51
К19

СОДЕРЖАНИЕ

2-2-3
71-68

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ
АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ ГОРСТКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Редактор *В. Ю. Иваницкий*
Художник *Л. П. Ромасенко*
Худож. редактор *Е. Е. Соколов*
Техн. редактор *Е. М. Лопухова*

А 10043 Сдано в набор 14/VI 1968 г. Подписано к печати 11/IX 1968 г.
Формат бумаги 60×90¹/₁₆ Бумага типографская № 1. Бум. л. 3,0
Печ. л. 6,0 Уч.-изд. л. 5,78
Тираж 64 500 экз. Издательство «Знание», Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.
Цена 18 коп.
Набрано в Московской типографии № 8 Главполиграфпрома. Зак. 1526.
Отпечатано в типографии изд-ва «Знание». Зак. 2639.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы в нашей стране большое внимание уделяется вопросам совершенствования планирования, экономического анализа, управления экономикой. Необходимость такого совершенствования определяется ростом масштабов, усложнением экономических и производственных связей, повышением темпов технического прогресса. Без этого недостижимо дальнейшее повышение экономической эффективности социалистического хозяйства. Важным средством на этом пути является осуществляемая в настоящее время хозяйственная реформа.

Той же цели служит совершенствование экономической теории и практики, перестройка их на базе использования математических методов и электронной вычислительной техники. Наибольшее распространение и наибольшее значение для социалистической экономики получили методы линейного программирования, возникшие впервые в СССР. Эти методы и более широкий круг вопросов, охватываемый математическим оптимальным программированием, в целом, служат той базой, на которой должно основываться оптимальное планирование народного хозяйства.

Поскольку с экономикой, с различными экономическими показателями приходится встречаться почти каждому человеку и на работе и в быту, понятен тот большой интерес, который вызывает коренная перестройка экономической науки и практики, связанная с применением математических методов. Некоторое ознакомление с этим предметом полезно не только экономистам, но и каждому интеллигентному человеку. Представляет интерес и ознакомление с элементами той новой математики, которая возникла в связи с потребностями экономики и взята ею на вооружение.

Именно целям первого общего знакомства с этим кругом вопросов и служит данная небольшая брошюра. Нам хотелось не только рассказать о том, в каких вопросах применяются математические методы в экономике и что они дают, но и создать некоторое представление о самих задачах, рассматриваемых в математическом оптимальном программировании, о способах их решения, а также пояснить, как именно математика входит в экономику и какова ее роль в решении и понимании экономических задач и проблем.

Брошюра представляет собой краткое изложение основных идей применения математики в экономических исследованиях. Наряду с теоретическими вопросами в ней рассматриваются и конкретные численные задачи. Изложение ведется так, чтобы показать органическое единство математики и экономики при исследовании и решении задач экономического анализа.

Предлагаемое издание рассчитано на инженерно-технический состав, экономистов и плановиков, специалистов, работающих в различных отраслях хозяйства, которые хотели бы познакомиться с основными идеями математической экономики. Книга может быть полезна также студентам вузов, учителям и учащимся старших классов средней школы. К математической подготовке читателя книга не предъявляет особых требований, так как используются в основном лишь некоторые сведения из элементарной математики. Решающее значение имеет интерес к ее теме. Если некоторые разделы представят затруднение для читателя (§ 4 гл. I, часть гл. III), то при первом чтении можно ограничиться их просмотром.

Конечно, для более подробного знакомства с вопросом читателю придется обратиться к существующей обширной специальной литературе (см. краткий список в конце книги), прочитанный здесь материал послужит для этого хорошим трамплином.

Мы будем считать свою задачу выполненной, если, отложив после прочтения эту книгу, читатель будет представлять, как связаны математика и экономика. Еще лучше, если он захочет углубить свои познания в математическом программировании, а в дальнейшем и применить их в своей деятельности.

Новосибирск, весна 1968 года

Глава I

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Введение

С незапамятных времен при изучении сложных процессов, явлений, конструировании новых сооружений и т. п. человек применяет моделирование. Существует несколько приемов моделирования. Пожалуй, исторически первым является один из них — это метод подобия. Суть его в том, что изучаемое явление воспроизводится в экспериментальных условиях, в другом масштабе, «в малом», и на этой действующей модели ведется изучение явлений. Например, для того, чтобы исследовать законы обтекания крыла самолета воздушным потоком, создается уменьшенная копия крыла и помещается в аэродинамическую трубу. Тогда, пропуская поток воздуха, экспериментально изучая процесс обтекания, получают нужные характеристики крыла. Этот метод применим далеко не всегда, так как уменьшение масштаба может оказаться неосуществимым, оно может исказить явление, а не облегчить его исследование.

Другой способ моделирования — это аналоговое моделирование. Оно основывается на том, что разные физические явления могут характеризоваться одними и теми же количественными взаимосвязями. Это позволяет нужные данные об одних процессах «снимать» с моделей, осуществляющих совсем другие физические процессы. Аналоговое моделирование реализуется не только на других физических моделирующих устройствах, но и на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ). Ниже мы приведем описание гидравлической модели одного из классов задач математического программирования.

Наиболее совершенным и вместе с тем наиболее эффективным средством является создание математических моделей изучаемых процессов, явлений. Именно этот путь моделирования широко открывает двери для применения могущественных средств математического анализа, так как по самой своей природе математические методы не могут прилагаться непосредственно к действительности, а только к математическим моделям того или иного круга явлений. Разумеется, результаты исследования такой модели будут иметь практический интерес, если сама модель адекватно или достаточно хорошо отображает реальную ситуацию. Для более точного описания действительности приходится строить более сложные и точные математические модели, учитывающие многие стороны рассматриваемого явления. Степень совершенства математических моделей, применяемых в той или иной науке, математический аппарат, используемый для их исследования, в известной мере характеризуют уровень развития науки.

В течение длительного времени в экономической науке использовался весьма ограниченный арсенал математических моделей. В частности, наиболее широко применялись модели и описания, использующие алгебраические соотношения и обозначения. Большую роль сыграл этот математический аппарат в «Капитале» К. Маркса. С его помощью выражены основные экономические закономерности капиталистического хозяйства. Делались также попытки использовать при изучении экономических проблем дифференциальное и интегральное исчисления. Иными словами, математический аппарат, возникший в связи с проблемами математической физики и теоретической механики, применялся и для исследования и решения экономических задач. Разумеется, это могло приносить пользу лишь на первых порах, в дальнейшем же возникла необходимость в создании математических методов, специально приспособленных к задачам экономического анализа. Именно этому обязан своим происхождением ряд новых математических дисциплин, таких, как линейное программирование, динамическое программирование, теория игр, теория графов и др. Этот комплекс прикладных математических дисциплин может быть объединен общим названием — математическая экономика. Предметом исследования математической экономики являются математические модели, порожденные и связанные с определенными экономическими проблемами, описывающие экономику предприятия, совхоза, народного хозяйства или отдельные экономические процессы в них. Характерным для планово-производственных и экономических задач является множественность, вариантность возможных решений: данную или эквивалентную в использовании продукцию можно получить различными способами, по-разному выбирать технологию, сырье, применяемое оборудование, организацию процесса.

Одним из наиболее практически важных вопросов экономики является построение плана на разных уровнях экономической системы — от цеха до народного хозяйства. Качество же плана самым существенным образом зависит от принятой системы решений — при удачном выборе ее при меньших затратах может быть достигнут больший эффект и наоборот.

На первый взгляд может показаться, что при наличии нескольких возможных решений нужно просто рассмотреть все возможности и выбрать наилучшую. Но это только на первый взгляд. Так как каждый план получается в результате сочетания элементарных производственных решений, то число таких комбинаций многократно умножается и оказывается настолько велико, что и в сравнительно простых задачах перебор всевозможных вариантов неосуществим даже при использовании современных ЭВМ.

Вопросы нахождения наилучшего, оптимального, плана играют особую роль в социалистическом обществе — обществе, ставящем задачу наиболее полного удовлетворения потребностей всех своих членов. Именно в нем, благодаря плановости хозяйства, общественной собственности на средства производства, может быть достигнуто наиболее полное и эффективное использование имеющихся и выделенных для производства ресурсов, обеспечивающее максимальный выпуск нужной продукции. Поэтому в социалистической экономике из математических методов наибольшее значение получили методы нахождения наилучшего, оптимального решения, объединяемые названием *математическое оптимальное программирование*[1].

Следует сказать, что, как показало дальнейшее развитие экономической науки, модели экономических процессов зачастую оказываются не только не проще моделей естественнонаучных проблем, а, наоборот, нередко сложнее их по структуре, более громоздки по своим масштабам (числу параметров, их взаимосвязям). Поэтому здесь оказывается особенно существенным последовательное улучшение моделей, объединение моделей в целую систему, переход в результате анализа от более простых к более сложным и полным. Такая сложность экономических явлений, трудность их математического описания явились причиной того, что одно время даже существовало мнение о невозможности и неприемлемости использования математических методов исследования во многих областях экономического анализа, опасение, что математика может вытеснить экономическую науку, затушевать природу экономических явлений. Очень меткое замечание в связи с этими опасениями сделал известный советский математик А. А. Марков на Всесоюзной научной конференции 1960 года, где впервые встретились математики и экономисты:

«Я думаю, что опасность того, что математика как-то вытеснит экономику, не существует. Ведь математика не вытеснила механику, физику, хотя и применялась в них. Вытеснения не произошло, материя не исчезла в этих науках. Я уверен,

---

[1] Этот термин не следует смешивать с термином «программирование», обозначающим составление программы, осуществляющей данный вычислительный процесс (алгорифм) на ЭВМ.

что и при применении математических исследований в экономике материя не исчезнет, а, наоборот, ее станет больше, особенно в промтоварных магазинах».

Перейдем теперь к ознакомлению с одним из наиболее развитых и широко применяемых на практике разделов математической экономики — линейным программированием.

В 1938 году одним из авторов этой брошюры в порядке научной консультации было предпринято по заданию фанерного треста изучение чисто практической задачи — выбора наилучшей производственной программы загрузки группы лущильных станков. Выяснилось, что эта задача на максимум при ограничениях, описываемых системой линейных неравенств, весьма своеобразна и не поддается решению известными средствами классического математического анализа. Тогда же стало ясно, что эта задача не случайная, изолированная, а является типичным представителем нового, не исследованного еще класса задач, к которым приводят различные вопросы нахождения наилучшего производственного плана, столь характерные для экономического анализа, в особенности в социалистической экономике.

Изучение этого круга задач и методов их решения привело к созданию новой научной дисциплины, необычайно бурно развивающейся у нас в стране и за рубежом и получившей название линейного программирования.

Мы начнем знакомство с этим новым разделом прикладной математики с описания простой экономической задачи, которая позволит наиболее просто и понятно разъяснить все необходимые новые понятия и сущность методов. Прежде, однако,— небольшая общая характеристика этого раздела и несколько специальных терминов.

§ 2. Задача о раскрое. Обсуждение и решение

Задачи, в которых отыскивается максимум или минимум некоторой функции при наличии ограничений на переменные, объединяются общим названием — *задачи математического программирования.* Линейное программирование — это один из разделов математического оптимального программирования, изучающий способы отыскания максимума или минимума *линейной функции* при наличии *линейных ограничений.* Функция, максимум или минимум которой отыскивается, называется *целевой функцией.* Тот набор значений переменных, на котором достигается максимум или минимум, определяет *оптимальный план,* а всякий другой набор, удовлетворяющий ограничениям, определяет *допустимый план.*

Основной идеей линейнопрограммной модели является рассмотрение производственного плана в расчлененной форме, составленным из элементарных производственных способов. В этой модели, как показывает само название, принята гипотеза линейности. Суть ее в том, что каждый производственный процесс предполагается возможным применять с любой кратностью (интенсивностью) и при этом затраты и выход меняются пропорционально. Результаты же различных процессов суммируются.

В силу этой гипотезы всякий план можно представлять себе в виде набора некоторого числа основных способов, примененных с различными интенсивностями. В ходе решения эти интенсивности определяются так, чтобы ограничения были удовлетворены, а целевая функция достигала максимума или минимума.

После этой весьма общей и краткой характеристики приступим к обещанной конкретной задаче.

Задача раскроя. Из листов материала размером 6 *м*×13 *м* нужно выкроить заготовки двух типов в таких количествах:

Тип заготовки	Размеры заготовки	Число штук
A	4 *м* × 5 *м*	800
B	2 *м* × 3 *м*	400

израсходовав при этом возможно меньше материала.

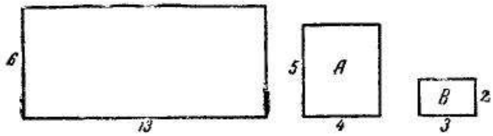


Рис. 1

На рис. 1 изображены исходные листы материала и выкраиваемые из них заготовки.

Разумеется, эта задача настолько проста, что ее можно было бы решить и без специальной теории, попросту. Однако у нас она играет важную иллюстративную роль, позволяя разъяснить характер задач и основные приемы линейного программирования, поэтому изложим применительно к ней общий подход.

Легко видеть, что каждый лист материала можно раскраивать различными более или менее удачными способами, получая, соответственно, больше или меньше различных заготовок.

На рис. 2 приведены некоторые возможные способы раскроя материала (карты раскроя). Числа r_i обозначают потери материала при каждом раскрое.

Те же самые способы раскроя может получить каждый без всякой математики, пользуясь лишь шаблонами, вырезанными по форме заготовок, здравым смыслом и терпением. Вопрос совсем не в этом. А вот какие из способов использовать и для какого числа листов их применить — это вопрос, при решении которого без математики не обойтись. Можно было бы, конечно, просмотреть всевозможные мыслимые варианты и выбрать наилучший, так сказать, применить «грубую силу», но на этом пути придется встретиться с очень большим числом проб.

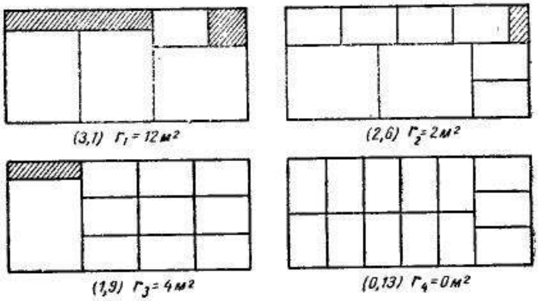


Рис. 2

Если бы заготовок было 20, а не 2, с ним не совладали бы и современные ЭВМ.

Переходим к математическому описанию задачи. Как всегда, использование математики влечет за собой появление формул. Итак, обозначим через x_i число листов материала, раскраиваемых по i-му способу. Пусть a_i и b_i обозначают соответственно число заготовок типа A и B, получаемых при использовании i-й карты раскроя. Например, для первой карты $a_1=3$, $b_1=1$, а вся матрица способов имеет вид:

Таблица 1

Заготовки / Номера способов		1	2	3	4
		Число заготовок			
A		3	2	1	0
B		1	6	9	13

Используя введенные обозначения, можно дать теперь такую математическую формулировку интересующей нас задачи.

Найти минимум линейной функции, выражающей число израсходованных листов материала (по всем способам),

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1+x_2+x_3+x_4$$

при условии, что переменные x_i удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\text{I. } a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 \geqslant 800$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4 \geqslant 400$$

или, подставляя числовые значения,

$$3x_1+2x_2+x_3 \geqslant 800$$
$$x_1+6x_2+9x_3+13x_4 \geqslant 400$$

(соблюдена комплектность — все необходимые заготовки сделаны в достаточном числе).

$$\text{II. } x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$
$$x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0$$

(никакой способ не применяется к отрицательному числу листов материала).

Таким образом, мы пришли к характерной задаче линейного программирования: найти минимум линейной формы (функции) при линейных ограничениях.

Сделаем следующее вспомогательное построение.

Начертим прямоугольную систему координат XOY и каждому возможному раскрою поставим в соответствие точку, у которой координата x равна числу заготовок типа A, получаемых при этом раскрое, а координата y — числу заготовок типа B (рис. 3).

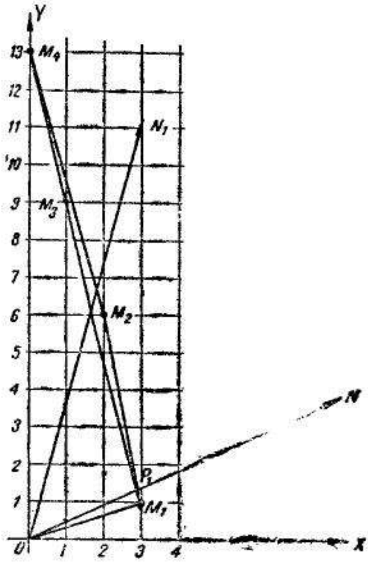


Рис. 3

Мы будем обозначать эти точки буквой M с индексом, равным номеру раскроя. Например, первому раскрою соответствует точка M_1 с координатами $x_1=3$, $y_1=1$ (см. рис. 3).

Легко видеть, что точки на отрезке M_1M_2 указывают своими координатами количество заготовок типа A и типа B, приходящихся в среднем на один лист материала в различных планах раскроя, которые представляют собой сочетания раскроев M_1 и M_2. Можно доказать, что множество всевозможных планов раскроя, представимых в виде комбинаций M_1, M_2, M_3 и M_4, если их характеризовать выходом заготовок, приходящихся на один лист, изображается совокупностью точек выпуклого многоугольника $M_1M_2M_4M_3$. Все эти осуществимые выпуски (планы) образуют многоугольник $M_1M_2M_4M_3$ осуществимых *планов*.

Обычно, однако, для удобства в число вершин многоугольника осуществимых планов включают и начало координат, так что многоугольником осуществимых планов будет $OM_1M_2M_4$. (Экономически это соответствует тому, что осуществимым считается также план, в котором часть полученных заготовок остается неиспользованной).

Из всех осуществимых планов нас интересуют лишь те, для которых выполнено условие комплектности, т. е. отношение числа заготовок типа A к числу заготовок типа B соответствует заданному и равняется 2 (т. е. 800 : 400). Ясно, что геометрически эти планы изображаются точками, лежащими на луче N. Такие планы называются *ассортиментными*. Ассортиментному выпуску соответствует *допустимый* план (для которого выполнены все ограничения I и II).

Наиболее экономным, оптимальным планом раскроя будет тот, которому соответствует точка, принадлежащая одновременно многоугольнику и лучу и имеющая наибольшие координаты, т. е. соответствующая плану, дающему наибольший выход заготовок в данной пропорции на один лист. Такой является точка P_1 — точка пересечения луча с границей многоугольника $OM_1M_2M_4$. Так как точка P_1 принадлежит отрезку M_1M_2, можно сделать заключение, что оптимальный план представляется комбинацией раскроев M_1 и M_2. Обозначим через z ту долю материала, которая кроится по раскрою M_1; остальная часть $1-z$ кроится по M_2. Из условия комплектности (см. табл. 1) следует, что

$$\frac{3z+2(1-z)}{1\cdot z+6(1-z)}=2,$$

откуда $z=\frac{10}{11}$. Этот результат можно было получить и графически, заметив из чертежа (см. рис. 3), что

$$\frac{M_2P_1}{M_1M_2}=\frac{10}{11}.$$

Искомое минимальное число листов материала L находится, например, из условия получения нужного числа заготовок A.

$$\frac{10}{11}L\cdot 3+\frac{1}{11}L\cdot 2=800.$$

(Первый раскрой применяется к $\frac{10}{11}L$ листов, при этом из каждого листа получается три заготовки типа A. Второй раскрой применяется к $\frac{1}{11}L$ листов, при этом из каждого листа получается две заготовки типа A. Общее число заготовок типа A должно соответствовать плановому заданию, т. е. равняться 800.)

