing$; тогда в силу определения 11.2 $\bar{y}_i = y_{i\,\max}$ и, следовательно, $T_i^{\text{н}} = \varnothing$ согласно достаточному условию насыщенности (см. гл. VI).

2. Пусть $T_i^{\text{к}} \neq \varnothing$, т. е. не пусто множество

$$T_i^{\text{к}} = \{j \;:\; \varphi_{ji}(y_i) > 0,\; y_i > \bar{y}_i;\; j \in I\}. \tag{13}$$

Надо показать (в соответствии с определением 6.5) следующее: при некотором числе $\varepsilon > 0$ и некоторой неубывающей функции $\psi(\alpha)$, $\alpha \in [0, \varepsilon]$, y-я компонента решения задачи $\langle i;\ \alpha,\ T_i\rangle$ удовлетворяет соотношению

$$\gamma_i(y_i^\alpha - \bar{y}_i) \geqslant \alpha + \psi(\alpha) \tag{14}$$

при каждом $\alpha \in (0, \varepsilon]$ и при $T_i \equiv T_i^{\text{к}}$. Определим число $\hat{y}_i$ соотношением

$$\hat{y}_i = \max_{0 \leqslant y_i \leqslant y_{i\max}} \{y_i \;:\; \varphi_{ji}(y_i) = 0 \text{ для всех } j \in I \setminus T_i\}.$$

Докажем, что $\hat{y}_i$ удовлетворяет соотношениям

$$\bar{y}_i < \hat{y}_i \leqslant y_{i\,\max}. \tag{15}$$

Поскольку К-элемент P_i — ненасыщенный (по условию), то в силу (15)

$$\bar{y}_i < y_{i\,\max}. \tag{16}$$

Допустим, что (15) неверно, т. е.

$$\hat{y}_i \leqslant \bar{y}_i.$$

Последнее неравенство означает, что i-я технология зависит в точке $\bar{y}_i$, удовлетворяющей неравенству (16), от некоторого $j^* \in I \setminus T_i$, поскольку в силу определения числа $\hat{y}_i$ и соотношения (16) i-я технология зависит в точке $\hat{y}_i$ от некоторого $j^* \in I \setminus T_i$. Однако тот факт, что i-я технология зависит от $j^* \in I \setminus T_i$ в точке $\bar{y}_i$, противоречит определению ограничивающей номенклатуры T_i. Это противоречие и доказывает с учетом (16) справедливость соотношения (15). Положим $\bar{\bar{y}}_i = \bar{y}_i + \frac{1}{2}(\hat{y}_i - \bar{y}_i)$. Из соотношения (15) следует

$$\bar{y}_i < \bar{\bar{y}}_i < \hat{y}_i \leqslant y_{i\,\max}, \tag{17}$$

а потому в силу определения множества T_i

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{ji} &< \bar{\bar{\xi}}_{ji} = \varphi_{ji}(\bar{\bar{y}}_i), \quad j \in T_i; \\ \bar{\xi}_{ji} &= \bar{\bar{\xi}}_{ji} = \varphi_{ji}(\bar{\bar{y}}_i), \; j \in I \setminus T_i. \end{aligned} \tag{18}$$

В силу свойства К.4 из неравенств (17) получаем

$$\gamma_i\bar{y}_i-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\bar{\xi}_{ji}<\gamma_i\bar{\bar{y}}_i-\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\bar{\bar{\xi}}_{ji},$$

где

$$\bar{\bar{\xi}}_{ji}=\varphi_{ji}(\bar{\bar{y}}_i),\quad \bar{\xi}_{ji}=\varphi_{ji}(\bar{y}_i),\qquad j=1,\ldots,N.$$

Тогда, поскольку $T_i\subseteq\Omega$, имеем

$$\gamma_i(\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i)>\sum_{j\in\Omega}\gamma_j(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})\geqslant\sum_{j\in T_i}\gamma_j(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})>0;\tag{19}$$

в последнем неравенстве учтены неравенства в (18). Пусть α — произвольная точка отрезка $[0,1]$. Положим

$$\beta=\frac{\alpha}{\sum\limits_{j\in T_i}\gamma_j(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})},\quad \psi(\alpha=\alpha\cdot\frac{\gamma_i(\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i)-\sum\limits_{j\in T_i}\gamma_i(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})}{\sum\limits_{j\in T_i}\gamma_j(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})}.\tag{20}$$

В силу (19) β и $\psi(\alpha)$ определены при каждом $\alpha\in[0,1]$, причем $\beta\geqslant 0$ и $\psi(\alpha)$ — возрастающая функция при $\alpha\in[0,1]$. Обозначим через $(\tilde{y}_i^{\alpha},\tilde{x}_i^{\alpha})$ решение задачи

$$\begin{gathered}\Pi_i=\gamma_iy_i-\sum_j\gamma_j\xi_{ji}=\max,\\(y_i,x_i)\in G_i,\\\xi_{ji}\leqslant\bar{\xi}_{ji}+\beta(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji}),\qquad j\in T_i,\\\xi_{ji}\leqslant\bar{\xi}_{ji},\qquad j\in I\setminus T_i.\end{gathered}\tag{21}$$

Тогда $\tilde{y}_i^{\alpha}=\min\limits_{j\in T_i}\{\varphi_{ji}^{-1}(\bar{\xi}_{ji}+\beta(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji}))\}$, где $\varphi_{ji}^{-1}(\xi_{ji})$ — определенная на отрезке $[\bar{\xi}_{ji},\xi_{ji\,\max}]$ функция, обратная к φ_{ji} (см. свойство К.2). Поскольку функция φ_{ji}^{-1} — вогнутая, то

$$\tilde{y}_i^{\alpha}\geqslant\bar{y}_i+\beta(\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i),\tag{22}$$

где $\bar{y}_i+\beta_i(\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i)$ — ординаты точек (ξ_{ji},y_i), $j\in T_i$, абсциссы которых равны $(\bar{\xi}_{ji}+\beta(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji}))$; каждая такая точка лежит на отрезке, соединяющем точки[1] $(\bar{\xi}_{ji},\bar{y}_i)$ и $(\bar{\bar{\xi}}_{ji},\bar{\bar{y}}_i)$, $j\in I$. Поскольку $\tilde{y}_i^{\alpha}\geqslant\bar{y}_i$ при $\alpha>0$, то $\tilde{\xi}_{ji}^{\alpha}\geqslant\bar{\xi}_{ji}$, $j\in\Omega$, а потому

$$\sum_{j\in T_i}\gamma_j(\tilde{\xi}_{ji}^{\alpha}-\bar{\xi}_{ji})=\sum_{j\in T_i}\gamma_j(\tilde{\xi}_{ji}^{\alpha}-\bar{\xi}_{ji})^+\leqslant\beta\cdot\sum_{j\in T_i}\gamma_j(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})=\alpha,$$

т. е. вектор $\begin{pmatrix}\tilde{y}_i^{\alpha}\tilde{x}_i^{\alpha}\end{pmatrix}$ допустим для задачи $\langle i;\ \alpha,\ T_i\rangle$, единствен-

[1]) Отметим, что хотя отрезки, соединяющие точки $(\bar{\xi}_{ji},\bar{y}_{ji})$, $(\bar{\bar{\xi}}_{ji},\bar{\bar{y}}_i)$, быть может, различны при различных индексах $j\in T_i$, так же как и абсциссы $(\bar{\xi}_{ji}+\beta(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji}))$, но ординаты точек $(\xi_{ji}+\beta(\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji}),\ y_i)$ на этих отрезках совпадают и равны величине $\bar{y}_i+\beta(\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i)$.

ное решение которой (см. свойство К.6) обозначим через $\left(y_i^{\alpha}, x_i^{\alpha}\right)$. Поэтому

$$\gamma_i y_i^{\alpha} - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji}^{\alpha} \geqslant \gamma_i \tilde{y}_i^{\alpha} - \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \tilde{\xi}_{ji}^{\alpha}. \tag{23}$$

Тогда

$$y_i^{\alpha} \geqslant \tilde{y}_i^{\alpha}. \tag{24}$$

(Если бы $y_i^{\alpha} < \tilde{y}_i^{\alpha}$, то вектор $\left(y_i^{\alpha}, x_i^{\alpha}\right)$ был бы допустим для задачи (21) и в то же время $\left(y_i^{\alpha}, x_i^{\alpha}\right)$ был бы не равен единственному решению этой задачи. Отсюда $\gamma_i y_i^{\alpha} - \sum\limits_{j=1}^{N} \gamma_j \xi_{ji}^{\alpha} < \gamma_i \tilde{y}_i^{\alpha} - \sum\limits_{j=1}^{N} \gamma_j \tilde{\xi}_{ji}^{\alpha}$, что противоречило бы соотношению (23).) Из (23), (24) и определений (20) числа β и функции $\psi(\alpha)$ имеем

$$\gamma_i\left(y_i^{\alpha} - \bar{y}_i\right) \geqslant \beta \gamma_i \left(\bar{\bar{y}}_i - \bar{y}_i\right) =$$

$$= \alpha \left\{ 1 + \frac{\gamma_i\left(\bar{\bar{y}}_i - \bar{y}_i\right) - \sum\limits_{j \in T_i} \gamma_j \left(\bar{\bar{\xi}}_{ji} - \bar{\xi}_{ji}\right)}{\sum\limits_{j \in T_i} \gamma_j \left(\bar{\bar{\xi}}_{ji} - \bar{\xi}_{ji}\right)} \right\} = \alpha + \psi(\alpha),$$

т. е. доказываемое соотношение (14) выполнено для всех $\alpha \in (0, \varepsilon]$, если положить $\varepsilon = 1$.