Решая уравнение, получаем, что необходимое (минимальное) число листов материала $L=\frac{800\cdot 11}{32}=275$.

Оптимальный план раскроя состоит в том, что 250 листов кроятся по первому раскрою ($x_1=250$), а 25 листов — по второму раскрою ($x_2=25$).

Если бы количество заготовок было больше двух, то такой графический способ решения оказался бы слишком сложным, практически трудно реализуемым, так как для изображения множества осуществимых планов потребовалось бы построить многогранник в многомерном пространстве. Для решения задачи в этих случаях на помощь приходят аналитические методы и, в частности, эффективный метод разрешающих множителей — оценок, особых показателей, характеризующих оптимальный план.

Что же такое оценки? Это некоторые расчетные цены для единицы каждого вида продукции и затрачиваемых производственных факторов (например, в данной задаче первой и второй заготовок, одного листа материала и т. п.), связанные с оптимальным планом, объективно обусловленные им.

Указанные величины — оценки — играют очень большую роль. Прежде всего с их помощью удается сформулировать признак оптимальности решения задачи линейного программирования. Иными словами, оказывается возможным сказать, оптимален ли некоторый допустимый план, без сравнения его со всеми остальными возможными планами.

Не вдаваясь в математические детали, можно сказать, что экономический смысл признака оптимальности состоит в следующем: для оптимального плана всегда имеются такие оценки (или цены), что скалькулированная по ним результативная эффективность способа равна 0 для используемых способов и не более 0 для неиспользуемых. Иначе говоря, все используемые способы рентабельны (результаты оправдывают затраты), а во всех отброшенных способах оценка затрат не меньше оценки произведенной продукции, т. е. их применение нерентабельно, точнее, не более рентабельно, чем применяемых способов.

Вернемся к нашей задаче и на ней поясним значение оценок. Покажем, как они находятся и как с помощью описанного критерия можно убедиться, что найденный план (250 листов кроятся по первому способу, а 25 — по второму) действительно оптимален. Введем расчетные цены — оценки для одного листа раскраиваемого материала и для каждой из заготовок, обозначив их соответственно через U, V, W. Если удастся найти эти величины так, чтобы только используемые способы оказались рентабельными, то план оптимален. Условия рентабельности запишутся так:

$$-U+3V+W=0$$

$$-U+2V+6W=0.$$

(Поясним, например, первое из них. Оно означает, что затраты одного листа материала ценой U должны компенсироваться полученными результатами при раскрое по способу M_1 — тремя заготовками типа A по цене V и одной заготовкой типа B по цене W.)

Так как два уравнения содержат три неизвестных, то одно из них можно выбрать произвольно (важно соотношение оценок, а не их абсолютное значение!). Примем $U=16$. Тогда легко получить $V=5$, а $W=1$. Сумма оценок заготовок, получаемых из одного листа материала, в каждом из двух применяемых раскроев одинакова и равна 16.

В то же время, если мы возьмем неиспользованные способы (раскрои) M_3 и M_4 (табл. 1), то для них оценка продукции фактически ниже оценки затрат:

$$1\cdot5+9\cdot1=14<16$$

$$0\cdot5+13\cdot1=13<16.$$

Таким образом, данный план допустим и имеются согласованные с ним оценки. Это значит, согласно высказанному общему критерию оптимальности плана, что более экономного плана быть не может.

В этом можно убедиться таким рассуждением, носящим общий характер. Предположим, что имеется какой-то другой план раскроя, дающий те же нужные заготовки. Будем просматривать раскроенные листы и записывать по пять единиц за каждую заготовку A и по одной за заготовку B. Ясно, что полученная сумма составит не меньше, чем $800\cdot5+400\cdot1=$ $=4400$. С другой стороны, понятно, что при добавлении каждого листа прирост этой суммы составит не больше 16, так как сумма оценок заготовок не превосходит 16 ни при одном из раскроев. Следовательно, число листов не может быть меньше, чем $4400:16=275$, т. е. оно не меньше того числа листов, которое расходуется при выбранном плане, являющемся, таким образом, оптимальным.

Отметим, что эти оценки имеют и простой геометрический смысл, который позволяет дополнительно пояснить наш критерий. Уравнение прямой M_1M_2 на рис. 3 может быть записано следующим образом:

$$5x+y=16$$

(например, как уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (3, 1), $M_2(2,6)$). Мы видим, что коэффициенты уравнения совпадают с оценками заготовок, свободный член равен сумме оценок заготовок, получаемых из одного листа в используемых раскроях. Таким образом, для плана, скомпанованного из раскроев M_1 и M_2, выход заготовок из одного листа будет изображаться точкой отрезка M_1M_2. Поэтому для такого плана суммарная оценка продукции, приходящейся на один лист, будет равна 16. Если же в плане употреблен какой-нибудь иной раскрой, то этому плану соответствует точка ниже прямой и оценка продукции, приходящейся на один лист, будет меньше 16. Это соответствует оптимальности плана, составленного из раскроев M_1 и M_2. Далее, то обстоятельство, что наклон прямой связан с оценками заготовок, означает, что при передвижении по отрезку M_1M_2, при переходе от одного оптимального плана к другому соотношение заготовок изменяется. При этом заготовки A заменяются заготовками B в соотношении $1:5$ в согласии с их о. о. оценками (объективно-обусловленными оценками).

Если бы мы имели другую существенно разнящуюся пропорцию заготовок в задании, то решение определялось бы крайней точкой многоугольника на другом луче. Оно было бы скомпановано из других раскроев, и в соответствии с этим мы имели бы опорную прямую с другим наклоном и соответственно другое соотношение оценок для заготовок A и B. Например, если изменить задание, потребовав, чтобы заготовок типа A было выпущено 400, а типа B — 1600, то ассортиментные планы геометрически изобразятся лучом ON_1 (см. рис. 3).

Приведенный критерий дает, таким образом, возможность проверки плана «на оптимальность», не сопоставляя его с другими,— достаточно построить для него оценки и по ним сравнить продукцию и затраты в используемых способах. Если план не оптимален, то будет установлено, за счет каких изменений он может быть улучшен.

Интересной и очень широко используемой особенностью задач линейного программирования является то, что каждой из них соответствует определенная, тесно связанная с ней другая задача линейного программирования, получившая название *двойственной*. Оказывается, что упоминавшиеся выше объективно обусловленные оценки единицы каждого вида продукции и затрачиваемых производственных факторов сами являются решениями некоторой задачи на максимум — двойственной задачи. Поясним теперь, как естественным образом возникает задача, двойственная к задаче раскроя, и дадим ее экономическую и геометрическую интерпретации.

Для того чтобы пояснить экономическую сторону вопроса, нам будет удобно рассмотреть следующую ситуацию, хотя и условную, но отражающую суть дела. Пусть имеется экономическая система, состоящая из двух частей: Завод и Заготовительный Цех. Завод для производственных целей заказывает Цеху произвести из листового материала заготовки типов

A и B в нужном ассортименте. При этом Завод, естественно, заинтересован, чтобы затраты материала были наименьшими. Выбор способов раскроя, которые обеспечат требуемое количество заготовок при наименьших затратах материала, производится на основе решения уже рассмотренной задачи линейного программирования (будем называть ее прямой задачей).

Предположим, что осуществлен внутризаводской хозрасчет и во взаимоотношениях между Заводом и Цехом используется «рыночный механизм цен». Поэтому Цех стремится оценить свою продукцию как можно дороже, но так, чтобы ее покупка была заводу выгодна, цены были обоснованы. Задача отыскания таких «выгодных» и оправданных цен и есть двойственная задача линейного программирования.

Напомним, что оценки заготовок первого и второго типов обозначались соответственно через V и W, а оценку исходного листа можно считать равной единице (так выбирается масштаб цен). При использовании первой карты раскроя выкраивается a_1 заготовок типа A и b_1 заготовок типа B. Чтобы цены были оправданными, суммарная оценка продукции не должна превышать оценку исходного листа материала, т. е. должно выполняться неравенство

$$a_1V + b_1W \leqslant 1$$

(иначе Заводу было бы выгоднее не передавать раскрой Цеху). Аналогичные неравенства должны выполняться и для всех остальных способов. Естественным представляется и другое, уже упоминавшееся требование: оценки следует выбирать так, чтобы оцененная по ним вся произведенная продукция имела максимальную стоимость. Используя конкретные числовые значения, приходим к следующей задаче.

Найти оценки V и W так, чтобы

$$\underset{\text{оценка заказанной продукции}}{\max\{800V + 400W\}},$$

при условиях

I′ $3V + W \leqslant 1$ (При любом способе раскроя оценка полученных из листа заготовок не превосходит оценки самого листа. Покупать заготовки выгодно).

$2V + 6W \leqslant 1$

$1V + 9W \leqslant 1$

$0 \cdot V + 13W \leqslant 1$

II′ $V \geqslant 0,\ W \geqslant 0$ (Оценки неотрицательны).

Очевидно, что решениями этой задачи являются величины $V = \frac{5}{16}$ и $W = \frac{1}{16}$, т. е. прежние оценки, отнесенные к оценке листа материала.

Итак, если цены равны приведенным выше величинам, Цеху выгодно выполнять задание и в то же время он не получает несправедливого барыша. Отметим, однако, что одни цены не могут обеспечить выполнение договора между Заводом и Цехом. Они служат важным дополнением к нему.

Так же как и исходная, двойственная задача имеет простую геометрическую интерпретацию. Условия I′—II″ определяют некоторый многоугольник, лежащий в первом квадранте плоскости VOW (рис. 4). Он и является многоугольником допустимых планов для двойственной задачи. Уравнение $800V+400W=C$ определяет прямую линию, проведенную на этой же плоскости. Будем перемещать теперь эту прямую параллельно самой себе в направлении, указанном на рис. 4. При этом значение целевой функции будет увеличиваться и достигнет максимума в точке P. Из геометрических соображений ясно, что оптимальным решением задачи, как правило, является одна из вершин многоугольника допустимых решений двойственной задачи. Если же окажется две таких вершины, то тогда и любая точка соединяющего их отрезка также является оптимальным решением.

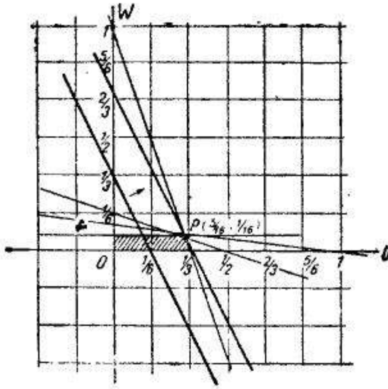


Рис. 4

Казалось бы, из геометрической интерпретации прямой и двойственной задачи сразу виден способ решения задач линейного программирования. Например, в последнем случае достаточно просто построить многоугольник допустимых решений и вычислить значения целевой функции во всех вершинах, так как точка, соответствующая оптимальному решению, обязательно находится среди них. Не нужно забывать, однако, что до сих пор мы рассматривали задачу раскроя лишь с двумя типами выкраиваемых заготовок. Посмотрим теперь, как выглядит задача линейного программирования для раскроя в общем случае, обсудим трудности, возникающие при ее решении, а также возможные пути их преодоления.

В прямой задаче, если число выкраиваемых заготовок равно n, каждому раскрою соответствует теперь точка n-мерного пространства, а многоугольник осуществимых планов превращается в многогранник в этом n-мерном пространстве. Условия ассортиментности определяют луч в том же пространстве и, стало быть, геометрически задача сводится к отысканию крайней точки пересечения многогранника с лучом. Иллюстрация для трехмерного случая приведена на рис. 5, *а*. Точно так же и в двойственной задаче многоугольник допустимых планов в случае n заготовок переходит в многогранник. Прямая линия, характеризующая экономически равноэффективные планы, превращается в гиперплоскость (размерность ее $(n-1)$. На этот раз задача состоит в нахождении точки касания гиперплоскости с многогранником допустимых решений (см. рис. 5, *б*).

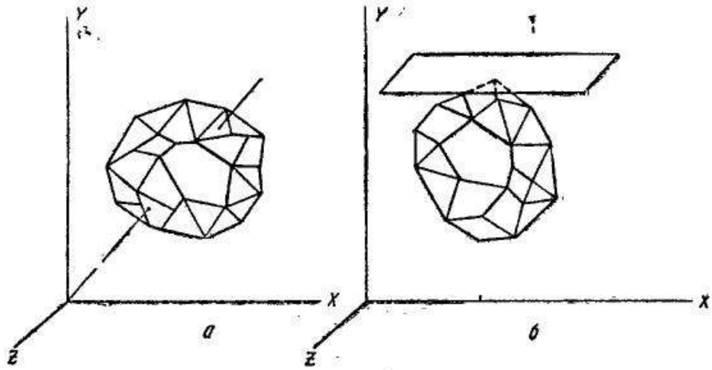


Рис. 5

Ясно, конечно, что и в этом случае оптимальным решением является одна или несколько вершин многогранника допустимых решений. Однако если число переменных и ограничений задачи сравнительно велико, то количество вершин выражается астрономическими числами и вычисление значений целевой функции во всех вершинах практически неосуществимо. Например, если $n=50$ (число переменных) и $m=25$ (число ограничений), тогда число вершин порядка 10^{14}. Если время, необходимое для вычисления значения целевой функции в каждой точке равно одной миллионной секунды, то перебор всех вершин многогранника займет примерно две тысячи лет. Срок явно неприемлемый.

Итак, наглядно показано, что кажущаяся простота решения задач линейного программирования является обманчивой. Напрашивающийся при их решении полный перебор не дает ничего утешительного даже для задач сравнительно небольшого размера.

Как же решать задачи линейного программирования с большим числом переменных и ограничений? Оказывается, что в основе наиболее эффективных методов лежит использование упоминавшихся уже оценок и признака оптимальности решения задачи. Общая схема решения такова. Сначала ищется какое-нибудь решение задачи, так называемое первое приближение — некоторый допустимый план. Обычно это удается сделать без особого труда, привлекая на помощь лишь соображения здравого смысла.

Например, в задаче о раскрое допустимый план может быть построен так. Возьмем раскрой, в котором имеется заготовка первого вида. Это всегда возможно, так как каждая заготовка получается хотя бы при одном раскрое. Применим этот способ раскроя к такому числу листов, чтобы получилось нужное число заготовок первого типа. Возможно, при этом получится и некоторое число заготовок второго типа. Если их достаточно, то допустимый план уже найден, если же нет, то увеличим их количество до необходимого с помощью раскроя, в котором имеется вторая заготовка. Получившееся количество листов материала и примененные способы раскроя определяют допустимый план. Если бы заготовок было больше, чем две, то, продолжая последовательно удовлетворять требования по заготовкам каждого типа, мы также пришли бы в конце концов к допустимому плану.

После того как найден какой-то допустимый план, следует его проверка на оптимальность. Если для этого плана выполнен критерий оптимальности,— могут быть найдены такие неотрицательные оценки каждого вида продукции и производственных факторов, что для технологических способов, используемых в этом плане, алгебраическая сумма затрат и результатов в этих способах равна нулю, а для способов, не включенных в план, эта же сумма меньше или равна нулю,— то этот план оптимален. Если же выясняется, что таких оценок не существует (для их определения получаются противоречивые условия), то план наверняка не оптимален. В этом случае осуществляется переход к «лучшему» допустимому плану. Такой переход может, вообще говоря, осуществляться различными методами. Ниже мы даем описание основных идей двух подобных методов.

1. *Метод последовательного улучшения плана.* Он состоит в том, что в план вводится более эффективный неиспользуемый ранее способ, за счет которого достигается увеличение выпуска продукции. Находится же этот способ в процессе определения оценок. Последовательно применяя такие улучшения, приходят к наилучшему плану.

Для того чтобы лучше понять, каков эффект метода последовательного улучшения плана, дадим такое пояснение. Представьте себе, что из урны, в которой имеется миллион шаров с произвольными номерами, вы хотите извлечь шар с наибольшим номером. Чтобы этого добиться, вам придется чуть ли не 1 000 000 раз вытаскивать шары из урны, не возвращая их назад. Времени это, конечно, займет очень много. Допустим теперь, что вам помогает... волшебник и после очередного извлечения он уничтожает шары в урне с номерами, меньшими выбранного. Так как каждый раз скорее всего будет извлекаться шар с номером где-то посередине между наибольшим и наименьшим, то общее число шаров будет быстро убывать (примерно вдвое после каждого вытаскивания). В этих условиях, чтобы вытащить шар с наибольшим номером, потребуется всего 20—30 извлечений, а не 1 000 000.

Так вот, метод последовательного улучшения плана и выполняет функции этого волшебника. После того как вычислено значение целевой функции в какой-нибудь вершине, из дальнейшего рассмотрения исключаются все вершины, дающие худшие значения целевой функции, и переход производится непременно к лучшей вершине.

2. Метод корректировки оценок. Исходными в этом случае являются приближенные значения оценок, по которым находятся наиболее рентабельные (при этих оценках) способы. Из этих способов формируется план, лишь частично соответствующий заданию или, на языке математики, удовлетворяющий только некоторым ограничениям, т. е. план, не являющийся допустимым. При этом отдельные виды продукции будут получены в избытке, другие — в недостатке. После этого для тех видов продукции, которые получились в избытке, оценки снижаются, а для тех, которые в недостатке,— повышаются. При этом набор рентабельных способов меняется, и с помощью них строится план, лучше удовлетворяющий ограничениям. В конце концов приходим к допустимому плану, и так как имеются согласованные с ним оценки, он будет и оптимальным.

В качестве иллюстрации рассмотрим применение метода последовательного улучшения плана к нашей задаче о раскрое.

Допустим, что в качестве начального выбран план, использующий первый и четвертый способы раскроя; определяя, как указано выше, число листов материала, раскраиваемого каждым из этих способов, получаем с округлением: $x_1=267$ листов кроятся по первому, а $x_4=11$ листов — по четвертому способу. Прежде всего убедимся в том, что этот план допустимый, т. е. удовлетворяет поставленным ограничениям.

$$3\cdot 267=801>800$$

$$1\cdot 267+13\cdot 11=410>400.$$

Далее приступим к проверке плана на оптимальность. Для этого, как и раньше, введем оценки U, V, W соответственно для одного листа материала первой и второй заготовок. Условия рентабельности запишутся на этот раз так (см. табл. 1):

$$-U+3V+W=0$$

$$-U+13W=0.$$

Полагая $U=13$ (так как имеются два уравнения с тремя неизвестными, то одно неизвестное можно задать произвольно), находим оценки заготовок: $V=4$ и $W=1$. Пользуясь ими, оценим продукцию, получаемую при каждом способе раскроя:

$$1.\ 3\cdot4+1\cdot1=13,$$

$$2.\ 2\cdot4+6\cdot1=14>13,$$

$$3.\ 1\cdot4+9\cdot1=13,$$

$$4.\ 0\cdot4+13\cdot1=13.$$

Теперь уже ясно, что рассматриваемый план не оптимален, так как среди неиспользованных способов имеется более рентабельный, чем используемые. Очевидно так же и то, как именно план может быть улучшен. Для этого нужно ввести в него второй, наиболее рентабельный способ, исключив, если нужно, один из имеющихся.

Пусть второй способ применяется с интенсивностью Δx_2. Использование нового способа приводит к изменению интенсивностей употреблявшихся ранее способов. Обозначая эти изменения через Δx_1 и Δx_4, запишем условие того, что плановое задание будет выполнено точно. Имеем

$$3(x_1+\Delta x_1)+2(x_2+\Delta x_2)=800 \quad \text{или} \quad 3\Delta x_1+2\Delta x_2=-1$$

$$1\ (x_1+\Delta x_1)+13(x_4+\Delta x_4)+6(x_2+\Delta x_2)=400 \text{ или}$$

$$\Delta x_1+6\Delta x_2+13\Delta x_4=-10.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x_1=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\Delta x_2 \quad \text{и} \quad \Delta x_4=-\frac{29}{39}-\frac{16}{39}\Delta x_2.$$

Вновь вводимый способ желательно использовать с наибольшей положительной интенсивностью, но все же такой, чтобы остальные интенсивности остались неотрицательными. При увеличении Δx_2 первой обращается в нуль интенсивность четвертого способа $x_4+\Delta x_4=0$, т. е. нужно принять $\Delta x_4=-11$. Иными словами, Δx_2 находится из условия

$$-\frac{29}{39}-\frac{16}{39}\Delta x_2=-11.$$

Искомые изменения интенсивностей способов равны соответственно

$$\Delta x_1=-17,\ \Delta x_2=25 \text{ и } \Delta x_4=-11,$$

а новый, улучшенный план имеет вид:

$$x_1=250 \text{ и } x_2=25\ (x_4=0).$$

Это тот самый план, оптимальность которого уже была доказана ранее.

Конечно, переход от допустимого плана к оптимальному редко удается осуществить за одну итерацию, но все же после каждой итерации план улучшается.

Применение описанных методов улучшения плана чередуется с проверкой условий оптимальности, т. е., получив новый план, мы прежде всего, определяя оценки, выясняем, не оптимален ли он. Если да, то решение заканчивается. Если же нет, то снова применяется метод последовательного улучшения плана. Доказано, что с помощью этого метода за конечное число улучшений можно прийти от любого допустимого плана к оптимальному. И, что самое главное, не просто за конечное, а за разумное число улучшений! Для его реализации на ЭВМ требуются не миллионы лет, а секунды, минуты или, на худой конец, часы. Именно большая эффективность численных методов решения способствовала признанию и распространению линейного программирования, делает весьма перспективным применение методов линейного программирования для решения практических проблем.

Так, внедрение рационального раскроя материалов, рассчитанного методами математического программирования, заметно повышает коэффициент использования материалов, упрощает снабжение. Например, вагоноремонтный завод им. Егорова, где такой раскрой был введен 20 лет назад, до сих пор остается лучшим по использованию металла среди ленинградских заводов. Отметим, что работа, проведенная на этом заводе, представляет один из первых в мире практических опытов применения методов линейного программирования.

В последнее время в Институте математики СО АН СССР сделан дальнейший шаг в развитии методов рационального раскроя. На основе математических методов (линейного и динамического программирования) и ЭВМ автоматизирован не только процесс комбинирования раскроев, но и нахождения самих карт раскроя. Это должно облегчить возможность широкого внедрения этих методов в производство.

Характерной особенностью математики является то, что одна и та же математическая задача, математическое описание может применяться для различных реальных вопросов и иметь разнообразные применения. В частности, изложенная выше задача, возникшая в связи с вопросом о рациональном раскрое, также имеет разнообразные применения.

Для многих производств типичным является комплексный (совместный) выпуск нескольких видов продукции при использовании одного и того же исходного сырья и ресурсов: нефтепереработка, переработка полиметаллических руд, получение молочных и мясных продуктов в животноводстве и т. д. При этом при различной организации производства мы можем получать конечные продукты в различной пропорции, подобно тому, как это имело место при использовании различных раскроев. Ясно, что во всех этих случаях применима та же математическая модель и задача выбора производственных способов, позволяющих получить продукцию нужного состава с наименьшими затратами, может решаться описанными выше методами. (Один пример такого рода задачи приведен ниже.) Поэтому анализ задачи, связанной с раскроем, имеет гораздо большее значение и широкую область применений, чем это могло бы показаться.

§ 3. Оценки оптимального плана. Их смысл и применения

При анализе рассмотренной задачи было установлено, что с оптимальным планом связаны и им обусловлены определенные оценки для каждого вида продукции и исходного ресурса (в рассмотренном примере: 16 — для листа; 5 и 1 — соответственно для каждой заготовки). Остановимся подробнее на смысле этих оценок, так как, помимо их значения как средства установления оптимальности плана и его нахождения, они, сами по себе, играют очень большую роль в приложениях оптимального программирования, в особенности в экономике.

Вернемся к задаче о раскрое и поставим вопрос об оценках заготовок. Точнее говоря, установим, какой расход материала связан с каждой заготовкой. Даже если мы уже располагаем оптимальным планом, ответить на него не так просто. Расходуя лист материала, мы получаем заготовки того и другого вида, но совсем не ясно, какую долю листа следует отнести к одной заготовке, какую — к другой, совсем не очевидно, как обоснованно разделить затраты между ними. Мы постараемся показать, что такое обоснованное, оправданное распределение дают именно полученные выше оценки. В согласии с этими оценками (16; 5; 1) следует считать, что расход на заготовку A есть $^5/_{16}$ листа, а расход на заготовку B — $^1/_{16}$ листа. Первым подтверждением правильности такого подхода является то, что при обоих используемых раскроях расход на полученные заготовки $(3 \cdot {}^5/_{16} + {}^1/_{16} = 1; \quad 2 \cdot {}^5/_{16} + {}^6/_{16} = 1)$ согласуется с расходом одного листа. Далее, если мы пожелали бы увеличить число заготовок A, оставляя число заготовок B неизменным, достаточно было бы увеличить на 6 число листов, раскраиваемых по способу M_1, и уменьшить на один число листов, раскраиваемых по способу M_2; число заготовок A возросло бы на $6 \cdot 3 — 2 \cdot 1 = 16$ штук, а число заготовок B действительно осталось бы неизменным: $6 \cdot 1 — 1 \cdot 6 = 0$, т. е. за счет дополнительных 5 листов мы получили бы 16 заготовок A — на каждую было бы израсходовано $^5/_{16}$ листа. Аналогично можно было бы проверить возможность увеличения числа заготовок B с расходом $^1/_{16}$ листа на каждую. Таким образом, по необходимому расходу материала эти заготовки соотносятся как $5:1$. Легко проверить также, что, изменяя число листов, раскраиваемых по способам M_1 и M_2 (оставляя общее число листов неизменным), мы можем увеличить число заготовок A за счет заготовок B в соотношении $1:5$, т. е. соотношение оценок является вполне *реальным*, мы имеем возможность обменивать (заменять) заготовки в плане в указанном соотношении (с сохранением оптимальности плана).

Необходимо напомнить еще раз то, что эти оценки не являются совершенно неизменными. При существенном изменении условий (например, структуры программы), как отмечалось, они могут изменяться. При уменьшении потребностей в заготовках A соотношение оценок меняется в пользу B (например, 7 : 2 вместо 5 : 1), т. е. они *конкретны*, связаны с конкретной обстановкой. Напротив, при небольших изменениях в программе можно пользоваться теми же оценками, т. е. в известных пределах они *устойчивы*.

Подчеркнем еще раз обусловленность оценок, что они дают объективно необходимые затраты на продукцию в данных условиях. Действительно, с одной стороны мы видели, что имеется возможность получать дополнительно с указанными затратами каждый вид продукции. Можно убедиться, что и, наоборот, наличие некоторого числа единиц продукции соответственно позволяет сократить расход материала. Именно то обстоятельство, что этот уровень затрат является необходимым (общественно необходимым), обусловленным, оправдывает также приведенные выше уравнения и неравенства, определяющие оценки.

Действительно, ни в каком случае, ни при каком способе не может оказаться, что для набора продукции, который получается из единицы материала, оценка необходимых затрат больше единицы. В то же время в способах, реально используемых в оптимальном плане, обусловленные, необходимые затраты на получаемую продукцию должны быть в точности равны единице, иначе примененные способы не были бы рациональными, не могли бы входить в оптимальное решение.

Для пояснения значения оценок укажем некоторые возможные их применения, помимо их значения как характеристики оптимального плана и средства его нахождения.

Может оказаться необходимым то или иное изменение планового задания. Например, в запасе уже имеется 80 заготовок A и 48 заготовок B, т. е. нужно изготовить не 800 и 400, а ставится другое задание: по заготовке A сделать $800-80=720$, а по заготовке B изготовить $400-48=352$. Тогда на основании оценок заготовок, не составляя плана вновь, можем подсчитать число потребных листов, исходя из необходимых затрат на заготовки $720\cdot 5/16+352\cdot 1/16=247$ листов.

То есть оценки могут использоваться при варьировании балансов. На основании оценок может быть определена эффективность использования некоторого нового, не предусматривавшегося при составлении плана способа раскроя — достаточно сравнить затраты в этом способе с необходимыми затратами (оценкой) получаемой продукции. Например, обнаруживается нерациональность использования способа IV, для которого $13\cdot {}^1/_{16}<1$, хотя он безотходен. Наконец, если выявляется возможность замены продукции при использовании (например, если можно было бы где-либо заменить заготовку A на 4 заготовки B), то мы могли бы установить, целесообразна ли эта замена (в данном случае она целесообразна, так как необходимые затраты уменьшатся с $^5/_{16}$ до $4 \cdot {}^1/_{16}$ листа).

Необходимо подчеркнуть, что именно правильное исчисление этих оценок, их обусловленность, связь с оптимальным планом определяют указанные их свойства и возможности использования. Если бы они были определены иным способом, из других соображений и условий, то они не имели бы таких ценных и важных свойств.

Казалось бы, вполне справедливо было при распределении затрат на заготовки произвести его пропорционально площадям этих заготовок, т. е. приинять оценки заготовок A и B равными $5 \cdot 4 = 20$ и $3 \cdot 2 = 6$ и отсюда рассчитать расходы материала $\left(\frac{110}{368} \text{ и } \frac{33}{368}\right)$. Однако можно убедиться, что эти оценки не были бы реальными; мы не можем заменить в плане заготовку A на B, исходя из этих оценок, и т. д. Это означает, что такие оценки не по правильно исчисленным обусловленным необходимым затратам дезориентируют в анализе, приводят к ошибочным выводам, к нереальным или нерациональным решениям.

Те выводы, которые были сделаны при анализе задачи рационального раскроя о наличии и роли оценок, относятся, как указывалось, и к задачам, связанным с комплексным выпуском продукции, и, как мы увидим дальше, к оптимальным решениям в других экономических задачах. Эти выводы имеют принципиальное значение для экономического анализа.

Первый принципиальный вывод состоит в том, что цены необходимым образом возникают и в планируемой экономике. Мы привыкли считать, что цены используются в товарном хозяйстве при обмене. В рассмотренной и упомянутых других задачах, где производство и использование продукции находятся в одних руках, нет различных собственников, составляется единое плановое решение, все же цены (оценки) естественным образом возникли и оказались необходимыми и полезными.

Из приведенных примеров видно, что если цены продукции правильно определены — согласованы с оптимальным планом, построены в соответствии с необходимыми затратами на продукцию, то они становятся эффективным средством экономического анализа. Именно эти оценки, как было показано, служат средством, позволяющим получать решение тех или иных частных вопросов, связанных с реализацией плана, не рассматривая вновь план в целом, а рассчитывая по оценкам только данное изменение. В то же время они позволяют получать при этом решение, согласованное с общим планом, не нарушающее и поддерживающее его оптимальный характер.

Понятно, насколько возрастает значение такой возможности, когда речь идет не о такой сравнительно простой и локализованной задаче, как рациональный раскрой, а о широком круге планово-экономических задач, на которые, как говорилось, распространяются полученные выводы и методы.

Эти оценки здесь не только играют роль средства проверки качества (оптимальности) плана и вспомогательного средства при его нахождении, но и становятся способом его корректировки, учета происшедших изменений, оценки эффективности отдельных производственных акций и решений с точки зрения общего плана и экономической обстановки. Если представить себе реальный производственный комплекс, где имеются сотни и тысячи видов продукции и производственных факторов, масса отдельных участков и производственных процессов, то ясно, насколько облегчает принятие решения возможность сделать это по данным конкретного процесса с помощью оценок немногих входящих в него ингредиентов, а не посредством анализа и пересмотра плана всего комплекса. В то же время решение принимается доброкачественное, оптимальное с точки зрения всего комплекса. Иначе говоря, наличие оценок обосновывает принципиальную возможность принятия децентрализованно — на местах, на участках — решений, согласованных с общим центральным планом всего производственного комплекса. Это говорит о возможности и необходимости использования экономических рычагов в регулировании плановой экономики.

Таким образом, оказывается, что и в научно планируемой экономике цены должны играть не меньшую роль, чем в товарном хозяйстве, но они имеют совершенно другие функции и происхождение. Их главное назначение — служить средством экономического измерения, правильного сопоставления различных результатов и затрат; строятся они путем расчета в процессе нахождения оптимального плана. То обстоятельство, что оценки зависят от условий, обстановки, также является их достоинством, делает средством учета этой обстановки, позволяет отражать её, руководствоваться ею в своих действиях. Например, тот факт, что при увеличении потребности в некотором виде продукции, дефиците ее, оценка этой продукции увеличивается, стимулирует рост ее производства, заставляет снижать ее использование там, где она может быть заменена другой.

Мы еще встретимся дальше с построением и характеристикой оценок в различных экономических задачах и их использованием. Однако уместно показать их значение еще в одной задаче о комплексном выпуске продукции, отличной от рационального раскроя, где экономическая роль оценок более реальна и ощутима.

Предположим, что уголь добывается на трех участках шахты, причем добывается совместно коксующийся и энергетический уголь. В приведенной таблице дано процентное распределение добычи и средние затраты на одну тонну угледобычи.

Номер участка	Энергетический уголь в %	Коксующийся уголь в %	Затраты на одну тонну
1	100	—	9 руб.
2	50	50	11 руб.
3	20	80	13 руб.

Требуется получать в день 6000 *т* энергетического и 2000 *т* коксующегося угля. Легко убедиться, что мы их получим с наименьшими затратами, добывая 4000 *т* на первом участке и 4000 *т* на втором. При этом о. о. оценки в данном случае будут 9 руб. для 1 *т* энергетического и 13 руб. для 1 *т* коксующегося угля [1].

При ценах, установленных исходя из таких оценок (или с небольшой прибылью, скажем, 10%, т. е. 9 руб. 90 коп. и 14 руб. 30 коп), на обоих участках добыча будет экономически выгодной и план будет нормально выполняться. Напротив, если бы цены были установлены без должного учета оценок, например одни и те же для того и другого угля, в соответствии со средним уровнем затрат на обоих участках 10 руб. (или с учетом прибыли 11 руб.), то добыча на первом участке приносила бы гораздо больше прибыли, шахте было бы выгодно форсировать добычу на этом участке и сократить на втором. В результате коксующийся уголь шахта недодавала бы. Никакие благие намерения и призывы давать больше коксующегося угля при отсутствии необходимой заинтересованности и стимула, вероятно, не могли бы помочь. Добычу форсировали бы на первом участке, где производится только энергетический уголь.

В то же время, если бы цены и оплата были построены с правильным учетом необходимых затрат, — была бы достигнута достаточно полная гармония, что целесообразно и нужно, — то было бы выгодно для шахты и каждого ее участка.

§ 4. Общая задача линейного программирования

После того как мы подробно рассмотрели частный случай задачи линейного программирования, задачу раскроя, уместно познакомиться и с ее общей постановкой.

Пусть имеется производство, в котором участвуют m различных элементов: производственные факторы — рабочая сила, сырье, материалы, оборудование, конечные и промежуточные продукты и др. В дальнейшем они все будут объединены под одним названием — ингредиенты. Предполагается заданным некоторое число технологических способов S, причем для каждого способа даны объемы производимых ингредиентов при его реализации с единичной интенсивностью, т. е. задан вектор $a_k = (a_{1k} a_{2k}, \ldots, a_{mk})$, $k = 1, 2, \ldots, S$. Каждая из его компо-

[1] Это можно пояснить так. Энергетический уголь с затратами 9 руб. можно получить на первом участке. Для получения 1 *т* коксующегося нужно на 2 *т* увеличить добычу на втором участке, затратив $2 \cdot 11 = 22$ руб., но из них 9 руб. нужно исключить за счет полученного энергетического угля; чистые затраты на 1 *т* коксующегося угля составят $22 - 9 = 13$ руб.

нент a_{ik} указывает объем производства соответствующего (i-го) ингредиента, если она положительна, и объем его расходования, если она отрицательна (в способе с индексом k).

Выбор плана означает указание интенсивностей использования различных технологических способов, т. е. план определяется вектором $x=(x_1, x_2, ..., x_S)$ с неотрицательными компонентами.

Для каждого плана x легко подсчитать балансы по каждому из ингредиентов, это компоненты вектора

$$\sum_{k=1}^{S} x_k a_k = \left(\sum_{k=1}^{S} a_{1k}x_k;\quad \sum_{k=1}^{S} a_{2k}x_k; \ldots \sum_{k=1}^{S} a_{mk}x_k\right)$$

Положительные компоненты означают объемы производства, а отрицательные — объемы затрат соответствующих ингредиентов в плане.

Обычно на количества выпускаемых и затрачиваемых ингредиентов накладываются ограничения: производить нужно не меньше, чем требуется, а затрачивать не больше, чем имеющиеся ресурсы. Ограничения записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik}x_k \geqslant b_i,\ i=1, 2, \ldots m.$$

Если число $b_i \geqslant 0$, то неравенство означает, что имеется потребность в ингредиенте в размере b_i, если $b_i \leqslant 0$, то неравенство означает наличие ресурса данного ингредиента в размере $-b_i = |b_i|$.

Далее предполагается, что использование каждого способа связано с расходом одного из перечисленных ингредиентов или особо выделенного ингредиента в количестве C_k при единичной интенсивности способа a_k. В качестве целевой функции принимается суммарный расход этого ингредиента в плане

$$f(x)=\sum_{k=1}^{S} C_k x_k.$$

Теперь можно математически сформулировать общую задачу линейного программирования. Для заданных чисел a_{ik}, b_i и C_k найти

$$\min \sum_{k=1}^{S} C_k x_k$$

при условиях:

$$1.\ x_k \geqslant 0,\quad k=1, 2, \ldots, S;$$

$$2.\ \sum_{k=1}^{S} a_{ik}x_k \geqslant b_i,\ i=1, 2, \ldots, m.$$

План, удовлетворяющий этим условиям, называется *допустимым*, а доставляющий, кроме того, и минимум целевой функции,— *оптимальным*.

Итак, задача состоит в отыскании минимума линейной функции при линейных ограничениях, иначе говоря, минимума этой функции на выпуклом многограннике допустимых планов. Выше указывалось, что этот минимум обязательно достигается в одной или нескольких вершинах многогранника. Уточним: так дело обстоит, если многогранник ограничен. В противном случае решение задачи может и не существовать. Для решения задачи необходимо иметь возможность устанавливать, оптимален ли план без непосредственного сравнения с планами, соответствующими остальным вершинам многогранника. Эта возможность и дается признаком оптимальности плана, формулируемым в виде такой теоремы.