3. Пусть теперь $T_i^{\text{н}} = \varnothing$. Если бы номенклатура $T_i^{\text{к}}$ не была пустой, то в силу доказанного п. 2 номенклатура $T_i^{\text{к}}$ удовлетворяла бы требованиям, предъявляемым к ограничивающей номенклатуре $T_i^{\text{н}}$, что противоречит условию. Следовательно, $T_i^{\text{к}} = \varnothing$.

4. Пусть теперь $T_i^{\text{н}} \neq \varnothing$, т. е. P_i ненасыщен. Рассмотрим номенклатуру $T_i^{\text{к}}$, т. е. номенклатуру вида (13). Такая номенклатура непуста, так как в противном случае в силу п. 1 $T_i^{\text{н}}$ была бы пустой. Докажем, что $T_i^{\text{н}} = T_i^{\text{к}}$. Рассмотрим $j^* \in T_i^{\text{к}} \setminus T_i^{\text{н}}$. Тогда для $\left(y_i^{\alpha}, x_i^{\alpha}\right)$ — решения задачи $\langle i;\ \alpha,\ T_i^{\text{н}} \rangle$

$$\xi_{j^*i}^{\alpha} = \varphi_{j^*i}\left(y_i^{\alpha}\right) > \varphi_{j^*i}\left(\bar{y}_i\right) = \bar{\xi}_{j^*i} \tag{25}$$

при любом достаточно малом $\alpha > 0$, так как из ненасыщенности элемента следует, что $y_i^{\alpha} > \bar{y}_i$, и имеет место соотношение (13). Но (25) противоречит тому, что $\xi_{j^*i}^{\alpha} \leqslant \bar{\xi}_{j^*i}$ при всех $j^* \in I \setminus T_i^{\text{н}}$. Итак,

$$T_i \subseteq T_i^{\text{н}}. \tag{26}$$

Пусть $j^* \in T_i^{\text{н}}$. Тогда в любом интервале $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\alpha > 0$, что $\xi_{j^*i}^{\alpha} > \bar{\xi}_{j^*i}$. Ввиду произвольности ε это означает, что $\varphi_{j^*i}\left(y_i^{\alpha}\right) > \varphi_{j^*i}\left(\bar{y}_i\right)$ при $y_i^{\alpha} > \bar{y}_i$, т. е. $j^* \in T_i^{\text{к}}$. Итак,

$T_i^{\text{н}} \subseteq T_i^{\text{к}}$; это включение вместе с (26) и доказывает, что если T_i — ограничивающая номенклатура в смысле определения 6.5, то она ограничивающая и в смысле 11.3. Теорема 11.2 доказана.

В заключение этого параграфа укажем, что из определения 11.3 ограничивающей номенклатуры T_i и определения 6.8 порождающей номенклатуры Q_i (рассматриваемых в некотором квазиравновесии $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I) следует, что

$$Q_i \cap I \subseteq T_i \tag{27}$$

для всех ненасыщенных К-элементов P_i, $i \in I$. Напомним, что для нормального элемента, не являющегося К-элементом, включение (27) может быть не выполнено, поскольку при некотором j^* возможно $j^* \in I \setminus T_i$, но $\bar{\xi}_{j^*i} > 0$ (т. е. $j^* \in Q_i$); для К-элемента (в силу определения 11.3) в этом случае j^* обязательно входил бы в T_i.

§ 11.3. Потоки в системе К-элементов

Ниже будет установлен ряд фактов относительно свойств квазиравновесий и равновесий в системе, состоящей только из элементов с комплектной характеристикой. Эти факты касаются главным образом связи между разными потоками продуктов.

В целом параграф носит вспомогательный характер — содержащиеся в нем свойства системы элементов с комплектной характеристикой используются в следующем параграфе для исследования эффективных квазиравновесий и равновесий [1]).

Лемма 11.1. *Пусть в системе* К-*элементов существуют два состояния квазиравновесия (равновесия)* $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}_I$ *и* $\{(\bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{x}}_i)\}$. *Определим множества* S^* *и* R *соотношениями*

$$S^* = \{i : \bar{\bar{\xi}}_{i0} < \bar{\xi}_{i0},\ i \in I\}; \quad R = I \setminus S^*. \tag{28}$$

Тогда: 1. *Множество индексов*

$$C = \{i : \bar{\bar{y}}_i < \bar{y}_i, \quad i \in I\} \tag{29}$$

удовлетворяет включению

$$C \subseteq Q(S^*) \cap I. \tag{30}$$

2. *Для всех* $i \in T(R) \setminus (Q(S^*) \cap I)$, $j = 1, 2, \ldots, N$,

$$\bar{\bar{\xi}}_{ij} \geqslant \bar{\xi}_{ij}.$$

Следствие 1 леммы 11.1. *В условиях леммы* 11.1 *утверждению* 2 *леммы может быть придана следующая форма: при* $j = 1, 2, \ldots, N$ $\bar{\bar{\xi}}_{ij} \geqslant \bar{\xi}_{ij}$ *для всех* $i \in (Q(R) \cap I) \setminus (Q(S^*) \cap I)$.

---

[1]) В доказательствах цены γ_i, $i = 1, \ldots, N$, приняты для упрощения записи равными 1.

Действительно, из соотношений $S^* \subseteq Q(S^*)$, $R \subseteq T(R)$, $R \subseteq Q(R)$ и $R = I \backslash S^*$ следует, что

$$R\backslash(Q(S^*) \cap I) \subseteq T(R)\backslash(Q(S^*) \cap I) \subseteq I\backslash(Q(S^*) \cap I) = \\ = (I\backslash S^*)\backslash(Q(S^*) \cap I) = R\backslash(Q(S^*) \cap I);\ R\backslash(Q(S^*) \cap I) \subseteq \\ \subseteq (Q(R) \cap I)\backslash(Q(S^*) \cap I) \subseteq I\backslash(Q(S^*) \cap I) = R\backslash(Q(S^*) \cap I),$$

т. е. справедлива цепочка равенств

$$R\backslash(Q(S^*) \cap I) = T(R)\backslash(Q(S^*) \cap I) = I\backslash(Q(S^*) \cap I) = \\ = (Q(R) \cap I)\backslash(Q(S^*) \cap I).$$

Из последних соотношений, в силу утверждения 2 леммы 11.1, и следует справедливость следствия 1.

Следствие 2 леммы 11.1. *Пусть выполнены все условия леммы, но $S^* = \varnothing$. Тогда для всех $i \in I$ и всех $j \in \Omega$ и $j = 0$ справедливы неравенства*

$$\bar{\bar{\xi}}_{ij} \geqslant \bar{\xi}_{ij}.$$

Действительно, из условия $S^* = \varnothing$ следует, что $R = I$ (см. определение (28)), т. е. $T(R) = T(I) = I$. В то же время, если $S^* = \varnothing$, то и $Q(S^*) \cap I = \varnothing$, а поэтому в условиях леммы $T(R)\backslash(Q(S^*) \cap I) = I$, что и доказывает, в силу утверждения 2 леммы 11.1, справедливость следствия 2.

Доказательство леммы 11.1. Докажем утверждение 1. Определим множества L, Q, Q^I соотношениями

$$L = C\backslash(Q(S^*) \cap I), \quad Q = Q(S^*), \quad Q^I = Q(S^*) \cap I \tag{31}$$

и покажем, что $L = \varnothing$, откуда и будет следовать справедливость утверждения 1 леммы. Предположим, что $L \neq \varnothing$, и найдем знак суммы $\sum_{i \in L} (\bar{\bar{\Pi}}_i - \bar{\Pi}_i)$, где

$$\bar{\Pi}_i = \bar{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \bar{\xi}_{ji}; \quad \bar{\bar{\Pi}}_i = \bar{\bar{y}}_i - \sum_{j=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ji};$$

$$\sum_{i \in L} (\bar{\bar{\Pi}}_i - \bar{\Pi}_i) = \sum_{\substack{i \in L \\ j \in \Omega}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) - \sum_{\substack{i \in L \\ j \in \Omega}} (\bar{\bar{\xi}}_{ji} - \bar{\xi}_{ji}) + \sum_{i \in L} (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}) = \\ = \sum_{\substack{i \in L \\ j \in \Omega \backslash L}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) - \sum_{\substack{i \in L \\ j \in \Omega \backslash L}} (\bar{\bar{\xi}}_{ji} - \bar{\xi}_{ji}) + \sum_{i \in L} (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}). \tag{32}$$

Из определений (28) и (31) следует, что

$$\sum_{i \in L} (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}) \geqslant 0. \tag{33}$$