Для оптимальности допустимого плана x необходимо и достаточно существование вектора $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, удовлетворяющего условиям:

$$1.\ y_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, m;$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{m} a_{ik}y_i \leqslant C_k,\ k=1,2, \ldots, S;$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{m} a_{ik}y_i = C_k, \text{ если } x_k > 0;$$

$$4.\ y_i = 0, \text{ если } \sum_{k=1}^{S} a_{ik}x_k > b_i.$$

Компоненты вектора y можно рассматривать как неоднократно упоминавшиеся уже оценки для всех видов ингредиентов. На «языке» оценок все условия теоремы имеют прозрачный экономический смысл:

условие 1 — оценка каждого ингредиента неотрицательна;

условие 2 — для каждого возможного способа получаемый эффект — алгебраическая сумма оценок произведенных и затраченных ингредиентов не превосходит C_k — расхода, связанного с применением способа;

условие 3 — в оптимальный план могут включаться только оправданные технологические способы, для которых суммарная оценка получаемой продукции равна расходу C_k;

условие 4 — ингредиенты, получаемые в оптимальном плане с избытком, имеют нулевые оценки.

Мы приведем здесь доказательство этой теоремы в сторону достаточности, т. е., предполагая для допустимого плана x существование вектора y, удовлетворяющего условиям 1—4, докажем, что план x оптимален.

Пусть вектор $x'=(x_1', x_2', \ldots, x_s')$ представляет собой какой-то допустимый план. Подсчитаем значение целевой функции для плана x'; используя условие 2 признака оптимальности, имеем

$$\sum_{k=1}^{s} C_k x_k' \geqslant \sum_{k=1}^{s} x_k' \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{s} a_{ik} x_k'.$$

Так как план допустим, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{s} a_{ik} x_k' \geqslant \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Из условия допустимости плана x и условий 4 и 3 следует

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{s} x_k a_{ik} = \sum_{k=1}^{s} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i = \sum_{k=1}^{s} C_k x_k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{s} C_k x_k' \geqslant \sum_{k=1}^{s} C_k x_k,$$

т. е. план x оптимален, так как любому допустимому плану соответствует не меньшее значение целевой функции, чем плану x. Доказательство необходимости условия теоремы, т. е. наличия оценок, согласованных с планом, не приводим.

Очень важно отметить, что вектор оценок y, соответствующий оптимальному плану, сам является решением упоминавшейся уже экстремальной задачи, подобной исходной, получившей название двойственной задачи линейного программирования.

Формулировка двойственной задачи линейного программирования такова:

Для заданных чисел a_{ik}, b_i, C_k найти

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right\}$$

при условиях

1'. $y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m,$

2'. $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \leqslant C_k,\ k=1, 2, \ldots, S.$

Читатель, внимательно ознакомившийся с объяснением того, как составлялась двойственная задача к задаче раскроя, без труда сможет установить экономический смысл этих соотношений.

Связь между прямой и двойственной задачами линейного программирования характеризуется следующим положением.

Если одна из них имеет решение, то разрешима и другая. При этом для оптимальных планов этих двух задач справедливо соотношение

$$\sum_{k=2}^{S} C_k x_k = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Это утверждение носит название теоремы двойственности.

Замечание: отметим, что решение прямой и двойственной задач линейного программирования всегда может быть сведено к отысканию оптимальных смешанных стратегий двух игроков в прямоугольной игре с нулевой суммой. Таким образом, методы теории игр могут применяться при решении задач линейного программирования и, наоборот, аппарат линейного программирования может применяться в теории игр.

Использование теоремы двойственности и связанного с ней признака оптимальности допустимого плана лежит в основе большинства эффективных методов решения задач линейного программирования. В § 2 было продемонстрировано решение задачи о раскрое с помощью метода последовательного улучшения плана. Близко к нему примыкает симплекс-метод, разработанный американским математиком. Дж. Данцигом. Здесь мы приведем лишь краткое описание этого метода.

Прежде всего отметим, что в постановке задачи линейного программирования каждое неравенство $\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k \leqslant b_i$ может быть заменено на равенство прибавлением к левой части вновь вводимой неотрицательной переменной: $\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k + x_{S+i} = b_i$, $x_{S+i} \geqslant 0$. Полагая, что $n = S + m$ и $C_{S+i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, получаем возможность рассматривать задачу линейного программирования (за счет увеличения числа переменных) в следующей канонической форме:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

при условиях

1. $x_i \geqslant 0$,
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Разъясним еще одно понятие, которое нам потребуется в дальнейшем. Мы будем говорить, что m векторов m-мерного векторного пространства образуют *базис*, если они линейно независимы, т. е. ни один из них не может быть выражен через другие. Тогда всякий вектор x пространства может быть единственным образом выражен через векторы базиса $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_m a_m$ где величины ξ_k – коэффициенты разложения.

После этого небольшого пояснения вернемся к рассматриваемой задаче. Предположим, что уже имеется допустимый план x, причем такой, что способы, используемые в нем, являются базисными векторами (такой план называется *опорным*). Можно считать, что базис состоит из первых m векторов a_1, a_2, ..., a_m, так как этого всегда можно добиться изменением нумерации способов. Поскольку всякий вектор m-мерного пространства можно разложить по этому базису, найдем разложения всех векторов способов и вектора ограничений. Коэффициенты этих разложений объединены в таблицу 2 (так называемая *симплексная таблица*).

В частности, для самих базисных векторов записаны их очевидные разложения типа

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_m,$$

для небазисных векторов

$$a_{m+1} = x_{1m+1} a_1 + x_{2m+1} a_2 + \ldots + x_{km+1} \cdot a_m,$$

где x_{km+1} — коэффициенты разложения. Наличие разложения $b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_m \cdot a_m$ для вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ с неотрицательными x_k вытекает из предположения, что план x допустимый.

Процедура симплекс-метода состоит из двух этапов:

1. проверка плана на оптимальность и
2. включение рентабельных способов и вытеснение из базиса нерентабельных. Выполнение второго этапа переводит исходный допустимый план в лучший.

Базисность допустимого плана означает, что любой способ, не используемый в этом плане, можно выразить через используемые способы. Пусть раскрой a_S не был включен в план. Тогда его можно «синтезировать» из базисных способов раскроя, т. е. $a_S = \sum_{i=1}^{m} x_{iS} a_i$. Расход α_S для этого «синтетического» раскроя определяется равенством $\alpha_S = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{iS}$. Если «синтетический» раскрой дороже, чем раскрой a_S, то целесообразно заменить его способом a_S путем введения последнего в базис. Пусть способ раскроя a_S вводится в базис с интенсивностью Θ. Для того, чтобы не нарушались балансовые соотношения, нужно изменить интенсивность, с которой применяются остальные способы. Из написанного выше разложения a_S ясно, что интенсивность x_i, с которой применялся раскрой a_i, следует уменьшить на величину Θx_{iS}. Так как интенсивности не могут быть отрицательными, нужно обеспечить выполнение неравенств

$$x_i - \Theta x_{iS} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что $\Theta \leqslant \frac{x_i}{x_{iS}}$. Ясно, что наибольшее допустимое Θ есть $\Theta = \min \frac{x_i}{x_{iS}}$ Допустим, что минимум этот достигается при $i=l$, т. е. $\Theta=\frac{x_l}{x_{ls}}$. Принимая такую интенсивность для вновь вводимого способа a_S, получим, что $x_l-\frac{x_l}{x_{ls}}x_{ls}=0$, т. е. способ a_l применяется с нулевой интенсивностью — выводится из базиса. Таким образом, построен новый, лучший план. Приступим теперь к более формальному описанию метода. Для каждого небазисного способа можно сравнить два числа:

$$C_K \text{ и } \alpha_K=\sum_{i=1}^{m} C_i x_{iK}.$$

Из критерия оптимальности ясно, что план x оптимален тогда и только тогда, когда $C_K \geqslant \alpha_K$ для всех K.

Действительно, если для какого-нибудь K выполняется неравенство $\alpha_K>C_K$, то план неоптимален и способ a_K целесообразно ввести в новый базис. Если таких K несколько, то естественно ввести один из них, например, тот, для которого разность α_K-C_K максимальна. Пусть он соответствует $K=S$.

Для того чтобы новый допустимый план был опорным, необходимо исключить один из использовавшихся способов, так как $(m+1)$ векторов в m-мерном пространстве всегда линейно зависимы и базиса не образуют. Подсчитаем величину $\Theta=\min\limits_{i}\frac{x_i}{x_{is}}$, где индекс i соответствует положительным компонентам плана. В силу предположения, сделанного выше, $\Theta=\frac{x_l}{x_{ls}}$. Тогда исключить из базиса следует именно способ a_l и новому плану будет соответствовать базис $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_{l+1}, \ldots, a_m, a_S$.

Теперь покажем, как перейти от плана x к лучшему допустимому плану x'. Раскладывая вектор ограничений по новому базису, имеем

$$b=x_1'a_1+x_2'a_2+\ldots+x_{l-1}'a_{l-1}+x_{l+1}'a_{l+1}+\ldots+x_m'a_m+x_S'a_S.$$

С другой стороны, используя имевшиеся ранее разложения векторов b и a_l, тот же вектор b можно представить в таком виде

$$b=\left(x_1-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{1S}\right)a_1+\ldots+\left(x_{l-1}-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{l-1S}\right)a_{l-1}+\ldots$$

$$\ldots+\left(x_m-\frac{x_l}{x_{lS}}x_{mS}\right)a_m+\frac{x_l}{x_{lS}}a_S.$$

Отсюда следует, что новый план может быть вычислен по формулам:

Таблица 2

	a_1	a_2	$\ldots$	a_m	a_{m+1}	$\ldots$	a_n	b
a_1	1	0	$\ldots$	0	x_{1m+1}	$\ldots$	x_{1n}	x_1
a_2	0	1	$\ldots$	0		$\ldots$	$\cdot$	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\ldots$	0				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_m	0	0	$\ldots$	1	x_{mm+1}	$\ldots$	x_{mn}	x_m

$$x_i' = x_i - \frac{x_l}{x_{lS}} x_{iS}, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m;$$

$$x_S' = \frac{x_l}{x_{lS}}.$$

Важно отметить, что x_i' неотрицательны. Это ясно из выбора Θ. По аналогичным формулам можно преобразовать всю симплексную таблицу.

Отысканием нового плана и преобразованной таблицы завершается одна итерация симплекс-метода. Далее этапы проверки и улучшения повторяются снова. Доказано, что если оптимальное решение задачи существует, то оно будет найдено через конечное число шагов[1].

Замечание: мы предполагали с самого начала, что допустимый план существует. Правильно поставленная задача действительно обычно имеет решение, однако трудности нередко возникают при отыскании допустимого опорного плана. В этих случаях используется метод искусственного базиса, связанный с введением в задачу дополнительных способов.

Читателю рекомендуется после ознакомления с описанием симплекс-метода применить его к рассмотренному выше примеру.

[1] Мы не говорим о так называемых случаях вырождения, практически почти не встречающихся, где нужно некоторое изменение алгорифма.

Заметим, что описанный ранее метод последовательного улучшения плана более эффективен, чем симплекс-метод, если число переменных в задаче превосходит число ограничений.

Описанный вариант симплекс-метода не является единственным. На практике обычно употребляется более совершенный вариант — модифицированный симплекс-метод, связанный с использованием двойственной задачи (оценок) и по существу близкий к описанному выше методу последовательного улучшения плана.

Существуют и другие методы решения задач линейного программирования, останавливаться на которых здесь мы не имеем возможности. Заинтересовавшийся читатель может познакомиться с ними по рекомендованной литературе.

Наличие универсальных эффективных методов решения задач линейного программирования, носящих ясно выраженный алгоритмический характер (характер четкого предписания), позволяет успешно программировать и реализовать их решение на ЭВМ. Имеется большой набор программ для этой цели, дающих возможность решать задачи с числом ограничений порядка 100 и более и с сотнями и тысячами переменных (способов). Решение требует несколько минут (иногда часов) машинного времени. Задачи меньшего объема теми же методами успешно решаются вручную с применением настольных счетных машин.

Глава II

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Транспортная задача

Задача эта возникает, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного (одного и того же назначения и качества) продукта от производителей к потребителям. В этом случае для каждого потребителя безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным будет прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим естественно возникает вопрос о наиболее рациональном прикреплении, правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны. Более точно задача формулируется так.

Пусть имеются пункты производства $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с объемами производства в единицу времени (месяц, квартал), равными соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и пункты потребления $B_1, B_2, \ldots, B_m$ с объемами потребления, равными $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$. Предполагаются известными величины C_{ij} — затраты по перевозке единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме (в рублях) или в натуральной (например, в тонно-километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах B_1, $B_2, \ldots, B_m$ и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальны. Обозначая через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, приходим к следующей математической формулировке задачи.

Найти минимум

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}x_{ij} \qquad (*)$$

(суммарные затраты на транспортировку) при условиях:

I. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j,\ j=1, 2, \ldots, m$

(в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта).

II. $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i,\ i=1, 2, \ldots, n$

(из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт).

III. $x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1, 2, \ldots, n;\quad j=1, 2, \ldots, m$

(перевозимый объем продукта не может быть отрицательным).

Всякий набор величин x_{ij} ($i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$), удовлетворяющих условиям I—III, мы будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты (*) достигают минимума, называется оптимальным.

Поскольку транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, для нее справедлив приведенный ранее критерий оптимальности плана. Используя терминологию и особенности транспортной задачи, этот критерий можно сформулировать так. Допустимый план перевозок тогда и только тогда является оптимальным, когда каждому пункту производства и потребления можно сопоставить величину, характеризующую уровень оценки продукции в нем (*потенциал*), так, что множество этих потенциалов удовлетворяет следующим условиям:

1. Разность потенциалов пунктов потребления и производства, между которыми запланированы перевозки, равна затратам по транспортировке единицы продукта между этими пунктами.

2. Аналогичные разности для всех остальных пар пунктов не превосходят затрат по транспортировке.

Иначе говоря, если обозначить через U_i потенциал для i-го пункта производства, а через V_j — для j-го пункта потребления, то эти условия запишутся так:

$$V_j-U_i\leqslant C_{ij},$$

причем $V_j-U_i=C_{ij}$, если перевозка из пункта A_i в пункт B_j предусмотрена в плане ($x_{ij}>0$).

В транспортной задаче оценки или, как их чаще называют в этом случае потенциалы имеют особенно прозрачный экономический смысл. Они выступают здесь как локальные (поясные) цены (или наценки к единой цене), создающие заинтересованность в правильном направлении перевозок.

При такой интерпретации признак оптимальности плана представляет собой по сути математическое выражение здравого смысла — если какая-то перевозка осуществляется, то цена в пункте потребления равна цене в пункте производства плюс транспортные затраты; в остальных случаях цена V_j не может быть больше, чем U_i+C_{ij}, так как продукт в пункте j по такой цене можно было бы получить, привезя его с затратами C_{ij} из пункта i. Следовательно, $V_j \leqslant U_i+C_{ij}$, то есть в обоих указанных случаях разность цен не превышает затрат по перевозке. С помощью критерия оптимальности можно не только проверить на оптимальность любой план, но и, в случае его неоптимальности, указать способ улучшения этого плана. Сейчас мы приведем детальное описание процесса построения оптимального плана с помощью последовательного улучшения, исходя из некоторого исходного допустимого плана. Для большей наглядности изложение будет вестись на конкретных числовых данных.

Пример: пусть заданы объемы производства $a_1=95$, $a_2=55$, $a_3=50$ и объемы потребления $b_1=48$, $b_2=54$, $b_3=31$, $b_4=37$ и $b_5=30$. Затраты на перевозки записаны в виде таблицы (матрицы):

Таблица 3

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	90	84	72	56	46
A_2 (55)	39	43	66	40	55
A_3 (50)	41	54	45	38	36

Например, число 90 означает, что перевозка единицы продукта из пункта A_1 в пункт B_1 обходится в 90 единиц (скажем, эти числа могут означать расстояния между пунктами; если объем дан в тоннах, затраты выражаются в *ткм*).

Решение задачи начнем с построения некоторого допустимого плана. Это можно сделать различными методами. В частности так: в матрице затрат отыскиваем минимальный элемент (в данном примере 36) и в первую очередь включаем в план самую дешевую перевозку, притом в максимально возможном объеме. Следовательно, в план включаем перевозку тридцати единиц из пункта A_3 в пункт B_5. Следующий по величине элемент матрицы затрат (38) определяет включение в план перевозки между пунктами A_3 и B_4. Объем перевозки равен только двадцати единицам, так как это уже исчерпывает возможности предприятия, расположенного в пункте A_3. Продолжая действовать аналогично и дальше, придем к такому плану перевозок (см. табл. 4).

В том, что план допустимый, легко убедиться, проверив, что суммы элементов в каждой строке этой матрицы равны соответствующим объемам производства, а суммы по столбцам — объемам потребления. Затраты на реализацию этого плана составляют $54\cdot 84+31\cdot 72+10\cdot 56+$ $+48\cdot 39+7\cdot 40+20\cdot 38+30\cdot 36=11\,320$.

Таблица 4

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	54	31	10	0
A_2 (55)	48	0	0	7	0
A_3 (50)	0	0	0	20	30

Для того чтобы проверить полученный план на оптимальность, прежде всего вычисляем систему потенциалов (оценок единицы продукта) в пунктах производства и пунктах потребления. Так как потенциалы определяются с точностью до постоянного слагаемого, какой-нибудь из них можем задать заранее. Пусть, например, $U_1=100$ (потенциалы пунктов производства обозначим U_1, U_2, U_3, а пунктов потребления — V_1, V_2, V_3, V_4, V_5). Далее, используя тот факт, что разности потенциалов между пунктами потребления и пунктами производства, связанными в плане (см. рис. 6 и табл. 4), равны соответствующим транспортным затратам, один за другим находим остальные потенциалы:

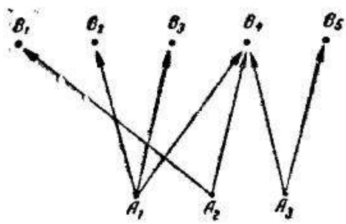


Рис. 6

$$U_1=100 \qquad U_2=156-40=116$$
$$V_2=100+84=184 \qquad U_3=156-38=118$$
$$V_3=100+72=172 \qquad V_1=116+39=155$$
$$V_4=100+56=156 \qquad V_5=118+36=154$$

Теперь проверим выполнение признака оптимальности. Для этого нужно согласно условию 2 подсчитать величины $V_j-U_i-C_{ji}$. Если они все $\leqslant 0$, то план оптимален, иначе план может быть улучшен. Находим

$$V_1-U_1-C_{11}=155-100-90=-35$$
$$V_5-U_1-C_{51}=154-100-46=8$$
$$V_2-U_2-C_{22}=184-116-43=25$$
$$V_3-U_2-C_{23}=172-116-66=-10$$
$$V_5-U_2-C_{25}=154-116-55=-17$$
$$V_1-U_3-C_{31}=155-118-41=-4$$
$$V_2-U_3-C_{32}=184-118-54=12$$
$$V_3-U_3-C_{33}=172-118-45=9$$

Для пунктов, между которыми предусмотрены перевозки, эти разности, очевидно, равны нулю. Так как некоторые из найденных значений положительны, то план не оптимален. Чтобы его улучшить, введем в план перевозку в объеме Θ между какими-нибудь пунктами A_i и B_j, для которых соответствующая разность положительна. Естественно ввести перевозку между пунктами A_2 и B_2, так как для них эта разность принимает максимальное значение, равное 25. Введение добавочной перевозки нарушает сбалансированность плана (объем ввоза в пункт не соответствует потреблению в нем или объем вывоза — производству), поэтому необходимо одновременно изменить объемы перевозок и между некоторыми другими пунктами. Эти изменения следует произвести по участкам B_2A_1, A_1B_4 и B_4A_2, т. е. согласно тем связям, по которым производилось определение потенциалов (см. рис. 6). В табл. 5 приведен план, содержащий все необходимые изменения в объемах перевозок.

Нетрудно проверить, что этот план сбалансирован — из каждого пункта вывозится столько, сколько в нем производится, а каждый пункт потребления получает столько, какова его потребность. Легко убедиться, что затраты по реализации этого плана перевозок меньше первоначальных на величину $(V_2 - U_2 - C_{22})\ \Theta = 25\Theta$. Следовательно, выгодно Θ выбрать как можно бо́льшим. Однако объемы перевозок не могут быть отрицательными. Значит, наибольшее возможное значение Θ равно 7. Полагая $\Theta = 7$, находим новый допустимый экономически более выгодный план. Он приведен в табл. 6.

Таблица 5

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	$54-\theta$	31	$10+\theta$	0
A_2 (55)	48	θ	0	$7-\theta$	0
A_3 (50)	0	0	0	20	30

Нахождением нового допустимого плана заканчивается, как говорят математики, первое приближение. Дальше проведенные операции повторяются снова, но уже для нового плана. Прежде всего вычисляются потенциалы, проверяются условия оптимальности. Если они выполнены, то решение закончено. Если нет, то снова производится переход к лучшему плану и т. д.

Таблица 6

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	47	31	17	0
A_2 (55)	48	7	0	0	0
A_3 (50)	0	0	0	20	30

Для решения нашей задачи требуется выполнить еще три приближения. Читателю, заинтересовавшемуся решением задачи, предлагается самому проделать все необходимые расчеты и сравнить свой результат с оптимальным планом, приведенным в табл. 7.

Чтобы убедиться в оптимальности этого плана, нужно снова вычислить потенциалы пунктов производства и пунктов потребления, а затем удостовериться, что величины $V_j - U_i - C_{ij} \leqslant 0$. Приведем эти вычисления:

$$U_1 = 100 \qquad V_1 - U_1 - C_{11} = 168 - 100 - 90 = -22$$

$$V_3 = 100 + 72 = 172 \qquad V_2 - U_1 - C_{12} = 172 - 100 - 84 = -12$$

$$V_4 = 100 + 56 = 156 \qquad V_3 - U_2 - C_{23} = 172 - 129 - 66 = -23$$

$$V_5 = 100 + 46 = 146 \qquad V_4 - U_2 - C_{24} = 156 - 129 - 40 = -13$$

$$U_3 = 172 - 45 = 127 \qquad V_5 - U_2 - C_{25} = 146 - 129 - 55 = -38$$

$$V_1 = 127 + 41 = 168 \qquad V_2 - U_3 - C_{32} = 172 - 127 - 54 = -9$$

$$U_2 = 168 - 39 = 129 \qquad V_4 - U_3 - C_{34} = 156 - 127 - 38 = -9$$

$$V_2 = 129 + 43 = 172 \qquad V_5 - U_3 - C_{35} = 146 - 127 - 36 = -17$$

Таблица 7

	B_1 (48)	B_2 (54)	B_3 (31)	B_4 (37)	B_5 (30)
A_1 (95)	0	0	28	37	30
A_2 (55)	1	54	0	0	0
A_3 (50)	47	0	3	0	0

Все же остальные значения $V_j - U_i - C_{ij}$ равны нулю. Следовательно, в силу критерия оптимальности, найденный план — наилучший, оптимальный. Затраты на его реализацию составляют

$$28 \cdot 72 + 37 \cdot 56 + 30 \cdot 46 + 39 \cdot 1 + 43 \cdot 54 + 47 \cdot 41 + 45 \cdot 3 = 9891.$$

По сравнению с первым допустимым планом, который представлялся на первый взгляд также весьма «разумным», затраты в оптимальном плане уменьшились примерно на 13%.

Рассмотренная нами постановка транспортной задачи носит название матричной или «шахматки». (Название связано с тем, что информация о расстояниях и грузопотоках задана в виде таблицы-матрицы). Нередко, однако, приходится сталкиваться и с другой формой транспортной задачи — транспортной задачей в сетевой постановке. Если в задаче в матричной форме предполагаются известными затраты по транспортировке единицы продукта из каждого j-го пункта производства в i-й пункт потребления, то при сетевой постановке указываются затраты по перевозке на отдельных участках сети,

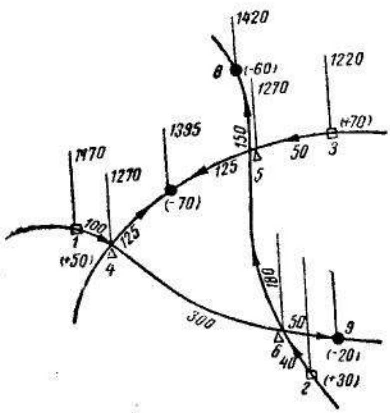


Рис. 7

а полные затраты получаются суммированием. Поэтому при использовании различных путей, соединяющих пункты, затраты различны. Здесь в ходе решения определяются не только объемы, но и маршруты перевозок. Доказано, что обе эти формы эквивалентны, т. е. можно перейти от одной к другой и решение при этом не изменится. Тем не менее необходимости в таком переходе нет, так как метод потенциалов применим и к задачам в сетевой постановке. Рассмотрим, например, транспортную задачу в конкретных условиях, приведенных на рис. 7. Пункты производства на нем обозначены прямоугольниками, пункты потребления — кружками, а промежуточные пункты — треугольниками. Числа в скобках со знаком плюс указывают объемы производства, а со знаком минус — потребления; числа, стоящие возле участков пути, выражают транспортные затраты по перевозке единицы продукта между соответствующими пунктами.

В результате решения, ход которого мы не будем приводить здесь, можно найти рациональные грузопотоки, а также систему потенциалов, выражающих цену единицы продукта в различных пунктах, включая обусловленную планом рациональную транспортную наценку.

На рис. 7 числа, стоящие у вертикальных отрезков, равны потенциалам, а стрелки на контуре указывают направление рациональных перевозок.

Еще раз отметим замечательную согласованность между оптимальным планом и ценами, установленными в соответствии с потенциалами. Для рациональных путей перевозок (указанных в плане стрелками) разность цен в точности совпадает с затратами на перевозку, т. е. такие рациональные перевозки оправданы — выгодны (например, для пунктов *2* и *6:* 1090—1050=40 — затраты по перевозке). Напротив, те перевозки, которые нерациональны в данных условиях и не рекомендованы в плане, оказываются невыгодными — прирост в цене меньше транспортных затрат (например, перевозка из пункта *1* в пункт *8* явно невыгодна, так как транспортные затраты равны 500, а разность цен 1420—1170=250<500).

Математическая модель транспортной задачи получает все большее и большее практическое применение. В настоящее время в Государственном комитете по материально-техническому снабжению на основе методики, разработанной для этой модели, произведено прикрепление и составлены рациональные планы перевозок для десятков видов продукции химической промышленности, промышленности строительных материалов и продукции других отраслей хозяйства, что дает миллионы рублей экономии в затратах на железнодорожный транспорт.

Необходимо подчеркнуть, что постановка этой задачи характерна для социалистической экономики. Критерием оптимальности является минимум суммарных затрат по перевозке груза, т. е. народнохозяйственный эффект, а не выгода отдельных грузополучателей. Ясно, что не только цель, но и сама возможность широкой реализации решения, требующая переформирования всех грузопотоков данного груза в масштабах страны, осуществима лишь в условиях научно планируемой экономики — и в производстве, и в распределении продукции. В то же время получающаяся при решении транспортной задачи возможность установления экономически обоснованной, дифференцированной системы цен (или транспортных накидок) делает рациональные прикрепления экономически выгодными и взаимоувязанными для всех производителей и потребителей данной продукции. Такие цены способствуют реализации оптимальных решений в хозяйственной деятельности.

Следует сказать, что в отношении экономических показателей и оценок выводы теории оптимального планирования еще не получили достаточной реализации.

Задачи оптимальной маршрутизации также тесно связаны с рассмотренной нами моделью. Краткая характеристика их такова. Пусть речь идет о перевозке различных грузов между несколькими пунктами погрузки и разгрузки, причем адреса перевозок указаны заранее. Тогда дело сводится к определению того, куда нужно перебрасывать высвободившиеся вагоны или автомашины, чтобы суммарные затраты на их перевозки были минимальны, т. е. чтобы минимизировалось количество «холостых» рейсов.

Оказывается, для того, чтобы решить маршрутную задачу с помощью транспортной модели, нужно принять в качестве однородного груза... пустые вагоны, направляемые от пункта выгрузки к пунктам погрузки. Полученное распределение, которое без труда находится на основе транспортной задачи, и дает решение задачи об оптимальной маршрутизации, так как оно определяет пути следования вагонов. Практическое применение транспортной задачи для решения задач оптимальной маршрутизации получило особенное распространение на автотранспорте. В ряде крупных городов производится ежедневный расчет рациональных маршрутов на ЭВМ и на их основе пишутся наряды для значительного процента автомашин. В некоторых небольших автохозяйствах эту методику хорошо освоили и регулярно используют сами диспетчеры. Это позволяет в ряде случаев снижать холостой пробег на 20—40%. Об эффекте ее применения убедительно свидетельствует и такой любопытный факт. В одном автохозяйстве, где проводился эксперимент по введению наилучшей маршрутизации транспорта, шоферы, ездившие по оптимальным маршрутам, найденным с помощью метода потенциалов, имели на своих машинах отличительные флажки. Через несколько дней после начала эксперимента шоферы наглухо припаяли флажки к машинам, так как они стремились и впредь получать «математические» наряды. Большая эффективность работы этих машин была выгодна не только для автохозяйства в целом, но и для каждого из водителей.

1. Гидравлическая модель. Итак, мы показали, что признак оптимальности позволяет построить эффективный вычислительный метод решения транспортной задачи. Он же лежит в основе разного рода моделирующих устройств, дающих возможность автоматически находить оптимальное решение. В качестве примера опишем одну из таких аналоговых моделей — гидравлическую модель для решения транспортной задачи. Пунктам производства и пунктам потребления в ней соответствуют сосуды с жидкостью. Из общего резервуара, в котором поддерживается постоянный уровень жидкости, сосуды, отвечающие пунктам производства (сосуды первой группы), питаются посредством трубок с градуированными кранами, причем так, что в i-й сосуд (соответствует i-му пункту производства) ежесекундно втекает a_i единиц жидкости (рис. 8). Из сосудов, отвечающих пунктам потребления (вторая группа), жидкость вытекает также через трубки с градуированными кранами с расходом b_i единиц в секунду; отводящие концы этих трубок закреплены на поплавках для того, чтобы напор

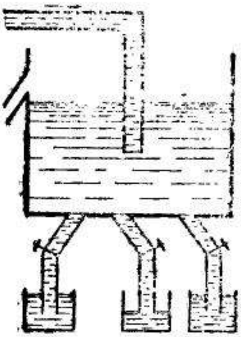
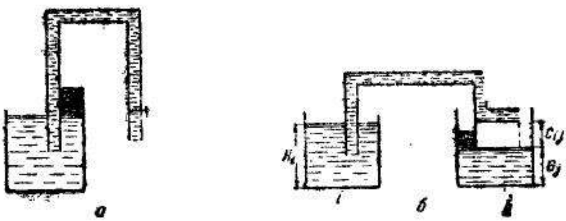


Рис. 8



а *б*

Рис. 9

оставался постоянным (рис. 9, *а* и *б*). Каждый сосуд первой группы соединен трубками со всеми сосудами второй группы так, что сосуды i и j превращаются в сообщающиеся, если разность уровней в них $H_i - G_j \leqslant C_{ij}$. В этом случае, когда процесс установится, оказывается, что количество жидкости, протекающей в секунду из сосуда i в сосуд j, в точности совпадает с объемом перевозок от i-го пункта производства к j-му пункту потребления в оптимальном плане. В качестве потенциалов пунктов производства и потребления могут быть взяты соответственно числа $U_k = C - H_k$ и $V_j = C - G_j$, где H_k и

G_j — уровни жидкости в сосудах, а C — произвольное вещественное число.

Хотя гидравлическая модель и очень проста в описании, на практике она применяется реже, чем различные электрические модели задач линейного программирования. Подробное описание некоторых из них содержится в работах Дж. Денниса и Г. Е. Пухова.

2. Задача размещения. При обсуждении транспортной задачи мы использовали такие специфические термины, как «перевозка», «транспортные издержки» и т. п. Однако это совсем не означает, что данная математическая модель охватывает лишь задачи рациональной транспортировки. Задачи, которые мы сейчас приведем, особенно последняя из них, имеют своей целью лишний раз доказать это. Начнем с очень важной по своим применениям задачи о размещении производства.

Пусть в пунктах $A_1, A_2, ..., A_m$ имеются или могут быть размещены предприятия, производящие некоторый продукт. В пунктах $B_1, B_2, ..., B_n$ потребности в этом продукте заданы и равны соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$. Затраты по производству единицы продукта в пункте A_i равны C_i, возможный объем производства a_i, а затраты по транспортировке единицы продукта из A_i в B_j равны C_{ij}. Вопрос состоит в выборе мест расположения новых предприятий, объемов производства и плана перевозок так, чтобы суммарные затраты по производству и транспортировке всего потребного объема продукта были минимальны.

Первое осложнение при такой постановке заключается в том, что возможный суммарный объем производства, как правило, не сбалансирован и превышает суммарный объем потребления (это так называемая *открытая транспортная задача*, рассмотренная же ранее называется *закрытой*). Эту задачу, однако, можно свести к обычной транспортной, вводя добавочный фиктивный пункт потребления B_{n+1} с такими характеристиками: потребность продукта в нем равна разности между возможным объемом производства продукта и суммарной потребностью всех реальных пунктов потребления, т. е. в него сводятся все излишки, а затраты на перевозку в него из всех пунктов производства равны нулю.

Используя этот прием и решив обычную транспортную задачу, в которой, однако, в элементах матрицы затрат к затратам на транспортировку добавлены затраты на производство в пункте отправления, определим, в частности, нужные оптимальные объемы производства как суммы потоков из каждого пункта производства в реальные пункты потребления. Если в каком-либо пункте объем производства окажется равным нулю, то это означает, что строить предприятие в этом пункте нецелесообразно, а если оно уже имеется, то, возможно, выгоднее его закрыть.

Модель, которую мы рассматриваем, используется на практике как для текущего планирования производства, так и для размещения предприятий при развитии отрасли. В последнем случае в затратах учитываются также и необходимые капиталовложения (затраты на строительство или реконструкцию имеющихся предприятий).

Рассчитанный таким путем оптимальный план развития отрасли, когда одновременно и совместно рассматривается вопрос о размещении и производственной программе всех ее предприятий, оказывается значительно более эффективным, чем план, полученный в результате изолированного экономического анализа по отдельным предприятиям.

На основе этой модели произведено большое число расчетов плана развития отраслей как по стране в целом, так и по отдельным крупным экономическим районам (Сибири, Казахстану и др.). В частности, такие расчеты по размещению и развитию отраслей проведены по производству цемента, ряда других строительных материалов, многим химическим производствам и т. д. Большое значение имеет ряд расчетов по топливно-энергетическому балансу, т. е. по определению рациональной структуры потребления и производства разных видов топлива, а также районов их распространения.

Как правило, эти расчеты базировались на приведенной выше модели, однако учет ряда дополнительных обстоятельств (например, различия эффективности разных видов топлива при том или ином использовании, наличие уже начатых работ по строительству предприятий и др.) заставлял вносить в эти модели различные коррективы и усложнения. Далеко не простыми и не бесспорными являются вопросы подбора необходимой для реализации этих моделей технико-экономической информации.

Несмотря на указанные трудности, эти расчеты вызвали значительный интерес, так как они открывают перспективу значительного экономического эффекта. Как показывает опыт, в частности полученный в Сибирском отделении АН СССР, с помощью таких расчетов обычно обнаруживаются возможности снижения объема капиталовложений не менее чем на 10—20%. В связи с этим принято решение при подготовке следующего пятилетнего плана такие расчеты проводить по большинству отраслей хозяйства.

3. Задача о назначениях. Другой интересный пример представляет так называемая задача о назначениях, также «укладывающаяся» в рамки транспортной задачи.

Пусть имеется n самолетов различных типов, которые требуется распределить между n авиалиниями. Известен ожидаемый эффект C_{ij} от использования i-го самолета на j-й авиалинии, измеряемый, например, количеством обслуженных пассажиров. Задача состоит в таком назначении самолетов на линии, чтобы суммарный эффект от использования всех самолетов был максимальным, т. е. максимизируется число обслуженных пассажиров.

Если ввести переменные x_{ij}, определяемые формулой

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i\text{-й самолет назначен на } j\text{-ю линию;}\\ 0, & \text{если самолет не назначен, то}\end{cases}$$

математическая модель задачи может быть записана так:
найти

$$\max\left\{\sum_{ij=1}^{n} C_{ij}x_{ij}\right\}$$

(суммарный эффект)

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad \text{(на каждую линию назначается один самолет),}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad \text{(на каждый самолет приходится одна авиалиния).}$$

Условие $x_{ij}=1$ или 0, вообще говоря, сильно усложняет задачу и делает невозможным непосредственное применение методов линейного программирования. Далее мы будем специально рассматривать такие задачи в параграфе, посвященном целочисленному программированию. Что же касается задачи о назначениях, то для нее доказано, что можно заменить условие $x_{ij}=1$ или 0 на более простое $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$. Точнее говоря, если мы будем, как обычно, применять алгорифм решения транспортной задачи, то в данном случае он автоматически приведет к целым x_{ij}, т. е. к решению задачи в ее первоначальной постановке. Таким образом, оказывается, что задача о назначениях также, по существу, описывается моделью транспортной задачи.

Можно привести много других случаев, когда реальная, возникающая на практике ситуация приводится к решению задачи о назначениях: распределение работ между различными лицами, выполнение заданий на станках и т. п. Упомянем в заключение еще одну шуточную задачу о назначениях (Marriage Problem), предложенную в статье американского математика Халмоша.

Пусть имеется группа, состоящая из десяти холостяков и десяти потенциальных невест. После короткого периода ухаживания они решают сочетаться браком. Известна ожидаемая «мера счастья» C_{ij} от союза i-го холостяка с j-й невестой. Задача состоит в таком распределении холостяков между невестами, чтобы общая «мера счастья» для всей группы была максимальной. Можно показать, что математическая модель этой задачи имеет следующий вид:
найти

$$\max\left\{\sum_{i,j=1}^{10} C_{ij}x_{ij}\right\}$$

общая мера счастья

при условиях

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij}=1 \quad \text{(каждой невесте достается один холостяк);}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1 \quad \text{(каждому холостяку достается одна невеста).}$$

Снова транспортная задача!

Оказывается, что даже матримониальные проблемы в настоящее время не застрахованы от проникновения математики.

§ 3. Задача о выборе производственной программы [1]

Одним из важнейших вопросов, возникающих при конкретном экономическом анализе производства, является вопрос о выборе и распределении производственной программы. Этот вопрос может быть решен очень многими способами — одно и то же изделие можно изготавливать на различных предприятиях, можно изменять на каждом из них объемы плановых заданий и т. п. Естественной поэтому является задача выбора такой производственной программы для каждого предприятия, которая учитывала бы его специфику, т. е. предприятие использовалось бы для выпуска таких изделий, которые на нем целесообразнее всего изготавливать, и в результате общий эффект был бы наибольшим или общие затраты были бы минимальными. Такой математический подход может и должен заменить часто еще встречающуюся механическую разверстку программы, случайное распределение, волевые решения научно обоснованным распределением производственной программы между предприятиями. После констатации важности задачи приступим к описанию модели распределения программы, применимой при перечисленных ниже условиях.