В то же время из определения (29) получаем, что $\bar{\bar{\xi}}_{ji} \leqslant \bar{\xi}_{ji}$ для всех $j \in \Omega\backslash L$ и всех $i \in L$, так как $\bar{\xi}_{ji} = \varphi_{ji}(\bar{y}_i)$, $\bar{\bar{\xi}}_{ji} = \varphi_{ji}(\bar{\bar{y}}_i)$ и функции $\varphi_{ji}(y_i)$ — неубывающие; следовательно,

$$\sum_{\substack{i\in L\\ j\in\Omega\setminus L}} (\bar{\bar{\xi}}_{ji}-\bar{\xi}_{ji})\leqslant 0. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь знак выражения

$$\sum_{\substack{i\in L\\ j\in\Omega\setminus L}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij}).$$

Если $j\in\Omega\setminus L$, то в соответствии с (31) либо а) $j\in\Omega\setminus I$, либо б) $j\in I\setminus L$. Рассмотрим случай а). Возможны два гипотетических варианта: $\bar{\xi}_{ij}>0$ и $\bar{\xi}_{ij}=0$; если $\bar{\xi}_{ij}>0$, $i\in L\subseteq I$, то $j\in I$ согласно свойству К.5, а это противоречит условию случая а). Следовательно, в случае а) $\bar{\xi}_{ij}=0$ и $\bar{\bar{\xi}}_{ij}\geqslant 0$ или (при $K=\Omega\setminus I$)

$$\sum_{\substack{i\in L\\ j\in K}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})=\sum_{\substack{i\in L\\ j\in K}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij})\geqslant 0. \tag{35}$$

Рассмотрим случай б). Этот случай распадается на два варианта: $j\in Q^I$ и $j\in I\setminus(Q^I\cup C)$. Если $j\in Q^I$ и $\bar{\xi}_{ij}>0$, то $i\in Q$, следовательно (поскольку $i\in I$), $i\in Q^I$; тогда $i\notin L$. Поэтому если $j\in Q^I$ и $i\in L$, то $\bar{\xi}_{ij}=0$; мы приходим к соотношению

$$\sum_{\substack{i\in L\\ j\in Q^I}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})=\sum_{\substack{i\in L\\ j\in Q^I}} \bar{\bar{\xi}}_{ij}\geqslant 0. \tag{36}$$

Если $j\in I\setminus(Q^I\cup C)$, то в силу определения множества C имеем $\bar{\bar{y}}_j\geqslant\bar{y}_j$, следовательно, $(\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})\geqslant 0$, $j\in I\setminus(Q^I\cup C)$, $i\in\Omega$, т. е.

$$\sum_{\substack{i\in L\\ j\in I\setminus(Q^I\cup C)}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})\geqslant 0. \tag{37}$$

Из соотношений (35)—(37) получаем

$$\sum_{\substack{i\in L\\ j\in\Omega\setminus L}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})=\sum_{\substack{i\in L\\ j\in K}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})+$$
$$+\sum_{\substack{i\in L\\ j\in Q^I}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})+\sum_{\substack{i\in L\\ j\in I\setminus(Q^I\cup C)}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij}-\bar{\xi}_{ij})\geqslant 0. \tag{38}$$

Подставляя полученные неравенства (33), (34) и (38) в соотношение (32), получаем, что

$$\sum_{i\in L} (\bar{\bar{\Pi}}_i-\bar{\Pi}_i)\geqslant 0,$$

а потому найдется хотя бы один индекс $i^*\in L$, для которого $\bar{\bar{\Pi}}_{i^*}\geqslant\bar{\Pi}_{i^*}$. Тогда из монотонности функции $\Pi_{i^*}(y_{i^*})$ (в силу свойства К.4) следует $\bar{\bar{y}}_{i*} \geqslant \bar{y}_{i*}$, $i^* \in L \subset C$, что противоречит, согласно (29), определению множества C. Следовательно, $L = \varnothing$, и утверждение 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 2 леммы. Отметим, прежде всего, что из утверждения 1 леммы непосредственно вытекает соотношение $\bar{y}_j \leqslant \bar{\bar{y}}_j$, $j \in I \backslash Q^I$, согласно которому

$$\bar{y}_j \leqslant \bar{\bar{y}}_j, \quad j \in T(R) \backslash Q^I, \tag{39}$$

так как $T(R) \subseteq I$. Из соотношения (39), поскольку функции $\varphi_{ij}(y_j)$ — неубывающие, следует, что $\varphi_{ij}(\bar{y}_j) \leqslant \varphi_{ij}(\bar{\bar{y}}_j)$, $i \in \Omega$, $j \in T(R) \backslash Q^I$, а потому (с учетом свойства К.1)

$$\bar{\bar{\xi}}_{ij} \geqslant \bar{\xi}_{ij}, \qquad i \in \Omega, \quad j \in T(R) \backslash Q^I. \tag{40}$$

В силу теоремы 11.1 $\bar{\xi}_{ij} = 0$ при $i \in I$, $j \in K$. Поэтому

$$\bar{\bar{\xi}}_{ij} \geqslant \bar{\xi}_{ij}, \qquad i \in T(R) \backslash Q^I, \quad j \in K. \tag{41}$$

Допустим теперь, что

$$\bar{\bar{\xi}}_{i*j*} > 0, \qquad i^* \in T(R) \diagdown Q^I, \quad j^* \in I \diagdown \left(T(R) \diagdown Q^I\right). \tag{42}$$

Заметим, что

$$I \backslash (T(R) \backslash Q^I) = (I \backslash T(R)) \cup Q^I = Q^I. \tag{43}$$

В последнем равенстве учтено, что поскольку $R \cup S^* = I$ согласно соотношениям (28), то $T(R) \cup Q^I(S^*) = I$ и, следовательно, $I \backslash (T(R) \cup Q^I) = \varnothing$. В силу (43) фигурирующий в (42) j^* принадлежит Q^I; тогда из неравенства в (42) следует $i^* \in Q^I$, где i^* — индекс, фигурирующий в (42); это противоречит тому, что $i^* \in T(R) \backslash Q^I$; тогда

$$\bar{\bar{\xi}}_{ij} \geqslant \bar{\xi}_{ij} = 0, \qquad i \in T(R) \backslash Q^I, \quad j \in Q^I. \tag{44}$$

Из соотношений (40), (41), (44), так как $\Omega = (K) \cup (T(R) \backslash Q^I) \cup Q^I$ (согласно соотношению 43)), следует справедливость утверждения 2 леммы. Лемма 11.1 доказана.

Лемма 11.2. *Рассмотрим в системе К-элементов квазиравновесие* $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ *с вектором чистых выпусков* $\tilde{x}_0$ *и дефицитной номенклатурой* I. *Пусть все элементы из полной ограничивающей номенклатуры* $T(i^*)$ *некоторого* $i^* \in R$ *ненасыщены в этом квазиравновесии. Тогда найдется такое число* $\varkappa > 0$, *что для любого вектора* $\tilde{\tilde{x}}_0 = (\tilde{\tilde{\xi}}_{10}, \ldots, \tilde{\tilde{\xi}}_{N0})$, *удовлетворяющего условиям*

$$\tilde{\xi}_{i*0} \leqslant \tilde{\tilde{\xi}}_{i*0} < \tilde{\xi}_{i*0} + \varkappa,$$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0}, \qquad i \neq i^*,$$

в системе существует такое квазиравновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$, *что имеют* *место соотношения*

$$\approx{\xi}_{ji} \geqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Справедливость этой леммы сразу же следует из теорем 7.1 и 7.3 с учетом следствия 2 леммы 11.1.

В дальнейшем нам понадобится определенная в § 6.3 номенклатура $T(R)\setminus\setminus Q$ при $Q = Q(S) \cap I$, где I — дефицитная номенклатура в квазиравновесии $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}$, $T(R)$ — полная ограничивающая номенклатура для $R \subseteq I$, а $Q(S)$ — полная порождающая номенклатура для S. Подобно номенклатуре $T(R)\setminus\setminus Q(S)$ (см. § 8.2), номенклатура $T(R)\setminus\setminus(Q(S) \cap I)$ может быть определена также следующим образом:

$$T(R)\setminus\setminus(Q(S) \cap I) = \bigcup_{m=0}^{|I|} T^m(R)\setminus\setminus(Q(S) \cap I), \tag{45}$$

где

$$T^0(R)\setminus\setminus(Q(S) \cap I) = R\setminus(Q(S) \cap I),$$

$$T^m(R)\setminus\setminus(Q(S) \cap I) = \{j \in T_i\setminus(Q(S) \cap I),\ j \in T^{m-1}\setminus\setminus(Q(S) \cap I)\}, \tag{46}$$
$$m = 1, 2, \ldots, |I|.$$

Лемма 11.3. *Пусть в системе К-элементов существуют два квазиравновесия (равновесия) $\{(\bar{y}_i, \bar{x}_i)\}_I$ и $\{(\bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{x}}_i)\}$ с векторами чистых выпусков $\bar{x}_0$ и $\bar{\bar{x}}_0$ соответственно. Тогда, если для произвольного фиксированного множества R^* имеют место соотношения*

$$\bar{\bar{\xi}}_{i0} > \bar{\xi}_{i0}, \qquad i \in R^*, \tag{47}$$

то для всех $i \in T(R^*)\setminus\setminus(Q(S^*) \cap I)$, где S^* определено в (28), выполняются неравенства

$$\bar{\bar{y}}_i > \bar{y}_i \tag{48}$$

и среди элементов P_i, $i \in T(R^*)\setminus\setminus(Q(S^*) \cap I)$, нет насыщенных.