Имеется m предприятий, на которых нужно произвести n продуктов в заданном ассортименте $l_1, l_2, \ldots l_n$. Известна производительность a_{ij} i-го предприятия в единицу времени, если оно выпускает j-й продукт. Предполагается, что $\max\limits_i a_{ij} > 0$, т. е. каждый продукт может производиться хотя бы на одном предприятии. Требуется составить программу работы предприятий (указать долю времени, отведенную на производство каждого продукта на данном предприятии), причем так, чтобы получить максимальную суммарную продукцию в заданном ассортименте в единицу времени. Иначе говоря, имеется в виду случай, когда продукция дефицитна, производственные мощности ограничены и должны полностью использоваться.

Обозначим через x_{ij} ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n_n$) долю рабочего времени i-го предприятия, отводимую под j-й продукт. Поиск оптимальной программы загрузки предприятий сводится к решению следующей задачи: найти числа x_{ij} из условий:

1. $x_{ij} \geqslant 0$ (доля времени не может быть отрицательной);

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1$ (сумма всех долей не превосходит полного времени работы предприятия);

3. $y_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$ (количество j-го продукта, произведенное на всех предприятиях);

$Z = \min\limits_j \frac{y_j}{l_j}$ (количество ассортиментных наборов продуктов);

Z—достигаетм аксимума.

Для приведенной задачи оптимальный план существует, так как всегда имеется допустимый план.

---

[1] Эта задача была первой практической задачей линейного программирования, решенной в СССР в 1939 году в работе одного из авторов этой брошюры.

На основании общей теоремы линейного программирования, о которой мы уже упоминали выше, оптимальный план характеризуется тем, что существуют оценки q_1, $q_2, \ldots, q_n$ для производимых продуктов (точнее, работы по их изготовлению, т. е. чистой продукции) и $d_1, d_2, \ldots, d_m$ для рабочего времени различных предприятий такие, что

$$q_j a_{ij} = d_i, \text{ если } x_{ij} > 0$$

(если i-е предприятие выпускает j-й продукт, то оценка полученного в единицу времени продукта равна оценке единицы времени этого предприятия);

$$q_j a_{ij} \leqslant d_j,$$

если $x_{ij} = 0$
(если i-е предприятие не выпускает j-го продукта в оптимальном плане, то оценка продукта, который можно было бы получить в единицу времени на этом предприятии, не превосходит оценки единицы времени i-го предприятия);

$$q_j = 0, \text{ если } y_j > l_j z$$

(если продукт избыточен, то его оценка равна нулю. Разумеется, избыточность продукта понимается только в рамках данной задачи. Избыточный продукт — это продукт, произведенный в объеме, превышающем ассортиментный, нереализуемый);

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{если } d_i > 0$$

(если оценка единицы рабочего времени предприятия положительна, то предприятие занято все установленное время).

По сути, все это означает, что оптимальный план характеризуется тем, что каждое предприятие используется для выпуска именно тех продуктов, которые на нем производить наиболее целесообразно, т. е. на каждом предприятии принят к производству тот вид продукции, для которого оценка чистой продукции предприятия оказывается наибольшей, а каждый вид продукции изготовляется на том предприятии, оценка расхода времени которого наименьшая, иначе говоря:

$$\text{если } x_{ij} > 0, \text{ то } a_{ij} q_i = \max_s a_{is} q_s = d_i \text{ и } q_j = \min_i \frac{d_i}{a_{ij}}.$$

Можно охарактеризовать оптимальный план и с точки зрения затрат на его реализацию. Если предполагать (это довольно реально), что все затраты на выпуск продукции составлены из двух частей — из затрат, не зависящих от того, где выпускается данный продукт (материальные затраты), и затрат на работу предприятия, не зависящих от вида производимой на нем продукции, — то можно утверждать, что оптимальный план дает минимально возможные затраты на весь комплексный выпуск продукции. Это совершенно очевидно. Поскольку за данный период производится, согласно оптимальному плану, наибольшее число комплектов, то по другому плану для выполнения того же числа комплектов потребуется больший срок, следовательно, часть затрат, связанных с работой предприятий, возрастет, а материальные затраты будут те же самые.

Раз уж мы коснулись вопроса о затратах и показали, что для оптимального плана они минимальны, целесообразно подробнее рассмотреть структуру цен произведенных продуктов и ввести в связи с этим понятие прокатной оценки, чрезвычайно важное как при формировании цен, так и вообще в планово-экономическом анализе. Рассмотрим такую часто встречающуюся реальную ситуацию.

На двух предприятиях изготавливается (считаем для удобства — в одинаковых количествах) один и тот же продукт, но одно из них оснащено самой современной техникой, а второе — устаревшей, однако и его работа с учетом потребного объема продукции является оправданной. Конечно, затраты на производство на первом предприятии будут меньше, чем на втором, цена же, по которой продукт продается, естественно должна быть одна и та же. Таким образом, работники первого предприятия будут в более выгодном положении, чем работники второго; предприятие будет намного рентабельнее, его работников будут отличать и поощрять, хотя их заслуга в этом не так уж велика — лучшие результаты предопределены лучшими условиями. Для того чтобы избавиться от такой явно несправедливой и дезориентирующей оценки, целесообразно, чтобы предприятие, имеющее более совершенную технику, платило за ее использование государству. Эти отчисления, уравнивающие доходы по-разному оснащенных предприятий, и носят название прокатных оценок или ренты. В настоящее время они находят выражение в хозрасчете в виде платы за фонды, дифференцировании плана прибыли и др.

Значение математического подхода состоит здесь в том, что он дает возможность объективного научно обоснованного исчисления размера этих оценок (и платежей). Поясним принцип исчисления этих оценок и их взаимосвязь с ценами продукции. При подобном подходе естественно считать, что цена единицы продукта, определяемая полными затратами, состоит из трех частей: из затрат на материалы, затрат на работу предприятия, отнесенных к единице продукта, и чистого дохода предприятия, также отнесенного к единице продукта. Именно при такой структуре цены и правильно исчисленной норме дохода оказывается, что цена изделия одна и та же на всех предприятиях, на которых данное изделие целесообразно изготавливать.

Введем еще несколько обозначений. Пусть A_j — цена j-го продукта; C_j — материальные затраты в рублях на выпуск единицы j-го продукта; V_i — расход предприятия на функционирование в течение единицы времени; P_i — чистый доход предприятия. Тогда, если цены назначены исходя из соотношения

$$a_{ij}A_j=a_{ij}C_j+V_i+P_i, \tag{0}$$

то на i-м предприятии затраты на производство j-го продукта окупаются. Напротив, если бы в (0) вместо $=$ был знак $>$, то выпуск j-го продукта на i-м предприятии был бы сверхрентабельным, а если знак $<$, то недостаточно рентабельным. Нетрудно, опираясь на изложенный выше анализ задачи, на основе оптимального плана и его оценок показать, что имеются именно такие взаимно согласованные нормы дохода и цены, при которых для всех реально производимых видов продукции выполняется соотношение (0) и никакие более рентабельные возможности не упущены. Иначе говоря, оптимальный план полностью согласуется с хозрасчетом (детальнее это пояснено ниже на примере).

Именно такой обоснованно определенный уровень дохода — отдачи предприятия государству (прокатная оценка) — и должен быть принят за основу при исчислении платы за фонды, плановой рентабельности и других экономических показателей.

Понятно, что в нашей стране прокатная оценка предприятия (рента) имеет совершенно иное значение, чем прибыль, доход и рента в условиях капиталистического хозяйства. Там — это нетрудовой доход, который извлекается на основе частной собственности на средства производства. В условиях социалистического хозяйства — это средство объективной оценки возможностей предприятий, средство экономического уравнения продуктов труда, производимых в различных условиях, путь для достижения наиболее эффективного использования средств производства, их наилучшей отдачи.

В заключение этого параграфа приведем простой числовой пример. Три предприятия характеризуются следующими производственно-экономическими данными:

Таблица 8

Предприятие	Месячная производительность, в штуках		Месячные затраты (без материалов) в руб.	Себестоимость изготовления		Материалы на одно изделие, в руб.		Полная себестоимость, в руб.	
	Изделие *I*	Изделие *II*		Изделие *I*	Изделие *II*	Изделие *I*	Изделие *II*	Изделие *I*	Изделие *II*
А	4000	2000	44000	11	22	6	4	17	26
Б	6000	4000	60000	10	15	6	4	16	19
В	5000	5000	40000	8	8	6	4	14	22

В первых столбцах таблицы указана возможная производительность предприятия, если на нем будет поставлено производство либо первого, либо второго изделия. Далее указаны затраты на работу каждого предприятия, которые не зависят от вида изделий. Нужно получить одинаковое число первых и вторых изделий. Требуется составить оптимальный план загрузки предприятий, т. е. указать для каждого из них, сколько месяцев в году каждое предприятие выпускает первое изделие и сколько второе.

Это задача рассмотренного вида, но в данном случае, когда всего два изделия, совсем легко сообразить, как составить оптимальный план. Так как на предприятии *А* вместо одного второго изделия можно изготовить два первых, а на предприятиях *Б* и *В* соответственно полтора и одно первое изделие, то первое изделие целесообразнее всего производить на предприятии *А*, второе изделие — на предприятии *В*, а время работы предприятия *Б* разделить между этими изделиями. Отсюда ясно также, что оценки для изготовления изделий в оптимальном плане относятся как 2 : 3. Этот оптимальный план дан в табл. 9, а приведенный в ней расчет чистой продукции по оценкам обосновывает его оптимальность.

В оптимальном плане на каждом предприятии производятся изделия, которые для него более выгодны. Соответствующие оптимальному плану оценки месячной продукции в таблице подчеркнуты.

Предположим, что установленная оптовая цена комплекта изделий (первого плюс второго) равна 40 руб., а затраты материалов на одно изделие равны соответственно 6 и 4 руб. Тогда цена изготовления комплекта должна быть принята равной 40—6—4=30 руб. Поскольку оценки изготовления первого и второго изделий относятся как 2 : 3, то цены изготовления каждого изделия должны равняться 12 и 18 руб. Теперь можно определить цену каждого изделия, так как она складывается из материальных затрат и затрат по изготовлению, т. е. $A_1=6+12=18$ руб., $A_2=4+18=22$ руб.

Таблица 9

Предприятия	Работа предприятия, в месяцах		Годов. производствен. программы, (тыс. шт.)		Месячная чистая продукция по условным оценкам (2 : 3), условн. ед.	
	Изделие *I*	Изделие *II*	Изделие *I*	Изделие *II*	Изделие *I*	Изделие *II*
А	12	—	48	—	<u>8000</u>	6000
Б	6	6	36	24	<u>12000</u>	<u>12000</u>
В	—	12	—	60	10000	<u>15000</u>

Если учесть, что цена изготовления каждого изделия определяется затратами по изготовлению и запланированным доходам с одного изделия, то доход каждого предприятия без труда может быть рассчитан (см. табл. 10).

Итак, чистый доход предприятий составляет $P_1=4000\ p$ (для первого предприятия), $P_2=1200\ p$ (для второго предприятия) и $P_3=50\,000\ p$ (для третьего предприятия). Например, для предприятия *А* чистый доход

$$P_1=4000\cdot18-4000\cdot11-4000\cdot6=4000 \text{ руб. в месяц}$$ [1].

Именно на основе этих нормативов дохода при рациональном использовании предприятий и рациональных ценах (сведенных в табл. 10) целесообразно строить экономические показатели работы предприятий, дифференцированную плату за фонды, план прибыли и т. д. В этом случае, как мы видим, соответствующие оптимальному плану решения выгодны предприятиям, увязываются с хозрасчетом, нерациональные же невыгодны. На основе этих показателей могут приниматься правильные оперативные решения при появлении новых возможностей, не предусмотренных планом. Например, обнаружена возможность дополнительного выпуска вторых изделий на предприятии *В* за счет использования менее производительных станков или применения способа с затратами 12 руб. вместо 8 руб. на изготовление од-

[1] Смысл этих величин (норма дохода) состоит в том, что это тот вклад в общий доход, который может быть получен от данного предприятия за один месяц (т. е., если предприятие будет работать лишний месяц, мы получим эту сумму). Иначе говоря, если бы могли предприятие А получить для использования дополнительно на один месяц (взять на прокат), то наш комплекс мог бы дать дополнительный доход в 4000 руб. Отсюда следует и упоминавшийся выше термин прокатная оценка,

Таблица 10

Предприятие	Месячные затраты на работу предприятия, в руб.	Месячная прокатная оценка	Затраты на единицу изделия, в руб.							
			Изделие I				Изделие II			
			Затраты по изготовлению	Доход с одного изделия	Материальные затраты	Полные затраты	Затраты по изготовлению	Доход с одного изделия	Материальные затраты	Полные затраты
А	44000	4000	11	1	6	18	22	2	4	28
Б	60000	12000	10	2	6	18	15	3	4	22
В	40000	50000	8	10	6	24	8	10	4	22

ного изделия. Ясно, что использование этих возможностей целесообразно, так как эти затраты все же ниже 18 руб. — рассчитанной цены на изготовление, и за счет этого может быть повышен выпуск общей продукции и увеличен доход комплекса предприятий. Если бы мы исходили из показателя себестоимости, то это мероприятие пришлось бы отвергнуть.

Помимо изложенной модели распределения программы, возможны и различные другие, учитывающие иные условия или дополнительные факторы и усложняющие обстоятельства. Например, если потребный объем продукции задан и полной загрузки всего оборудования (открытая задача) не требуется, то проблема состоит в распределении программы, при которой потребная продукция получалась бы с наименьшими затратами.

И для этих других постановок, и для более сложных моделей задача также обычно решается методами линейного (впрочем, иногда и нелинейного) программирования и, наряду с планом, на основе связанных с ним оценок, строится система экономических показателей и хозрасчета, согласованная с этим планом. Конечно, этот математико-экономический анализ строится не стандартно, а требует творческого подхода.

Мы привели экономический анализ модели с простейшими условиями, однако качественная сторона выводов остается справедливой и для более сложных задач. В качестве одного из многих примеров практического применения таких моделей можно упомянуть проведенный Институтом математики СО АН СССР совместно с металлургическими институтами и Союзглавметаллом расчет рациональной загрузки прокатных станов СССР — размещения заказов на трубы, мелкий и средний сортамент и другие виды проката. Оказалось, что при имеющемся сейчас оборудовании только за счет правильного распределения заказов можно получить проката на 5—6% больше по каждой из рассмотренных групп, при этом объем перевозок также не увеличивается. Несмотря на большие размеры задачи (тысячи ограничений и десятки миллионов способов), благодаря специальным приемам расчет выполняется за несколько часов машинного времени.

§ 4. Модель размещения сельскохозяйственного производства

Сельскохозяйственное производство является одной из наиболее плодотворных и перспективных областей применения оптимального и, в частности, линейного программирования. Именно в этой области математические методы могут в сравнительно короткий срок дать очень большой эффект. Объясняется это прежде всего гораздо большей по сравнению с промышленностью однородностью сельскохозяйственных предприятий и самих процессов сельскохозяйственного производства. Здесь имеется сравнительно ограниченное число видов продукции, различных средств производства, технологических процессов и т. п. В то же время, решение задачи сельскохозяйственного планирования зачастую сложнее, чем решение задач, возникающих в промышленности, так как приходится учитывать различные природные условия, календарные сроки, стохастический (случайный) характер некоторых величин (например, количество влаги, выпавшей на почву). Как это ни парадоксально, но именно из-за этих осложняющих факторов можно ожидать значительного преимущества математических оптимальных решений по сравнению с теми, которые дают практика и опыт. Действительно, если бы эти задачи были простыми, то благодаря многолетнему опыту они бы, вероятно, сейчас уже решались оптимально или почти оптимально.

Рассмотрим простейшую модель размещения сельскохозяйственного производства. Имеется m видов земельных участков, качественно отличающихся друг от друга. Хозяйство планирует возделывание n видов культур, причем полученная продукция должна находиться в соотношении $l_1 : l_2 : \ldots : l_n$. Предполагаются известными числа a_{ij} (урожайность) — число центнеров продукции j-й культуры, которое можно получить с i-го участка. Требуется определить, какую часть каждого участка под какую культуру нужно отвести, чтобы получить максимальное число ассортиментных наборов продукции. Обозначая через x_{ij} долю i-го участка, отводимую под j-ю культуру, приходим к следующей задаче. Найти величины x_{ij} из условий:

1. $x_{ij} \geqslant 0$ (доля участка не может быть отрицательной);

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1$ (сумме долей i-го участка, отводимых под различные культуры, не превосходит единицы);

3. $y_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} x_{ik}$ (объем продукции k-й культуры, полученной на всех участках);

$Z = \min_j \frac{y_j}{l_j}$ (число ассортиментных наборов продуктов);

Z — достигает максимума.

Нетрудно заметить, что мы пришли в точности к той же самой модели, что и в задаче о выборе производственной программы. Здесь снова проявилась замечательная особенность математики, с которой мы уже неоднократно сталкивались,— одна и та же математическая модель описывает совершенно различные явления.

В качестве полезного упражнения можно порекомендовать читателю «перевести на сельскохозяйственный язык» иллюстративный пример из предыдущего параграфа, сохранив все числовые данные. Отличия здесь имеются только в наименовании (размерностях) величин.

Если рассматривать задачу размещения сельскохозяйственного производства более полно, учитывая урожайность в течение ряда лет, влияние севооборотов, возможность искусственного орошения отдельных участков и т. п., то соответствующие математические модели будут более сложными. Изучаются и более полные модели, где различные отрасли сельскохозяйственного производства — растениеводство, животноводство, технические культуры — рассматриваются в комплексе. Все они остаются, как правило, в рамках линейного программирования. Эти модели применимы в различных масштабах — от бригады и хозяйства до области, республики и всей страны.

В качестве практического применения математических методов в планировании сельскохозяйственного производства укажем расчеты, проведенные для совхозов «Семеновод» и «Бийский» Алтайского края с участием математико-экономического отдела Института математики СО АН СССР. В результате этих расчетов были найдены планы размещения сельскохозяйственных культур, а также разработаны наиболее выгодные виды специализации для каждого хозяйства. Проводились также расчеты рационального размещения сельскохозяйственного производства по зонам Новосибирской и Омской областей.

Разумеется, возможно и дальнейшее приближение модели к действительности, например учет погодных факторов, возможного спроса на сельскохозяйственную продукцию и др. В этом случае модель перестает быть линейнопрограммной, и для ее исследования требуется новый математический аппарат. Мы коснемся этого вопроса в следующей главе.

Несколько слов об экономическом смысле оценок для задачи о размещении сельскохозяйственного производства. Подобно прокатным оценкам предприятий в предыдущем параграфе, здесь получаются оценки различных участков земли, позволяющие соизмерять и сопоставлять затраты, возникающие при производстве одной и той же продукции на землях разного качества. На базе этих оценок может быть обоснованно исчислена рента на землю различных по качеству участков.

Она имеет в вопросах планирования сельскохозяйственного производства не меньшее значение, чем оценка производственных фондов в промышленности. Учет ренты за землю в цене продукции позволяет прежде всего экономически уравнять условия производства для различных районов. Действительно, только рентные отчисления могут позволить получить равную оценку результатов при равном труде в хозяйствах, расположенных на Северном Кавказе и в Коми АССР. Рента не только на землю, но и на леса, охотничьи угодья, рыбные водоемы и т. п. стимулирует рациональное использование этих природных богатств, служит экономическим рычагом, предотвращающим бесхозяйственное к ним отношение. В самом деле, станет ли колхоз или совхоз допускать заиливание рыбного водоема, если он платит за него ренту?