Следствие 1 леммы 11.3. *Пусть выполнены все условия леммы 11.3. Тогда утверждения леммы 11.3 остаются справедливыми при замене в них номенклатуры $T(R^*)\setminus\setminus(Q(S^*) \cap I)$ на номенклатуру $(Q(R^*) \cap I)\setminus(Q(S^*) \cap I)$.*

Следствие 2 леммы 11.3. *Пусть выполнены условия леммы 11.3 и $S^* = \varnothing$. Тогда для всех $i \in T(R^*)$*

$$\bar{\bar{y}}_i > \bar{y}_i$$

(где R^* удовлетворяет условию (47), а S^* — условию (28)) и среди элементов P_i, $i \in T(R^*)$, нет насыщенных.

Справедливость следствия 2 очевидна, поскольку $T(R^*)\setminus\setminus(Q(S^*) \cap I) = T(R^*)$, так как согласно условию следствия 2 $Q(S^*) = \varnothing$.

Доказательство леммы 11.3. Из (45) следует: если показать, что неравенства (48) выполняются для всех $i \in T^m(R^*) \setminus \setminus (Q(S^*) \cap I)$ и среди элементов P_i, $i \in T^m(R^*) \setminus (Q(S^*) \cap I)$, нет насыщенных при каждом $m \geqslant 0$, то тем самым утверждение леммы будет доказано. Обозначим $T^m(R^*) \setminus (Q(S^*) \cap I)$ через $T^m \setminus Q^I$. Отметим, что, в обозначениях леммы 11.1, $R^* \subseteq R = I \setminus S^*$ и, следовательно, для всех $m \geqslant 0$

$$T^m(R^*) \setminus Q^I \subseteq T^m(R) \setminus Q^I. \tag{49}$$

В силу условий доказываемой леммы и определения квазиравновесия при $m \geqslant 0$

$$\bar{\bar{y}}_i - \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{N} (\bar{\bar{\xi}}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) + (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}), \qquad i \in T^m \setminus Q^I. \tag{50}$$

Для $m = 0$ в силу утверждения 2 леммы 11.1 и неравенств (47) имеем

$$\bar{\bar{y}}_i - \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{N} (\bar{\bar{\xi}}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) + (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}) > 0, \tag{51}$$
$$i \in T^0 \setminus Q^I = R^* \setminus Q^I.$$

Тогда в силу определения 11.2 и (7) все элементы P_i, $i \in T^0 \setminus Q^I$, ненасыщены, так как согласно (51) для этих i $\bar{y}_i < \bar{\bar{y}}_i \leqslant y_{i\,\max}$.

Допустим теперь, что неравенства (48) справедливы для всех $i \in T^m \setminus Q^I$, $0 \leqslant m \leqslant m^* < |I|$, и среди элементов P_i, $i \in \in T^m \setminus Q^I$, $m \leqslant m^*$, нет насыщенных. Тогда, если показать, что для каждого $i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I$ найдется индекс j^* (для каждого i может быть свой), для которого

$$\bar{\bar{\xi}}_{ij^*} > \bar{\xi}_{ij^*}, \tag{52}$$

то тем самым лемма будет доказана. Действительно, из неравенства (52) и утверждения 2 леммы 11.1, выполняющихся согласно условиям настоящей леммы и соотношениям (49), следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} (\bar{\bar{\xi}}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) > 0, \qquad i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I; \tag{53}$$

в то же время

$$(\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}) \geqslant 0, \qquad i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I, \tag{54}$$

так как $(T^{m^*+1} \setminus Q^I) \cap S^* = \varnothing$. Подставляя неравенства из (53) и (54) в равенство (50), получаем, что для всех $i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I$ имеет место $\bar{\bar{y}}_i > \bar{y}_i$ и, следовательно, в силу критерия ненасыщенности все элементы $P_i, i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I$, ненасыщены. С учетом индуктивного предположения доказанный факт означает, что неравенство (48) справедливо для всех $i \in T^m \setminus Q^I$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

..., $|I|$, и среди элементов P_i, $i \in T^m \setminus Q^I$, $m = 0, 1, 2, \ldots, |I|$, нет насыщенных, что и доказывает справедливость утверждения леммы при условии выполнения неравенства (52).

Докажем теперь неравенство (52) для произвольного $i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I$ и некоторого $j^* = j^*(i) \in T^{m^*} \setminus Q^I$, где $m^* < |I|$. Заметим, что согласно предположению индукции все элементы P_j, $j \in T^{m^*} \setminus Q^I$, ненасыщены и $\bar{y}_j < \bar{\bar{y}}_j$. Поэтому в силу определений 11.1 и 11.3 и свойства К.2 для всех $i \in T_j$ и для всех $j \in T^{m^*} \setminus Q^I$

$$\bar{\xi}_{ij} = \varphi_{ij}(y_j) < \varphi_{ij}(\bar{\bar{y}}_j) = \bar{\bar{\xi}}_{ij}. \tag{55}$$

В силу (46) для любого $i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I$, $m^* > 0$, найдется такой $j^* = j^*(i)$, что $j^* \in T^{m^*} \setminus Q^I$, $i \in T_{j^*} \setminus Q^I$ (так как $m^* + 1 > 0$), а потому с учетом (55) соотношение (52) доказано для всех $i \in T^{m^*+1} \setminus Q^I$ и некоторых $j^* \in T^{m^*} \setminus Q^I$, откуда, как указывалось выше, следует справедливость утверждения леммы. Лемма 11.3 доказана.

Доказательство следствия 1 леммы 11.3. Для упрощения записи вместо $Q^k(S^*) \cap I$ будем писать $Q^k(S)$, а вместо $Q^k(R) \cap I$ будем писать $Q^k(R)$; вместо $Q(R) \cap I$ и $Q(S^*) \cap I$ — соответственно $Q(R)$ и $Q(S)$, а также Q_j вместо $Q_j \cap I$. Согласно определению номенклатуры $Q^k(R)$ имеем

$$Q^{k+1}(R) \setminus Q(S) = \{i\colon\ i \in Q_j \setminus Q(S),\ j \in Q^k(R)\}. \tag{56}$$

Заметим, что имеет место (в условиях леммы) следующее соотношение:

$$\{i\colon\ i \in Q_j \setminus Q(S),\ j \in Q^k(R)\} = \{i\colon\ i \in Q_j \setminus Q(S),\ j \in Q^k(R) \setminus Q(S)\}. \tag{57}$$

Действительно, предположим, что соотношение (57) неверно, т. е. найдется такой i^*, что $i^* \in Q_{j^*} \setminus Q(S)$ при некотором $j^* \in Q(R)$, но $i^* \notin \{i\colon\ i \in Q_j \setminus Q(S),\ j \in Q(R) \setminus Q(S)\}$; это означает, что $j^* \in Q(R) \cap Q(S)$. Из последнего включения получаем $Q_{j^*} \subseteq Q(S)$, т. е. $Q_{j^*} \setminus Q(S) = \varnothing$, что противоречит предположению. Покажем теперь (опуская символы * и $\cap I$), что имеет место включение

$$T^k(R) \setminus Q(S) \supseteq Q^k(R) \setminus Q(S) \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 0,$$

т. е. $T(R) \setminus Q(S) \supseteq Q(R) \setminus Q(S)$, откуда и будет следовать, согласно утверждению леммы 11.3, справедливость указанного в следствии 1 факта. При $k = 0$ это включение выполнено, поскольку по определению

$$T^0(R) \setminus Q(S) = R \setminus Q(S) = Q^0(R) \setminus Q(S).$$

Предположим теперь, что требуемое включение выполнено для всех $k \leqslant k^* < |I|$. Тогда, в силу предположения индукции,

$$T^{k^*+1}(R)\diagdown Q(S) = \{i : i \in T_j \diagdown Q(S),\ j \in T^{k^*}(R)\diagdown Q(S)\} \supseteq$$
$$\supseteq \{i : i \in T_j \diagdown Q(S),\ j \in Q^{k^*}(R) \diagdown Q(S)\}.$$

В то же время, согласно утверждению леммы 11.3, все P_j, $j \in T^k(R)\diagdown Q(S)$, $k \geqslant 0$, ненасыщены; поэтому (см. (27))

$$Q_j \subseteq T_j \neq \varnothing$$

Из этих соотношений имеем

$$T^{k^*+1}(R)\diagdown Q(S) \supseteq \{i : i \in Q_j \diagdown Q(S),\ j \in Q^{k^*}(R) \diagdown Q(S)\}.$$

Из этого включения и соотношений (57) и (56) получаем

$$T^{k^*+1}(R) \diagdown Q(S) \supseteq \{i : i \in Q_j \diagdown Q(S),$$
$$j \in Q^{k^*}(R)\} = Q^{k^*+1}(R) \diagdown Q(S),$$

что и доказывает требуемое включение для всех $k \geqslant 0$. Следствие 1 леммы 11.3 доказано.

Ниже приводится лемма, являющаяся, в некотором смысле, обратной к следствию 2 леммы 11.3.

Лемма 11.4. *Пусть выполнены условия леммы* 11.3 *и, кроме того,*

$$\xi_{i0} \geqslant \bar{\xi}_{i0} \quad \text{для всех} \quad i \in \Omega. \tag{58}$$

Тогда, если для некоторых индексов $k^* \in I$ и $j^* \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\bar{\bar{\xi}}_{k^*j^*} > \bar{\xi}_{k^*j^*}, \tag{59}$$

то в системе найдется такой элемент P_{i^*}, что

$$\bar{\bar{\xi}}_{i^*0} > \bar{\xi}_{i^*0}. \tag{60}$$

Доказательство леммы 11.4. Заметим, что в квазиравновесии имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{N} \bar{\xi}_{ij} + \bar{\xi}_{i0}, \quad \bar{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ij} + \bar{\bar{\xi}}_{i0}, \\ \bar{\Pi}_i = \bar{y}_i - \sum_{j=1}^{N} \bar{\xi}_{ji}, \quad \bar{\bar{\Pi}}_i = \bar{\bar{y}}_i - \sum_{j=1}^{N} \bar{\bar{\xi}}_{ji}. \end{gathered} \tag{61}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i\in\Omega} (\bar{\bar{\Pi}}_i - \bar{\Pi}_i) = \sum_{\substack{i\in\Omega \\ j\in\Omega}} (\bar{\bar{\xi}}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) - \sum_{\substack{i\in\Omega \\ j\in\Omega}} (\bar{\bar{\xi}}_{ji} - \bar{\xi}_{ji}) +$$
$$+ \sum_{i\in\Omega} (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}) = \sum_{i\in\Omega} (\bar{\bar{\xi}}_{i0} - \bar{\xi}_{i0}).$$

Поэтому, если показать, что

$$\overline{\overline{\Pi}}_i \geqslant \overline{\Pi}_i \quad \text{для всех} \quad i \in \Omega \tag{62}$$

и

$$\overline{\overline{\Pi}}_{k^*} > \overline{\Pi}_{k^*} \quad \text{для некоторого} \quad k^*, \tag{63}$$

то $\sum\limits_{i\in\Omega}(\overline{\overline{\xi}}_{i0} - \overline{\xi}_{i0}) > 0$ и, следовательно, с учетом соотношений (58) неравенство (60) будет доказано. Для доказательства соотношений (62) и (63) достаточно установить, что

$$\overline{\overline{y}}_i \geqslant \overline{y}_i \quad \text{для всех} \quad i \in \Omega. \tag{64}$$

Действительно, во-первых, из неравенства (64) в силу монотонности функций $\varphi_{ji}(y_i)$ следует

$$\overline{\overline{\xi}}_{ji} = \varphi_{ji}(\overline{\overline{y}}_i) \geqslant \varphi_{ji}(\overline{y}_i) = \overline{\xi}_{ji} \quad \text{для всех} \quad i, j \in \Omega,$$

а потому, с учетом неравенства (59) и соотношений (58),

$$\overline{\overline{y}}_{k^*} - \overline{y}_{k^*} = \sum_{i=1}^{N} (\overline{\overline{\xi}}_{k^*i} - \overline{\xi}_{k^*i}) + (\overline{\overline{\xi}}_{k^*0} - \overline{\xi}_{k^*0}) > 0,$$

что доказывает неравенство

$$\overline{\overline{y}}_{k^*} > \overline{y}_{k^*}, \qquad k^* \in I. \tag{65}$$

Во-вторых, поскольку $\overline{\overline{y}}_i \leqslant y_{i\,\max}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, получаем из неравенств (64) и (65) справедливость соотношений (62) и (63) и тем самым справедливость утверждения леммы.

Предположим, что соотношения (64) неверны, т. е. номенклатура $C = \{i\colon\ \overline{\overline{y}}_i < \overline{y}_i,\ i \in \Omega\}$ непуста. Тогда в силу равенств (61) имеем

$$\sum_{i\in C} (\overline{\overline{\Pi}}_i - \overline{\Pi}_i) = \sum_{\substack{i\in C\\ j\in\Omega}} (\overline{\overline{\xi}}_{ij} - \overline{\xi}_{ij}) + {}$$

$$+ \sum_{i\in C} (\overline{\overline{\xi}}_{i0} - \overline{\xi}_{i0}) - \sum_{\substack{i\in C\\ j\in\Omega}} (\overline{\overline{\xi}}_{ji} - \overline{\xi}_{ji}) =$$

$$= \sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} (\overline{\overline{\xi}}_{ij} - \overline{\xi}_{ij}) - \sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} (\overline{\overline{\xi}}_{ji} - \overline{\xi}_{ji}) + \sum_{i\in C} (\overline{\overline{\xi}}_{i0} - \overline{\xi}_{i0}).$$

В силу монотонности функций $\varphi_{ji}(y_i)$ и определения номенклатуры C получаем

$$(\overline{\overline{\xi}}_{ij} - \overline{\xi}_{ij}) \geqslant 0, \qquad j \in \Omega\backslash C, \qquad i \in \Omega, \tag{66}$$

и

$$(\overline{\overline{\xi}}_{ji} - \overline{\xi}_{ji}) \leqslant 0, \qquad i \in C, \qquad j \in \Omega. \tag{67}$$

Из соотношений (66), (67) и (58) следует, что $\sum\limits_{i\in C}(\overline{\overline{\Pi}}_i - \overline{\Pi}_i) \geqslant 0$.

Тогда найдется индекс $m^* \in C$, для которого $\overline{\overline{\Pi}}_{m^*} \geqslant \overline{\Pi}_{m^*}$ и, следовательно, $\overline{\overline{y}}_{m^*} \geqslant \overline{y}_{m^*}$, что противоречит определению C. Указанное противоречие доказывает справедливость леммы. Лемма 11.4 доказана.

§ 11.4. Условно-эффективные согласованные состояния в системе К-элементов

В этом параграфе рассматриваются свойства квазиравновесий и равновесий в системе элементов с комплектной характеристикой.

Поскольку рассмотрение таких элементов вместо нормальных элементов общего вида вносит специфичность лишь в производственную часть экономической системы, мы уделим основное внимание анализу свойств квазиравновесий. По поводу равновесий мы ограничимся формулировками (без доказательств) их свойств, легко выводимых из соответствующих свойств квазиравновесий (по существу, путем повторения соответствующих доказательств для квазиравновесий с учетом свойств направленных вариаций потребительского выбора).

Перейдем к изложению точных результатов. Ниже всюду предполагается, что производственная система состоит из К-элементов и что в такой системе задано некоторое квазиравновесие (равновесие) $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ и дефицитной номенклатурой I. Кроме того, если речь идет об R-оптимальном согласованном состоянии, то принимается, что $R \subseteq I$.

В дальнейшем будут также часто фигурировать множества индексов S и $\tilde{S}$, определяемые следующим образом:

$$S = \{j\colon \ \tilde{\xi}_{j0} \neq 0, \quad j \in \Omega \backslash R\}, \tag{68}$$

$$\tilde{S} = \{j\colon \ \tilde{\xi}_{j0} \neq 0, \quad j \in I \backslash R\}. \tag{69}$$

Очевидно, что $\tilde{S} \subseteq S$.

Теорема 11.3. *Для того чтобы квазиравновесие (равновесие) в системе К-элементов являлось R-оптимальным, достаточно выполнения одного из следующих условий:*

1. *Для каждого $i \in R$ в номенклатуре $T(i) \backslash (Q(\tilde{S}) \cap I)$ хотя бы один элемент является насыщенным.*

2. *Для каждого $i \in R$ в номенклатуре $(Q(i) \cap I) \backslash (Q(\tilde{S}) \cap I)$ хотя бы один элемент является насыщенным.*

Доказательство теоремы 11.3. Рассмотрим сначала ситуацию, когда выполнено условие 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно; это означает, в соответствии с определением R-оптимального квазиравновесия (равновесия), что в системе найдется квазиравновесие (равновесие) $\{(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)\}$ с таким вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$, что

$$\approx{\xi}_{i^*0} > \tilde{\xi}_{i^*0} \text{ для некоторого } i^* \in R, \tag{70}$$

$$\approx{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0} \text{ для всех } i \in R. \tag{71}$$

Определим множество индексов S^* соотношением

$$S^* = \{i:\ \approx{\xi}_{i0} < \tilde{\xi}_{i0},\ i \in I\}. \tag{72}$$

Покажем, что множество S^* удовлетворяет соотношению

$$S^* \subseteq \tilde{S}, \tag{73}$$

где $\tilde{S}$ определено соотношением (69). Из соотношений (71) следует, что $S^* \cap R = \varnothing$. Это означает, в соответствии с (72), что $S^* \subseteq I \setminus R$; заметим также, что поскольку $\tilde{\xi}_{i0} \geqslant 0$ для всех $i \in \Omega$, то в силу (72) $\tilde{\xi}_{i0} \neq 0$ для всех $i \in S^*$. Включение (73) доказано. Из (73) следует, что $(Q(S^*) \cap I) \subseteq (Q(\tilde{S}) \cap I)$, а потому

$$T(i) \setminus\setminus (Q(\tilde{S}) \cap I) \subseteq T(i) \setminus\setminus (Q(S^*) \cap I).$$