Мы рассматривали задачу размещения на уровне отдельного хозяйства. Еще больший эффект она может дать в применении к целой области или даже республике. В последнем случае в результате решения получается не только целесообразный план размещения, но и данные для такого установления дифференциации цен и платежей, чтобы в каждом районе наиболее рациональные для посева культуры оказывались и наиболее выгодными. Учет природных условий и введение ренты в экономической оценке сельскохозяйственного производства являются общепризнанными. Ее основные положения даны в теории ренты К. Маркса. Таким образом, оптимальное программирование дает средство исчисления ренты в сложных условиях современного сельскохозяйственного производства и тем самым облегчает возможность ее эффективного использования в планировании и хозрасчете.

Не меньшее значение, чем земельная рента, имеет «горная» рента на минеральное сырье (руда, нефть, газ).

§ 5. Определение наилучшего состава смеси

Исторически одной из первых задач, решенных методами линейного программирования, явилась задача о выборе диеты. Однако, прежде чем говорить о результатах решения, построим, как обычно, соответствующую математическую модель.

Пусть нам известно содержание необходимых для человека питательных веществ в различных продуктах. Если известна цена единицы каждого продукта, то, естественно, возникает задача: выбрать рацион — набор пищевых продуктов — так, чтобы каждое из питательных веществ содержалось в нем в необходимом количестве, обеспечивающем нормальную жизнедеятельность, и, кроме того, чтобы затраты на этот рацион были минимальными.

Введем условные обозначения:

m — число различных необходимых питательных веществ;

n — число пищевых продуктов;

a_{ik} — количество единиц i-го питательного вещества, содержащееся в единице k-го вида продукта;

b_i — суточная потребность в i-м питательном веществе;

C_k — стоимость единицы k-го вида продукта;

x_k — количество единиц k-го вида продукта, используемое в рационе и подлежащее определению.

Планом является совокупность величин $x_1, x_2, ..., x_n$, которые должны удовлетворять следующим условиям:

1. $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$

(количество какого-нибудь продукта, содержащегося в рационе, не может быть отрицательным);

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m$

(общее количество i-го питательного вещества в данном рационе не ниже заданного b_i).

Целевая функция задачи совпадает с затратами на реализацию плана и есть

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i.$$

Как уже было сказано выше, именно эта задача была решена впервые в США симплекс-методом линейного программирования. В использовавшейся модели требовалось из 77 видов пищи составить такой рацион, чтобы при минимальной стоимости он все же удовлетворял потребности в девяти необходимых для жизни питательных веществах. Оптимальная диета, как выяснилось, состояла лишь из девяти следующих продуктов: муки, кукурузы, сгущенного молока, растительного масла, сала, говяжьей печени, капусты, картофеля и шпината. Разумеется, такой рацион, хотя и поддерживает жизнь, все же может быть рекомендован только как очень суровая мера наказания. Для того чтобы избавиться от недостатков этого рациона, в модель следует ввести добавочные требования, выполнение которых потребует заведомо большего, чем девять, числа продуктов.

Если можно соглашаться или не соглашаться с целесообразностью использования линейного программирования при расчете рациона человека, то уже сейчас можно указать ситуации, когда эта целесообразность бесспорна. Приведем три примера, в которых экономичности при составлении смеси отдается предпочтение перед вкусами.

Определение оптимального состава животноводческих кормовых смесей, состоящих, как правило, из небольшого числа продуктов, может очень хорошо осуществляться методами линейного программирования. И не только может! Фермеры США приглашают за большое вознаграждение математиков для составления рационов и расчета севооборотов. И не из любви к математике, а потому, что игнорирующим математические методы при решении подобных вопросов угрожает разорение — невозможность выдержать конкуренцию с передовыми фермерами.

Другой пример. Для получения легированной стали нужно использовать шихту определенного химического состава. Так как многие ингредиенты весьма дорогостоящи, а задача осложняется тем, что в состав шихты входят чугуны, лом, отходы с определенным известным содержанием этих присадок, то, естественно, возникает задача о выборе состава шихты, имеющей в заданных количествах необходимые химические вещества, стоимость которой была бы минимальной. Математическая модель этой задачи та же, что была описана раньше.

Наконец, последний пример. Бензины разных сортов получаются путем смешивания нефтепродуктов, имеющих различные технические характеристики. Заданные показатели качества бензина (октановое число, степень очистки и др.) должны выдерживаться весьма точно, так как для потребителя они играют важную роль. От того, какие нефтепродукты при этом смешиваются, зависит рентабельность производства. Требуется построить такой план смешивания нефтепродуктов, который обеспечивал бы максимальную рентабельность производства, позволяя в то же время получать бензины заданных сортов в нужных пропорциях.

§ 6. Общие модели производственного планирования

Ранее мы рассмотрели приложение линейного программирования к некоторым частным линейным экономическим моделям. При этом выяснилось, что задачи поиска оптимального решения в таких моделях охватываются общей схемой линейного программирования и на основе ее может быть произведен анализ задачи, даны эффективные средства нахождения оптимального решения, помимо оптимального плана найдены о. о. оценки различных ингредиентов (производственных факторов, продукции), которые служат основой эффективного экономического анализа и совершенствования плана. Опираясь на опыт исследования этих частных задач, мы хотим дать описание некоторых общих схем применения оптимального математического программирования в планово-экономическом анализе.

Прежде всего в планировании существенно различаются задачи текущего и перспективного планирования. В первом случае речь идет о составлении плана на сравнительно краткий промежуток времени при определенных, более или менее неизменных условиях — используемых производственных процессах, ресурсах средств производства, требованиях к продукции. В перспективном планировании речь идет о составлении плана на сравнительно длительный период времени при существенных изменениях как в условиях, так и ресурсах, т. е. говорится о схеме расширенного воспроизводства, когда меняется сама производственная база благодаря появлению новых производственных фондов и начинают играть роль долговременные решения об их создании и использовании. В соответствии с этим необходимы различные модели для задач того и другого типа.

Далее, в самом текущем планировании значительно разнится задача составления плана всего народного хозяйства, т. е. замкнутой экономической системы, располагающей всеми своими производственными ресурсами, определяющей и удовлетворяющей потребности общества (личные и общественные), и плана некоторого отдельного хозяйственного подразделения (предприятия, фирмы, комбината, экономического района). Экономика такого хозяйства является уже незамкнутой, ее функционирование рассчитано на получение ряда ингредиентов (сырья, материалов) извне и выдачу большой части продукции также внешним потребителям.

Наконец при наличии комплекса хозяйств возникает проблема взаимосогласованных их действий для достижения оптимальных результатов всего комплекса.

Далее мы кратко опишем три модели и наметим возможности и особенности использования линейнопрограммного анализа при их исследовании и расчете, хотя некоторые важные проблемы здесь еще находятся в стадии разработки.

Задача текущего производственного планирования. Как мы условились сначала, эта задача будет рассмотрена для некоторого хозяйственного подразделения, например предприятия. Задача текущего планирования состоит в том, чтобы исходя из определенных ресурсов, которыми располагает предприятие (оборудование, рабочая сила, сырье), с учетом реальных условий и ограничений (на поставку сырья и материалов и т. п.), заказов и требований на продукцию определить производственную программу и разработать организацию ее выполнения, чтобы осуществить ее с наилучшими результатами.

При построении математико-экономической модели этой задачи ряд вопросов должен быть детализирован и уточнен — прежде всего основные ингредиенты (виды материалов, продукции, оборудования, рабочей силы), принятая степень их объединения (агрегирования), имеющиеся ресурсы и ограничения, технологические и организационно возможные производственные способы, затрачиваемые и получаемые ингредиенты,— все, что определяет матрицу задачи. Следует отметить различие между расходуемыми ингредиентами (сырье, полуфабрикаты) и используемыми только лишь в течение определенного времени (оборудование, земля). Очень важным является задание по конечной продукции, которое по некоторым видам может быть точно зафиксировано, по другим — задано в определенных пределах, по третьим — связано с требованием комплектности, по некоторым — может целиком определяться самим предприятием. Различный вид могут иметь ограничения на сырье и материалы — жесткие лимиты и лимиты, зависящие от объема выпуска продукции. Очень существенно разделение ингредиентов на специфические для данного предприятия (установленное оборудование, полуфабрикаты) и на ингредиенты, участвующие во внешних связях (материалы, конечная продукция, привлекаемая рабочая сила). Наконец, очень важным и часто не бесспорным является принятие критерия оптимальности. Для сопоставления результатов, получаемых в различных планах (вариантах решения), основное значение имеют переменные ингредиенты, т. е. те, по которым в разных вариантах получаются различные результаты. Наибольшее значение имеют при этом внешние ингредиенты. Желательно для расходуемых ингредиентов добиваться минимума, а для производимых максимума. Однако, чтобы иметь возможность единого сравнения, они должны быть объединены в один критериальный показатель (целевую функцию). Типичными являются требования максимума продукции (наборов) при данных затратах, минимума затрат на данную продукцию (или одного вида затрат — труда), максимума прибыли. В последнем случае (и обычно в предыдущих) для такого сведения отдельные ингредиенты должны взвешиваться по некоторым ценам или баллам. От принятого критерия и оценок часто существенно зависит полученное решение, поэтому вопрос выбора критерия немаловажен и часто далеко не бесспорен. Лишь в немногих счастливых случаях (как в задаче о загрузке оборудования, рассмотренной в § 2) одно и то же решение дает и максимум продукции, и минимум затрат, и максимальный доход. Также не всегда ясными являются внешние условия — какие ресурсы могут быть предоставлены хозяйственному объекту и какие требования к нему предъявляются.

Приведенная схема описания задачи текущего планирования в одних случаях непосредственно делает ясной возможность ее записи в форме основной задачи линейного программирования, а в других случаях простыми приемами она сводится к этой задаче. Поэтому методы решения задачи позволяют производить расчет оптимального плана, а ее анализ дает о. о. оценки.

Эти оценки очень полезны при анализе и оперативном корректировании плана. Они показывают, какой вклад дает каждая единица продукции, полуфабриката, часа работы того или иного оборудования в критерий оптимальности, какова оценка каждого ограничения. Это позволяет не только выявлять, но и количественно оценивать узкие места производства, определять, за счет каких источников можно добиться наибольшего эффекта. Соотношения оценок позволяют выяснять влияние внешних ингредиентов на внутренние и т. д.

Производственный план комплекса. Социалистическое общественное производство несмотря на то, что оно составляет единую систему с едиными целями и задачами, организационно и структурно представляет собой комплекс ряда отдельных хозяйственных единиц — предприятий и различных объединений, имеет сложную структуру и иерархию. Поэтому, когда речь идет о плане для народного хозяйства в целом или для некоторого хозяйственного объединения, то собственно нужно иметь не один план, а целый комплекс взаимоувязанных планов.

Для определенности будем иметь в виду, что рассматриваются только две ступени — ряд предприятий и объединяющий их комплекс, замкнутый и автономный. Этот комплекс имеет ресурсы как жестко закрепленные за отдельными предприятиями, так и по некоторым ингредиентам (в целом или в определенной части) находящиеся в распоряжении всего комплекса. Структуру или конкретное задание по конечной продукции для личных и общественных нужд комплекса будем считать известными. Структура потребления представляет отдельную проблему, которая вообще должна решаться совместно с производственным планом и также с помощью математических средств, но сейчас мы отвлекаемся от анализа этой проблемы и исходим из какого-то данного приемлемого решения ее.

Составить комплекс планов значит составить планы для всех предприятий, учитывающие имеющиеся ресурсы, заданную для всего комплекса конечную продукцию и взаимосогласование выпуска ее по отдельным предприятиям, т. е. должны быть предусмотрены сбалансированные материальные потоки между предприятиями, каждое из которых снабжается необходимыми затрачиваемыми ингредиентами за счет продукции других предприятий или из ресурсов всего комплекса. Кроме того, план всего комплекса должен быть оптимальным в смысле одного из возможных критериев.

Анализ этой задачи, которая также сводится к линейно-программной схеме, дает такое замечательное условие оптимальности комплекса.

Во-первых, план каждого предприятия сам по себе должен быть оптимальным с учетом (при фиксации) тех входных и выходных потоков, которые предусмотрены связями комплекса.

Во-вторых, в системе оценок оптимального плана каждого предприятия оценки внешних ингредиентов (участвующих в разных предприятиях) должны быть одни и те же, т. е. при оптимальном плане комплекса разные предприятия должны оценивать одни и те же ингредиенты одинаково.

Это дает и эффективный способ расчета подобного комплекса. Строя оптимальный план для каждого предприятия исходя из некоторой системы оценок для внешних ингредиентов (общих для комплекса), можно скорректировать оценки с тем, чтобы выровнять баланс по соответствующим ингредиентам (снижаем оценку, если он избыточен, и повышаем, если он недостаточен). После ряда исправлений приходим к сбалансированному и оптимальному плану. На этой экономической идее, реализованной в виде точного алгорифма, основан так называемый блочный метод или метод декомпозиции Данцига — Вульфа для решения задач линейного программирования большого масштаба.

Этот метод нахождения оптимального плана комплекса напоминает рыночный механизм — избыток продукта ведет к снижению цены и уменьшению выпуска его, так что постепенно устанавливается равновесие. Однако при определении оптимального плана этот механизм реализуется на вычислительной машине, т. е. много быстрее и без тех потерь, с которыми связано регулирование на рынке. Впрочем, в известных пределах этот плановый механизм может у нас эффективно сочетаться с рыночным.

Наряду с составлением плана комплекса возникает проблема оперативного управления и регулирования деятельности как комплекса в целом, так и отдельных предприятий, обеспечивающая эффективное выполнение плана. Эта научная проблема функционирования экономической системы в оптимальном режиме, в особенности ее математический анализ, лишь недавно поставлена на повестку дня в полном объеме. В качестве некоторых показателей для такого регулирования могут служить экономические показатели, построенные на базе оценок оптимального плана, показатель прибыли, построенный на этих оценках, плата за фонды в соответствии с прокатной оценкой. Однако это далеко не исчерпывает совокупности проблем, связанных с функционированием системы.

Многие из этих проблем остаются нерешенными, но и по отношению к ним ясно, что модельный математический подход в сочетании с обобщением практического опыта дает эффективный путь для научной постановки и анализа проблем.

Проблемы перспективного планирования, динамические модели. Несмотря на качественно иной характер проблемы перспективного планирования оказывается, что и для нее может быть использован тот же аппарат линейного программирования. При планировании на длительный период оказывается нужным разбить его на ряд временных интервалов, чтобы учесть динамику процесса. В такой динамической модели можно ввести те же ингредиенты, что и в статической (различные виды продукции, оборудования и т. д.), но для каждого интервала свои (уголь, добытый в 1968 году, нельзя сжечь в 1967!). Поэтому число ингредиентов резко возрастает. Это относится и к производственным способам. Наряду с прежними видами способов, действующими в пределах одного временного интервала, появляются способы, затрагивающие ряд интервалов, например строительство предприятия и последующее его использование. Возможность создания новых средств производства позволяет вводить на последующих этапах новую технологию, учитывать достижения технического прогресса, чрезвычайно увеличивает число возможных технологических способов производства и приводит к появлению разных вариантов решений; все это делает особенно эффективным нахождение оптимального решения. Постановка задачи имеет сходный вид с задачей текущего планирования, однако здесь ограничений меньше. Они относятся к запасам и оборудованию в начальный момент и лишь к немногим ресурсам на весь период (ресурсы труда из демографических условий, природные ресурсы); развитие производственных фондов, состав продукции определяются в самом плане. Критерием оптимальности является математически оформленное требование лучшего удовлетворения потребностей в течение планируемого периода и хорошие потенциальные возможности дальнейшего роста к концу периода — в забалансовый период. Поскольку получается опять линейно-программная модель, ее сопровождает двойственная задача и определяются оценки для всех ингредиентов (свои для каждого периода). Таким образом, в результате анализа получается возможность объективного сравнения не только разнокачественных, но и разновременных затрат и эффектов.

Наряду с такой общей динамической моделью рассматриваются и более частные и упрощенные — модели развития отрасли, модели с более простой структурой способов (модель Неймана), с крупноагрегированными ингредиентами (однопродуктовая и двухпродуктовая модели). Эти модели допускают более упрощенный расчет и анализ. Для них проведено глубокое качественное исследование.

Таким образом, в перспективном планировании, в частности в оптимальном, математические модели также являются весьма эффективным средством анализа, хотя в этой области остается еще больше трудностей и нерешенных проблем.

Глава III

НЕСКОЛЬКО ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, НЕ УКЛАДЫВАЮЩИХСЯ В РАМКИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Динамическое программирование

В пятидесятых годах нашего века появились первые работы, посвященные изучению многошаговых процессов принятия решений. Оказалось, что для этого хотя и не очень широкого, но часто встречающегося класса задач ни методы классического математического анализа, ни аппарат линейного программирования, ни, наконец, вариационное исчисление не дают достаточно эффективных средств решения. Требовалось создать концепцию, которая позволяла бы с единой точки зрения исследовать вопросы многошагового принятия решений.

Такая концепция, получившая название *динамического программирования,* была создана американским математиком Р. Беллманом и его школой и оказалась весьма эффективной для анализа и численного решения этого типа задач. Прежде чем описывать ее сущность, как обычно, начнем с очень простой задачи, которая позволит тем не менее познакомиться с характерными чертами динамического программирования.

Пусть требуется загрузить самолет грузоподъемностью W грузом, состоящим из предметов N различных типов. Введем следующие обозначения:

P_i — вес одного предмета i-го типа;
V_i — стоимость предмета i-го типа;
x_i — число предметов i-го типа, загружаемых в самолет.

Поставим вопрос о загрузке в самолет груза максимальной ценности, тогда приходим к следующей экстремальной задаче:

Найти

$$\underbrace{\max \sum_{i=1}^{N} x_i V_i}_{\text{ценность груза}}$$

при условиях

1. $\sum_{i=1}^{N} x_i P_i \leqslant W$ (вес груза не превышает грузоподъемности самолета)
2. $x_i = 0, 1, 2, \ldots$ (предметы неделимы).

Если бы не второе условие, полученная задача относилась бы к уже хорошо знакомым нам задачам линейного программирования. Наличие же его делает методы линейного программирования неприменимыми (подробнее об этом см. § 3).

Для того чтобы лучше понять схему решения, будем описывать ее в терминах рассматриваемой задачи, т. е. на языке «загрузки самолета». При этом для нас выгодно сразу обобщить задачу — рассматривать ее не для заданной грузоподъемности самолета, а для произвольной грузоподъемности W.

Вначале будем загружать самолет только предметами первого типа. Тогда максимальная стоимость груза (обозначим ее $f_1(W)$) определяется так:

$$f_1(W) = \max\{x_1 V_1\}$$

при условиях

$1'. x_1 P_1 \leqslant W$

$2'. x_1 = 0, 1, 2, \ldots$

Так как $x_1 \leqslant \frac{W}{P_1}$, а для нахождения максимума нужно x_1 взять возможно бо́льшим, то сразу ясно, что $x_1 = \left[\frac{W}{P_1}\right]$ и

$$f_1(W) = \left[\frac{W}{P_1}\right] V_1 -$$

график ее ступенчатая линия (пунктирная линия на рис. 10) [1].