Из последнего соотношения и того факта, что для каждого $i \in R$ номенклатура $T(i) \setminus\setminus (Q(\tilde{S}) \cap I)$ содержит насыщенный элемент (см. условие 1 теоремы), следует вывод: в номенклатуре $T(i^*) \setminus\setminus (Q(S^*) \cap I)$, где i^* — из неравенства (70), есть насыщенный элемент. Вместе с тем, если обозначить множество $\{i^*\}$ через R^*, то для этих состояний системы, рассматриваемых как квазиравновесия (равновесия), выполнены все условия леммы 11.3. Согласно утверждению этой леммы, в номенклатуре $T(i^*) \setminus\setminus (Q(S^*) \cap I)$ (принимая во внимание введенные обозначения) не должно быть ни одного насыщенного элемента, что противоречит сделанному выше выводу. Это противоречие, вытекающее из предположения о существовании квазиравновесия (равновесия) с вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$, удовлетворяющего, в частности, неравенству (70), доказывает справедливость утверждения теоремы в случае выполнения условия 1.

Рассмотрим ситуацию, когда выполнено условие 2. Если повторить все рассуждения, приведенные при рассмотрении ситуации, когда выполнено условие 1, с соответствующей заменой номенклатуры $T(i) \setminus\setminus (Q(\tilde{S}) \cap I)$ на номенклатуру $(Q(i) \cap I) \setminus (Q(\tilde{S}) \cap I)$ и ссылки на лемму 11.3 ссылкой на следствие 1 этой леммы, а ссылки на условие 1 — ссылкой на условие 2 настоящей теоремы, то получим, что и в рассматриваемой ситуации утверждение теоремы также справедливо. Теорема 11.3 доказана.

Следствие теоремы 11.3. *Утверждение теоремы* 11.3 *остается справедливым, если заменить в условии* 1 *этой теоремы* $T(i) \setminus\setminus (Q(\tilde{S}) \cap I)$ *на* $T(i) \setminus\setminus Q(\tilde{S})$ *или на* $T(i) \setminus\setminus Q(S)$ *для всех* $i \in R$.

Действительно, поскольку $\tilde{S} \subseteq S$, то имеет место (см. § 6.3)
$$Q(\tilde{S}) \cap I \subseteq Q(\tilde{S}) \subseteq Q(S).$$
Из этой цепочки включений следует, что при $i \in R$
$$T(i) \setminus Q(S) \subseteq T(i) \setminus Q(\tilde{S}) \subseteq T(i) \setminus (Q(\tilde{S}) \cap I).$$
Поэтому, если насыщенный элемент находится в номенклатуре $T(i) \setminus Q(S)$, то он находится как в номенклатуре $T(i) \setminus Q(\tilde{S})$, так и в номенклатуре $T(i) \setminus (Q(\tilde{S}) \cap I)$.

Это следствие, несмотря на то, что в нем достаточные условия эффективности по сравнению с теоремой более жесткие, может оказаться полезным в тех случаях, например, когда построение номенклатуры $T(i) \setminus Q(S)$ и $T(i) \setminus Q(\tilde{S})$ проще, чем номенклатуры $T(i) \setminus (Q(S) \cap I)$.

Воспользовавшись необходимыми условиями условной эффективности, которые указаны в теоремах 8.2 и 10.5, 10.6, и достаточными условиями, установленными в следствии теоремы 11.3, получаем, что справедливы следующие теоремы о необходимых и достаточных условиях R-оптимальности.

Теорема 11.4. *Пусть задано квазиравновесие системы* K-*элементов. Данное квазиравновесие R-оптимально в том и только в том случае, когда для любого $i \in R$ в номенклатуре $T(R) \setminus Q(S)$, где S определено в* (68), *найдется насыщенный элемент.*

Теорема 11.4′. *Пусть в системе* K-*элементов задано равновесие с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$, и пусть номенклатура продуктов R такова, что спрос при пополненной*[1]) *дефицитной номенклатуре на все продукты из R не удовлетворен. Данное равновесие является R-оптимальным в том и только в том случае, когда для любого $i \in R$ в номенклатуре $T(i) \setminus Q(S)$, где S определено в* (68), *найдется насыщенный элемент.*

Ниже вводится еще один вид условно-эффективных состояний квазиравновесия и равновесия, в котором учитываются не только потоки вовне, но и потоки между элементами системы.

Определение 11.4. Квазиравновесие (равновесие) $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой I и вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$ назовем *усиленно I оптимальным*, если не существует такого другого квазиравновесия (равновесия) $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$ с дефицитной номенклатурой $\hat{I}$ и вектором чистых выпусков $\tilde{\tilde{x}}_0$, что
$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ik} \geqslant \tilde{\xi}_{ik} \text{ для всех } i \in I, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N,$$
и хотя бы для одного $i^* \in I$ и одного $k^* \in \{0, 1, \ldots, N\}$
$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i^*k^*} > \tilde{\xi}_{i^*k^*}.$$

---

[1]) Напомним, что в гл. X пополненной мы именовали дефицитную номенклатуру $I' = I \cup S$ (см. стр. 263).

Отметим, что фигурирующая в этом определении номенклатура I может как совпадать, так и не совпадать с номенклатурой $\hat{I}$.

Усиленно I-оптимальное квазиравновесие (равновесие) представляет собой квазиравновесие (равновесие), оптимальное по Парето на множестве векторов $(\xi_{ik})_{i \in I,\, k \in \{0, 1, \ldots, N\}}$.

В дальнейшем в теоремах 11.5 — 11.6″ будем рассматривать экономические системы К-элементов, в которых все продукты можно разделить на продукты «общего назначения» и «производственные» продукты. Продукты общего назначения могут затрачиваться как внутри производственной системы, так и потребляться внешним потребителем, т. е. фигурировать в качестве конечной продукции. Производственные продукты-«полуфабрикаты» циркулируют только внутри производственной системы, т. е. фигурируют в виде промежуточной продукции. В частности, когда потребитель задан явным образом, такое разделение может быть порождено тем обстоятельством, что спрос на некоторые продукты равен нулю при любом потреблении остальных продуктов. Такие продукты, не пользующиеся спросом (имеется в виду потребительский спрос), могут выступать лишь в роли «полуфабрикатов», а остальные продукты, пользующиеся спросом, могут служить продуктами общего назначения. Такое разделение продуктов уже рассматривалось ранее в гл. V.

Точное определение производственных продуктов и продуктов общего назначения таково.

Определение 11.5. Номенклатуру $H \subseteq \Omega$ продуктов **назовем** *производственной*, а сами продукты из H — *производственными продуктами*, если, каково бы ни было квазиравновесие (равновесие) $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ системы, вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ всегда удовлетворяет условию:

$$\tilde{\xi}_{i0} = 0 \quad \text{для каждого} \quad i \in H.$$

Номенклатуру E продуктов назовем *номенклатурой общего назначения*, а сами продукты из E — *продуктами общего назначения*, если

$$E = \Omega \backslash H.$$

В соответствии с этим определением, если $i^* \in E$, то в некотором квазиравновесии (равновесии) вектор чистых выпусков $\tilde{x}_0$ удовлетворяет условию $\tilde{\xi}_{i^*0} > 0$.

Очевидно, что такое разделение продуктов целесообразно (хотя формально и не обязательно) лишь тогда, когда $H \neq \varnothing$, т. е. $E \neq \Omega$.

Используя введенное разделение продуктов, укажем необходимое условие усиленной I-оптимальности.

Теорема 11.5. *Пусть задано усиленно I-оптимальное квазиравновесие системы К-элементов. Тогда в полной ограничиваю-*

щей номенклатуре $T(i)$ каждого дефицитного продукта общего назначения (т. е. $i \in E \cap I$) найдется насыщенный элемент.

Теорема 11.5′. *Пусть задано усиленно I-оптимальное равновесие системы К-элементов. Тогда либо удовлетворен спрос хотя бы на один дефицитный продукт общего назначения, либо в полной ограничивающей номенклатуре каждого дефицитного продукта общего назначения найдется насыщенный элемент.*

Доказательство теоремы 11.5. Предположим, что утверждение теоремы 11.5 неверно, т. е. существует такой продукт $i^* \in E \cap I$, что в номенклатуре $T(i^*)$ нет насыщенных элементов в данном усиленно I-оптимальном квазиравновесии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\tilde{x}_0$. Тогда в силу леммы 11.2, если положить в ней $R = \{i^*\}$, существует такое квазиравновесие $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\approx{x}_0$, что

$$\overset{\approx}{\xi}_{i^*0} > \tilde{\xi}_{i^*0};\quad \overset{\approx}{\xi}_{i0} = \tilde{\xi}_{i0},\ i \in I \setminus \{i^*\};\quad \overset{\approx}{\xi}_{ij} \geqslant \tilde{\xi}_{ij},\ i \in I,\ j \in \Omega.$$

Но эти соотношения противоречат усиленной I-оптимальности квазиравновесия $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$. Теорема 11.5 доказана.

Справедливость теоремы 11.5′ вытекает из теорем 11.5 и 9.2.

В системах К-элементов можно указать условия, обеспечивающие связь между R-оптимальным (квази)равновесием и усиленно I-оптимальным (квази)равновесием.

Теорема 11.6. *Пусть задано квазиравновесие (равновесие) с дефицитной номенклатурой I системы К-элементов. Тогда:*

1. *Если данное состояние системы является усиленно I-оптимальным квазиравновесием (равновесием), то оно является одновременно $(E \cap I)$-оптимальным.*

2. *Если дополнительно имеет место включение*

$$E \subseteq I \tag{74}$$

и данное состояние является E-оптимальным квазиравновесием (равновесием), то оно одновременно является усиленно I-оптимальным.

Доказательство теоремы 11.6. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Предположим, что оно неверно, т. е. данное (квази)равновесие является усиленно I-оптимальным, но существует такое (квази)равновесие $\{(\overset{\approx}{y}_i, \overset{\approx}{x}_i)\}$ с вектором чистых выпусков $\overset{\approx}{x}_0$, что

$$\overset{\approx}{\xi}_{i0} \geqslant \tilde{\xi}_{i0} \text{ для всех } i \in E \cap I \tag{75}$$

и

$$\overset{\approx}{\xi}_{i^*0} > \tilde{\xi}_{i^*0} \text{ для некоторого } i^* \in E \cap I. \tag{76}$$

Воспользуемся леммой 11.1. В этом случае номенклатура S^*, определенная соотношением (28), является пустой, поскольку выполнены соотношения (75), а R совпадает с I. Тогда согласно утверждению этой леммы получаем: $\tilde{\tilde{\xi}}_{ij} \geqslant \tilde{\xi}_{ij}$ для всех $i \in I$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, что противоречит, с учетом неравенства (76), тому, что исходное (квази) равновесие является усиленно I-оптимальным. Утверждение 1 доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Предположим, что данное (квази) равновесие является E-оптимальным, но оно не есть усиленно I-оптимальное (квази) равновесие. Тогда существует другое (квази)равновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$, в котором

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ij} \geqslant \tilde{\xi}_{ij} \text{ для всех } i \in I, \ j = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{k^*j^*} > \tilde{\xi}_{k^*j^*} \text{ для некоторых } k^* \in I, \ j^* \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Тогда в силу утверждения леммы 11.4 и с учетом (74) исходное (квази)равновесие не может быть E-оптимальным, что противоречит условию. Теорема 11.6 доказана.

Из теоремы 11.6 сразу вытекает

Следствие. *В системе* К-*элементов квазиравновесие (равновесие) с дефицитной номенклатурой* I, *удовлетворяющей соотношению* (74), *является усиленно* I*-оптимальным тогда и только тогда, когда оно является* E*-оптимальным.*

Из теоремы 11.6, в которой установлена связь между E-оптимальным равновесием и усиленно I-оптимальным равновесием, и теорем 11.3 и 11.4, 11.4′ очевидным образом следуют достаточные (в частном случае необходимые и достаточные) условия, обеспечивающие эффективность (квази)равновесия как в смысле R-оптимальности при $R = E$ (т. е. $E \subseteq I$), так и одновременно в смысле усиленной I-оптимальности. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 11.6′. *Пусть в системе* К-*элементов задано такое квазиравновесие, что все продукты общего назначения дефицитны* (*т. е. выполнено условие* (74)). *Рассмотрим два утверждения:*

А. *В полной ограничивающей номенклатуре* $T(i)$ *каждого продукта общего назначения* ($i \in E$) *имеется насыщенный элемент.*

Б. *Данное квазиравновесие одновременно как* E*-оптимально, так и усиленно* I*-оптимально.*

Тогда утверждение А *является необходимым и достаточным для* Б.

Теорема 11.6″. *Пусть в системе* К-*элементов задано такое равновесие, что все продукты общего назначения дефицитны* (*т. е. выполнено условие* (74)). *Рассмотрим два утверждения:*

А. *В полной ограничивающей номенклатуре* $T(i)$ *каждого продукта общего назначения* ($i \in E$) *имеется насыщенный элемент.*

Б. *Данное равновесие одновременно как Е-оптимально, так и усиленно I-оптимально.*

Тогда утверждение А *является достаточным для* Б, *и если при этом спрос на все продукты общего назначения не удовлетворен, то необходимым и достаточным.*

Ранее в § 11.2 было введено понятие «зависимости» i-й технологии от j-го продукта. Введем еще один вид «зависимости» — «слабой зависимости», который будет использоваться ниже при указании достаточного условия усиленной I-оптимальности.

Определение 11.6. Будем говорить, что технология элемента P_i (i-я технология) *слабо зависит* от продукта j, если существует такой вектор $(y_i, x_i) \in G_i$, что $\xi_{ji} > 0$.

«Слабая зависимость», в отличие от просто «зависимости», характеризует не данное конкретное состояние элемента, а указывает на «глобальное» свойство технологического множества i-го элемента. Слабая зависимость i-й технологии от j-го продукта означает, что j-й продукт может потребоваться элементу P_i в одном из технологически реализуемых состояний.

Определение 11.7. Будем говорить, что данное квазиравновесие (равновесие) с дефицитной номенклатурой I *ациклично*, если не существует такой цепочки дефицитных продуктов $\{i_0, i_1, \ldots i_k, i_{k+1}, \ldots, i_t\} \subseteq I$, что технология элемента P_{k+1} слабо зависит от k-го продукта ($k = 0, 1, \ldots, t-1$), а технология продукта P_0 слабо зависит от продукта i_t.

Теорема 11.7. *Если заданное квазиравновесие* (*равновесие*) *системы* K-*элементов ациклично, то это состояние системы — усиленно I-оптимальное квазиравновесие* (*равновесие*).

Доказательство теоремы 11.7. Обозначим квазиравновесие (равновесие) системы, удовлетворяющее условиям теоремы, через $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}_I$. Если это состояние не является усиленно I-оптимальным, то существует такое другое (квази) равновесие $\{(\tilde{\tilde{y}}_i, \tilde{\tilde{x}}_i)\}$, что

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{ik} \geqslant \tilde{\xi}_{ik}, \quad i \in I, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}, \tag{77}$$

и хотя бы для одного $i^* \in I$ и одного $k^* \in \{0, 1, \ldots, N\}$

$$\tilde{\tilde{\xi}}_{i^*k^*} > \tilde{\xi}_{i^*k^*}. \tag{78}$$

Коль скоро состояние системы ациклично, то оно содержит хотя бы один продукт, который не зависит слабо ни от одного из продуктов системы. Назовем такие продукты продуктами нулевого порядка и обозначим их через D_0. Очевидно, что $D_0 \subseteq I$. Продуктам нулевого порядка соответствуют их производящие элементы системы, состояния которых определяются лишь из решения задачи

$$\Pi_i = \max, \quad (y_i, x_i) \in G_i. \tag{79}$$

Поэтому

$$\tilde{y}_i = y_{i\,\max}, \qquad i \in D_0. \tag{80}$$

Поскольку, по условиям теоремы, элементы P_i — К-элементы, то не существует состояния элемента, в котором выпуск продукции был бы бо́льшим, чем $y_{i\,\max}$. Поэтому в силу (80) для всех $i \in D_0$

$$\approx{y}_i \leqslant \tilde{y}_i \tag{81}$$

и, следовательно, с учетом (77),

$$\approx{\xi}_{ik} = \tilde{\xi}_{ik}, \qquad i \in D_0, \; k \in \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{82}$$

Для всех элементов определим числа $y^1_{i\,\max}$, равные y-й компоненте решения задачи (79) с дополнительным ограничением

$$\xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in D_0. \tag{83}$$

Выделим теперь такие продукты, технологии элементов-производителей которых слабо зависят только от продуктов нулевого порядка. Легко видеть, что либо $D_0 = I$, либо из-за предполагаемой в теореме ацикличности данного состояния системы такие продукты найдутся. Назовем эти продукты продуктами первого порядка и обозначим их совокупность через D_1.

Продуктам первого порядка соответствуют элементы (их производящие), состояния которых определяются из решения задач (79), (83) в состоянии $\{(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)\}$. Поэтому

$$\tilde{y}_i = y^1_{i\,\max}. \tag{84}$$

Поскольку, согласно (82),

$$\approx{\xi}_{ji} = \tilde{\xi}_{ji}, \qquad j \in D_0, \; i \in D_1, \tag{85}$$

а вектор $(\approx{y}_i, \approx{x}_i)$ в состоянии $\{(\approx{y}_i, \approx{x}_i)\}$ определяется из задачи (79) с дополнительными ограничениями

$$\xi_{ji} \leqslant \approx{\xi}_{ji}, \qquad j \in I \subseteq D_0,$$

то очевидно, что этот же вектор является решением задачи (79) с дополнительными ограничениями

$$\xi_{ji} \leqslant \approx{\xi}_{ji}, \qquad j \in D_0. \tag{86}$$

В силу (85) и (86), поскольку все элементы — К-элементы, то для всех $i \in D_1$ выполнены неравенства (81), а следовательно,

$$\approx{\xi}_{ik} = \tilde{\xi}_{ik}, \qquad i \in D_1, \; k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}.$$

Рассуждая аналогично, можно выделить продукты второго порядка — технология элементов-производителей этих продуктов слабо зависит от продуктов нулевого и первого порядков — и показать, что для элементов P_i, соответствующих продуктам второго порядка, $\approx\xi_{ik} = \tilde{\xi}_{ik}$, $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Последовательно повышая порядок выделяемых продуктов, можно исчерпать все дефицитные продукты и тем самым показать, что в условиях теоремы 11.7 требования (77) и (78) противоречивы. Теорема 11.7 доказана.

Отметим в заключение, что в этой теореме, в отличие от других теорем, в которых рассматриваются условия эффективности, насыщенные элементы не фигурируют явно. Однако свойство ацикличности состояния обеспечивает (см. доказательство теоремы) выполнение условия насыщенности К-элемента для ряда элементов-производителей дефицитных продуктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багриновский К. А. Основы согласования плановых решений.— М.: Наука, 1977.
2. Браверман Э. М. Математические модели планирования и управления в экономических системах.— М.: Наука, 1976.
3. Браверман Э. М. Модель производства с неравновесными ценами.— Экономика и математические методы, 1972, т. VIII, вып. 2, с. 175—190.
4. Браверман Э. М. Неравновесные модели производства.— В кн. «Проблемы планирования и управления экономическими целенаправленными системами».— Новосибирск: СО АН СССР, 1972, с. 99—105.
5. Браверман Э. М. Модель механизма изменения цен в производственной сети.— Экономика и математические методы, 1973, т. IX, вып. 2, с. 218—230.
6. Браверман Э. М. Экономичные состояния сети производственных элементов.— Автоматика и телемеханика, 1975, № 3, с. 88—94.
7. Браверман Э. М. Модель потребительского выбора при фиксированных ценах.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 5, с. 100—111.
8. Браверман Э. М., Левин М. И. Эффективные состояния сети производственных элементов.— Экономика и математические методы, 1974, т. X, вып. 4, с. 757—765.
9. Браверман Э. М., Левин М. И. Исследование эффективных состояний равновесия в производственной сети.— В кн. «Планирование и управление экономическими целенаправленными системами».— Новосибирск: Наука, 1975, с. 92—98.
10. Браверман Э. М., Левин М. И. Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. I.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 6, с. 67—82.
11. Браверман Э. М., Левин М. И. Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. II.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 7, с. 79—86.
12. Браверман Э. М., Левин М. И. Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. III.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 9, с. 90—101.
13. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей.— М.: Изд-во Иностранной литературы, 1963.
14. Гранберг А. Г. Математические модели социалистической экономики.— М.: Экономика, 1978.
15. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория.— М.: Прогресс, 1975.
16. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
17. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.— М.: Мир, 1964.

18. Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента и денег.— М.: Изд-во Иностранной литературы, 1948.
19. Ланкастер К. Математическая экономика.— М.: Советское радио, 1972.
20. Левин М. И. «Неулучшаемые» состояния в модели производственной сети.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 8, с. 119—132.
21. Левин М. И. Сети с комплектной технологической характеристикой.— Экономика и математические методы, 1975, т. XI, вып. 5, с. 945—952.
22. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения.— М., Изд-во Иностранной литературы, 1961.
23. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем.— М.: Наука, 1975.
24. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.— М.: Наука, 1973.
25. Малишевский А. В. Натуральные системы.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 11, с. 42—57.
26. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора.— М.: Наука, 1974.
27. Моисеев Н. Н. Иерархические структуры и теория игр.— Кибернетика, 1973, № 6, с. 1—11.
28. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост.— М.: Наука, 1972.
29. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.
30. Опойцев В. И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.— М.: Наука, 1977.
✓ 31. Полтерович В. М. Некоторые модели перераспределения ресурсов.— М.: Изд-во ЦЭМИ, 1970.
✓ 32. Розоноэр Л. И. Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход). I, II, III.— Автоматика и телемеханика, 1973, №№ 5, 6, 8.
33. Чемберлин Э. Х. Теория монополистической конкуренции. Реориентация теории стоимости.— М.: Изд-во Иностранной литературы, 1959.
34. Юдин Д. Б., Юдин А. Д. Экстремальные модели в экономике.— М.: Экономика, 1979.
35. Benassy J.-P. Neo-Keynesian disequilibrium theory in a monetary economy.— Review of Economic Studies, 1975, v. 42 (4), No. 132, p. 503—524.
36. Benassy J.-P. The disequilibrium approach to monopolistic price setting and general monopolistic equilibrium.— Review of Economic Studies, 1976, v. 43, No. 133, p. 69—81.
37. Böhm V. Temporary equilibria with quantity rationing.— Review of Economic Studies, 1979, v. 46, No. 2, p. 361—377.
38. Dreze J. Existence of an equilibrium under price rigidity and quantity rationing.— International Economic Review, 1975, v. 16, No. 2, p. 301—320.
39. Eilenberg S., Montgomery D. Fixed point theorems for multivalued transformations.— American Journal of Mathematics, 1946, v. 68, No. 2, p. 214—222.
40. Grandmont J. M. Temporary general equilibrium theory.— Econometrica, 1977, v. 45, No. 3, p. 532—572.
41. Grandmont J. M., Laroque G. On Keynessian temporary equilibria.— The Review of Economic Studies, 1976, v. 43 (1), No. 133, p. 53—67.
42. Grandmont J. M., Laroque G., Younes Y. Equilibrium with quantity rationing and recontracting.— Journal of Economic Theory, 1978, v. 19, p. 84—102.
43. Howard D. H. Rationing, quantity constraints and consumption theory.— Econometrica, 1977, v. 45, No. 2, p. 399—412.
44. Laroque G. The fixed price equilibria: some results in local comparative statics.— Econometrica, 1978, v. 46, No. 5, p. 1127—1154.

45. Laroque G., Polemarchakis H. On the structure on the set of fixed price equilibria.— Journal of Mathematical Economics, 1978, v. 5, No. 1, p. 53—70.
46. Murninghan J. K., Roth A. E. The effects of communication and information availability in a experimental study of a three person game.— Management Science, 1977, v. 23, No. 12, p. 1336—1348.
47. Tobin J., Houthakker H. S. The effects of rationing on demand elasticities.— Review of Economic Studies, 1951, v. 18, p. 140—153.
48. Younes Y. On the role of money in the process of exchange and the existence of a non-Walrasian equilibrium.— Review of Economic Studies, 1975, v. 42. No. 132, p. 489—501.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Эммануил Маркович Браверман,
Марк Иосифович Левин

Неравновесные модели
экономических систем

(Серия: «Теория и методы системного анализа»)

Редактор *А. В. Малишевский*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *В. П. Сорокина*

ИБ № 11095

Сдано в набор 27.03.81. Подписано к печати 05.10.81. Т-27704. Формат 60×90[1]/16, бумага тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 18,94. Тираж 2900 экз. Заказ № 530. Цена 3 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука».
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Готовятся к печати в 1982 году:

Серия «Теория и методы системного анализа»

Кузьмин В. Б. **Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений.**

Книга посвящена важной проблеме теории принятия решений.

Систематически развивается геометрический подход к проблеме построения групповых экспертных решений, удовлетворяющих классическому принципу единогласия Парето, основанный на результатах исследования структуры «выпуклости» множества отношений. Описаны алгоритмы построения таких решений и обсуждаются практические вопросы их применения. Кроме того, для нечетких отношений доказывается ряд специальных свойств, предлагается способ построения единственного решения с использованием операции арифметического осреднения, а также подход к решению проблемы выбора. Разработанный подход найдет применение в человеко-машинных процедурах принятия решений и анализе экспертных оценок.

Книга предназначена для теоретиков и практиков экспертного метода, специалистов по теории принятия решений, обработчиков субъективной информации, потребителей ЭВМ.

Системный анализ проблемы развития городов/Гвишиани Д. М., Емельянов С. В., Посохин М. В. и др.; Под ред. Д. М. Гвишиани.

Книга посвящена развитию идей системного анализа для исследования формирования пространственных структур городов.

Для математического описания городской системы развивается макросистемный подход, рассматривающий преобразование массовых проявлений индивидуальных свойств элементов в коллективные свойства систем как целого. Изучаются вопросы оптимизации городских пространственных структур и принятия решений в сфере городского планирования. В заключение рассмотрены конкретные прикладные задачи (моделей и процедур человеко-машинной оптимизации) и описано соответствующее математическое обеспечение для ЭВМ. Материал книги излагается как на содержательном, так и на формальном математическом уровне.

Книга предназначена для специалистов в области прикладной математики, кибернетики и градостроительства.

Заказы на указанные книги принимаются магазинами Книготорга и Академкниги, распространяющими научно-техническую литературу.