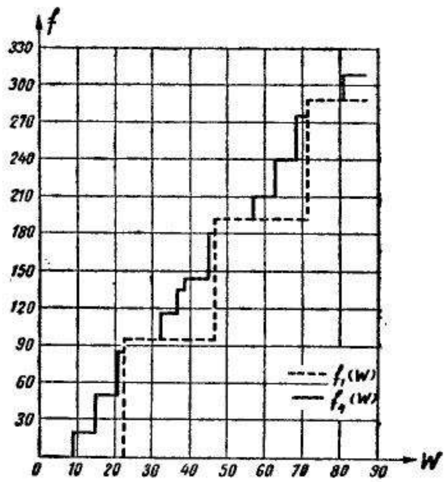


Рис. 10

Итак, мы знаем, чему равна максимальная стоимость груза, если вся грузоподъемность W расходуется на груз первого типа. Будем рассматривать теперь загрузку предметами первого и второго типов, обозначая максимальную стоимость в этом случае через $f_2(W)$. Если предметов второго типа взято x_2, то предметов первого типа по весу самолет может взять не более чем $W - x_2 P_2$. Из сказанного выше максимальная стоимость их равна $f_1(W - x_2 P_2)$, а общая стоимость загрузки в этом варианте будет $x_2 V_2 + f_1(W - x_2 P_2)$. Остается определить x_2. Ясно, что величина $f_2(W)$ — максимальная стоимость груза, состоящего из предметов первого и второго типа, определяется как максимум для всех вариантов выбора x_2 — формулой

$$f_2(W) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant \left[\frac{W}{P_2}\right]} \{x_2 V_2 + f_1(W - x_2 P_2)\}.$$

Продолжая аналогично, т. е. всякий раз к уже имеющимся добавляя предметы еще одного типа, через N шагов придем к такому соотношению:

$$\underbrace{f_N(W)}_{\substack{\text{максимальная}\\ \text{стоимость гру-}\\ \text{за, состоящего}\\ \text{из предметов}\\ N \text{ типов}}} = \max_{0 \leqslant x_N \leqslant \left[\frac{W}{P_N}\right]} \underbrace{\{x_N V_N +}_{\substack{\text{стоимость взятых}\\ \text{предметов } N\text{-го типа}}} \underbrace{f_{N-1}(W - x_N P_N)\}}_{\substack{\text{максимальная стои-}\\ \text{мость груза, состоя-}\\ \text{щего из предметов}\\ (N-1)\text{-го типа с}\\ \text{общим весом не более}\\ W - x_N P_N}}$$

[1] Выражение $\left[\frac{W}{P_1}\right]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{W}{P_1}$.

Из полученных рекуррентных соотношений без труда могут быть последовательно найдены функции $f_1(W)$, $f_2(W), \ldots, f_N(W)$, а вместе с ними численное решение поставленной задачи. Поясним его на числовом примере. Пусть $W=83$, а веса и стоимость предметов равны соответственно

$$P_1=24,\ P_2=22,\ P_3=16,\ P_4=10,$$
$$V_1=96,\ V_2=85,\ V_3=50,\ V_4=20.$$

Так как функции $f_k(W)$ потребуются нам для различных значений W (вычисляя $f_N(W)$, нужно знать $f_{N-1}(W-x_N\cdot P_N)$, исходя из чего будем вычислять их последовательно одну за другой при различных значениях W, фиксируя количество предметов каждого типа, погружаемых в самолет.

Результаты этих вычислений сведены в таблицу 11. Поясним, например, предпоследнюю строку этой таблицы. При грузоподъемности самолета от 48 до 71 единицы загружается два предмета первого типа. Стоимость груза при этом составит 192.

Таблица 11

Функция f_1

W	$f_1(W)$	x_1
0—23	0	0
24—47	96	1
48—71	192	2
72—87	288	3

Таблица 12

Функция f_2

W	$f_2(W)$	x_2
0—21	0	0
22—23	85	1
24—45	96	0
46—47	181	1
48—69	192	0
70—71	277	1
72—87	288	0

Таблица 13

Функция f_3

W	$f_3(W)$	x_3
0—15	0	0
16—21	50	1
22—23	85	0
24—37	96	0
38—39	135	1
40—45	146	1
46—47	181	0
48—63	192	0
64—69	242	1
70—71	277	0
72—87	288	0

Таблица 14

Функция f_4

W	$f_4(W)$	x_4
0—9	0	0
10—15	20	1
16—21	50	0
22—23	85	0
24—33	96	0
34—37	116	1
38—39	135	0
40—45	146	0
46—47	181	0
48—57	192	0
58—63	212	1
64—69	242	0
70—71	277	0
72—81	288	0
81—87	308	1

Используя соотношение

$$f_2(W)=\max_{0<x_2<\left[\frac{W}{P_2}\right]}\{x_2V_2+f_1(W-x_2P_2)\},$$

будем вычислять значения функции $f_2(W)$. Разъясним, к примеру, как найдено $f_2(70)$. Ясно, что

$$f_2(70)=\max_{0<x_2<\left[\frac{70}{21}\right]}\{x_2\cdot 85+f_1(70-x_2\cdot 22)\}.$$

Величина x_2 может, следовательно, принимать только значения 0, 1, 2, 3. Вычислим, используя таблицу 11, выражение в фигурных скобках при всех возможных вариантах выбора значения x_2.

x_2	$\{x_2\cdot 85+f_1(70-x_2\cdot 22)\}$	x_2	$\{x_2\cdot 85+f_1(70-x_2\cdot 22)\}$
0	$f_1(70)=192$	2	$2\cdot 85+f_1(26)=266$
1	$85+f_1(48)=277$	3	$3\cdot 85+f_1(4)=255$

Наибольший из полученных результатов 277, поэтому $f_2(70)=277$, а соответствующее значение $x_2=1$. Так строится табл. 12 функции $f_2(W)$.

Аналогично построены таблицы значений функции $f_3(W)$ и $f_4(W)$. При этих построениях всякий раз используется предыдущая таблица.

На основании этих таблиц уже можно найти оптимальный план загрузки самолета грузоподъемностью $W=83$. Из таблицы 14 находим, что максимальная стоимость груза $f_4(83)$ оказывается равной 308, а предметов четвертого типа следует погрузить всего один, так как $x_4=1$. Этот один предмет имеет вес 10, и, следовательно, предметов остальных типов можно загрузить лишь в пределах веса 83—10=73. Из таблиц 13 и 12 последовательно находим, что для $W=73$ не следует грузить ни предметов третьего типа, ни предметов второго типа, т. е. $x_3=0$ и $x_2=0$. Из таблицы 11 видно, что при $W=73$ следует взять три предмета первого типа, т. е. $x_1=3$.

Окончательно наилучший план загрузки таков: следует взять три предмета первого типа и один предмет четвертого типа. Их суммарная стоимость составляет 308.

Замечание первое. Легко видеть, что мы не только решили поставленную задачу (найти план загрузки самолета грузоподъемностью $W=83$), но сделали гораздо больше. Из таблиц 11—14 могут быть найдены оптимальные планы загрузки для самолетов любой грузоподъемности (от 0 до 87), т. е. вместо одной задачи решено целое семейство сходных между собой задач. Это характерная черта метода динамического программирования, расширив задачу, мы облегчили ее решение.

Отметим также, что, поскольку метод носит явно выраженный алгорифмический характер, он легко реализуется на ЭВМ.

Замечание второе. Рассмотренная задача может быть дана и в другой интерпретации. Стержень длиной 83 требуется раскроить на заготовки длиной $l_1=24$, $l_2=22$, $l_3=16$, $l_4=10$, оценки которых равны соответственно $V_1=96$, $V_2=85$, $V_3=50$, $V_4=20$, чтобы суммарная оценка полученных заготовок оказалась наибольшей. Очевидно, что мы можем воспользоваться описанным выше методом решения. На той же идее основано нахождение плоских раскроев [1]. Сочетая метод динамического программирования с линейным программированием, можно получить полностью автоматизированное решение задачи о раскрое.

[1] Применительно к задаче раскроя этот подход был в свое время предложен, не опираясь на динамическое программирование.

После того как рассмотрен этот простой пример, перейдем к более общему описанию многошаговых процессов принятия решений.

Рассмотрим задачу распределения ресурсов, состоящую в следующем: имеется некоторое количество ресурса x, которое можно использовать N различными способами. Ресурсы могут быть самой различной природы (деньги, машины, люди, земля) и т. п., так же, как и способы их использования. В рассмотренной задаче ресурс — грузоподъемность самолета, а способы использования — возможность загрузки различными типами предметов.

Если обозначить через x_i количество ресурса, используемое i-м способом, то каждому способу сопоставляется функция полезности $\varphi_i(x_i)$, выражающая доход от этого способа (в задаче о погрузке $\varphi_i(x_i) = V_i\left[\frac{x_i}{P_i}\right]$. Предполагается, что все доходы измеряются в одинаковых единицах и общий доход равен сумме доходов, полученных от использования каждого способа.

Теперь уже можно выписать задачу в математической форме:

найти

$$\underbrace{\max\{\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\ldots+\varphi_N(x_N)\}}_{\text{общий доход от использования ресурсов всеми способами}}$$

при условиях

$x_1 \geqslant, \ldots, x_N \geqslant 0$ (выделяемые количества ресурсов неотрицательны)

$x_1+x_2+\ldots+x_N = x$ (общее количество ресурсов равно x).

Перейдем к решению задачи. Так как максимальный доход зависит только от x (количества ресурсов) и N (числа способов), то можно записать

$$f_N(x) = \max_{\{x_i\}}\left\{\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x_i)\right\},$$

где

$$x_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{N} x_i = x.$$

Функция $f_N(x)$ выражает, следовательно, максимальный доход, который можно получить, используя количество ресурса x, N различными способами.

Очевидно, что $f_1(x) = \max\varphi_1(x_1) = \varphi_1(x)$. (Сравните с загрузкой самолета предметами только первого типа!)

Легко получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$. Действительно, пусть x_k $(0 \leqslant x_k \leqslant x)$ — количество ресурса, используемое k-м способом. Для $(k-1)$ способов остается количество ресурса, равное $x - x_k$. Так как мы хотим распорядиться этими ресурсами наилучшим образом, то доход от них составит $f_{k-1}(x-x_k)$. Понятно, что x_k нужно выбрать так, чтобы максимизировать суммарный доход от k-го и от первых $(k-1)$ способов, т. е.

$$f_k(x)=\max_{0<x_k<x}\{\varphi_k(x_k)+f_{k-1}(x-x_k)\} \qquad (*)$$
$$\text{для} \quad k=2, 3, \ldots, N.$$

При выводе этих рекуррентных соотношений, по сути, использовался следующий очевидный принцип: оптимальная стратегия обладает тем свойством, что для любого первоначального состояния и некоторого начального этапа решения последующие решения должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, к которому пришли в результате начального этапа решения. Этот принцип, получивший название ***принципа оптимальности,*** лежит в основе всей концепции динамического программирования.

Соотношения (*) позволяют заменить чрезвычайно трудоемкое вычисление максимума по N переменным в исходной задаче решением N задач, в каждой из которых максимум находится лишь по одной переменной. С их помощью могут быть решены задачи, которые иными путями решать не удается.

Мы рассмотрели задачу с одним ресурсом. Та же идея анализа задачи, основанная на принципе оптимальности, может быть использована и в случае нескольких видов ресурсов. Однако с увеличением размерности объем вычислений быстро растет, так что реально метод динамического программирования непосредственно может быть применен в случае двух, максимум трех-четырех видов ресурсов. Это отличает его от линейного программирования, где преодолимы и бо́льшие размерности.

Задача о загрузке самолета играла чисто иллюстративную роль, поясняя главные принципы динамического программирования. Имеется однако, очень много практически важных задач, которые ставятся и решаются как задачи динамического программирования. Мы упомянем здесь лишь две из них.

Для производства определенного продукта предполагается построить несколько предприятий. Считаются известными: суммарная производственная мощность этих предприятий, наибольшая и наименьшая производственные мощности каждого предприятия, известна также зависимость себестоимости продукции на каждом предприятии от его производственной мощности. Требуется так выбрать производственные мощности предприятий, чтобы суммарная себестоимость производства продукции была минимальной.

В этой задаче в роли ресурса выступает суммарная производственная мощность, а в роли способов его использования — выбор тех или иных производственных мощностей для каждого предприятия.

Читателю предлагается самому построить математическую модель задачи и убедиться в возможности решить ее методом динамического программирования.

До сих пор количество распределяемого ресурса предполагалось меняющимся дискретно. Во многих случаях оказывается естественным считать возможным непрерывное изменение. Следующая задача и дает пример такой ситуации.

Рассмотрим промышленное производство некоторой биомассы. По истечении каждого месяца некоторое количество биомассы y сдается потребителю, принося предприятию доход ky, а оставшееся количество биомассы z за месяц вновь увеличивается до az, $a>1$. Производственные затраты при этом зависят от z и определяются функцией $\varphi(z)=\varepsilon z^2$, где ε — заданное число. Требуется определить такие объемы поставок, чтобы в течение N месяцев предприятие получило максимальный суммарный доход.

Пусть количество биомассы к концу первого месяца равно x, а поставка в первый месяц равна y_1. Тогда во второй месяц нужно выбирать поставку y_2 уже для количества биомассы $a\,(x-y_1)$ и т. д. Таким образом, приходим к следующей задаче:

найти

$$\max\,\{ky_1-\varphi(x-y_1)+ky_2-\varphi(x_1-y_2)+\ldots ky_N-\varphi(x_{N-1}-y_N)\}$$

при условиях

$$x_1=a(x-y_1),\ x_2=a\,(x_1-y_2),\ \ldots,\ x_{N-1}=a\,(x_{N-2}-y_{N-1})$$

(оставленное количество биомассы увеличивается в a раз).

$$0\leqslant y_1\leqslant x,\ 0\leqslant y_2\leqslant x_1,\ \ldots,\ 0\leqslant y_N\leqslant x_{N-1}$$

(величины поставок неотрицательны и не превосходят имеющихся ресурсов).

Обозначим через $f_s(x)$ максимальный доход предприятия за s месяцев, если первоначальное количество биомассы равно x. Функции $fs\,(x)$ связаны следующими рекуррентными соотношениями, представляющими математическую запись принципа оптимальности.

$$f_1(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{ky-\varepsilon(x-y)^2\}$$

$$fs(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant x}\{ky-\varepsilon\,(x-y)^2+fs_{-1}(a\,(x-y))\}$$

$$s=2,\,3,\,\ldots,\,N.$$

Для определенности решим задачу при таких числовых значениях параметров: $k=10$; $\varepsilon=0{,}1$; $a=2$; $x=150$; $N=12$.

Процесс решения состоит в том, что одна за другой вычисляются функции $f_s\ (x)$ и те значения y (по смыслу $y=y_1$ — размер поставки в первый месяц), на которых реализуются максимумы. Легко убедиться, что при этом мы придем к такой таблице.

Таблица 15

$f_1(x)$	y	$f_2(x)$	y	$f_3(x)$	y	...	$f_{12}(x)$	y
$10x$	x	$10x+\frac{25}{\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon x-5}{\varepsilon}$	$10x+\frac{25}{\varepsilon}\cdot 2$	$\frac{\varepsilon x-5}{\varepsilon}$	...	$10x+\frac{25}{\varepsilon}\cdot 11$	$\frac{\varepsilon x-5}{\varepsilon}$

Поясним, например, как заполняются два первых столбца этой таблицы. По определению $\bar{f}_1(x)=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant x}\{10-0{,}1\,(x-y)^2\}$. Максимум выражения, стоящего в фигурных скобках справа, может достигаться либо при $y=0$, либо при $y=x$, либо в такой внутренней точке промежутка изменения y, где производная по y от выражения, стоящего в фигурных скобках, равна нулю. Легко видеть, что производная обращается в нуль при $y=x+50$, т. е. вне допустимого промежутка изменения y. Сравнивая значения выражения в скобках при $y=0$ и $y=x$, находим, что максимум достигается при $y=x$ и, следовательно, $\bar{f}_1(x)=10x$. Аналогично заполняются остальные столбцы.

Теперь уже видно решение задачи. Максимальный доход предприятия за 12 месяцев, если начальное количество биомассы равнялось 150 усл. ед., составляет $\bar{f}_{12}\ (150)=10\cdot 150+\frac{25}{0{,}1}\cdot 11=4250$. Объем поставки в первый месяц $y_1=\frac{0{,}1\cdot 150-5}{0{,}1}=100$. Во второй месяц количество биомассы равно 100 ($[150-100]\cdot 2$), а поставка $y_2=\frac{0{,}1\cdot 100-5}{0{,}1}=50$. Это количество биомассы и объем поставок предприятия сохраняются во все месяцы, включая одиннадцатый, в двенадцатый же $y_{12}=100$.

Отметим, что метод динамического программирования широко используется и в задачах автоматического регулирования. Этот же круг задач успешно исследуется на основе принципа максимума, разработанного советским ученым академиком Л. С. Понтрягиным.

§ 2. Нелинейное программирование

Еще раз вернемся к рассмотренной уже задаче размещения (см. гл. II, § 2). На этот раз модификация состоит в том, что производственные затраты на единицу продукции не постоянны и, следовательно, производственные затраты не пропорциональны объему выпуска, а зависят от него нелинейно, т. е. функция $f_i(x_i)$, представляющая затраты на производство продукта в объеме x_i на i-м предприятии, может быть нелинейной. Производственные мощности будем считать любыми, а не обязательно принадлежащими множеству целочисленных значений. Делая такие предположения, приходим к следующей математической задаче: найти

$$\min_{\{x_{ij}\}}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)+\sum_{i,j} C_{ij}x_{ij}\right\}$$

(минимум суммарных затрат на производство и транспортировку) при условиях:

1) $x_{ij} \geqslant 0$ (перевозятся неотрицательные количества продукта);

2) $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ (произведенные количества продукта полностью доставляются потребителям);

3) $\sum_{1=i}^{n} x_{ij} \geqslant B_j$ (каждый пункт потребления получает не меньше заданного в нем объема потребления).

Экстремальные задачи, в которых либо ограничения, либо целевая функция (случай, который мы рассматриваем!), либо и то и другое нелинейны, называются задачами нелинейного программирования. К сожалению, пока не имеется общих методов, подобных методу последовательного улучшения плана или симплекс-методу в линейном программировании, которые позволяли бы решать любые задачи нелинейного программирования. Поэтому мы сможем указать на возможность решения лишь для некоторых, впрочем, весьма важных частных случаев.

Прежде всего, для того, чтобы лучше понять, в чем же выражается «неприятный эффект» нелинейности, проведем сравнение задач линейного и нелинейного программирования. Начнем с множества допустимых планов. В задачах линейного программирования оно выпуклое, с конечным числом крайних точек (напоминаем, что крайней точкой называется всякая точка множества, которая не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего этому множеству). Это сразу становится понятным, если вспомнить, что границами множества служат гиперплоскости. В задачах же нелинейного программирования (в том случае, когда нелинейны ограничения) множество допустимых планов может быть невыпуклым, может иметь бесконечное число крайних точек. Например, пусть допустимая область на плоскости XOY определяется такими ограничениями:

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1;$$

$$xy \leqslant 1.$$

Из рис. 11 видно, что эта область невыпуклая, так как отрезок, соединяющий любые две точки на гиперболе, не принадлежит области. Кроме того, все точки, лежащие на ограничивающей область дуге окружности, являются крайними, т. е. имеется бесчисленное множество крайних точек.

Выясним теперь, что нового приносит нелинейность в целевой функции. Раньше было указано, что решение задачи линейного программирования обязательно находится в некоторых (возможно, в нескольких) крайних точках множества допустимых планов. В случае нелинейной целевой функции дело обстоит иначе. Оказывается, что экстремум может достигаться не только на границе, но и внутри допустимой области. (рис. 12).

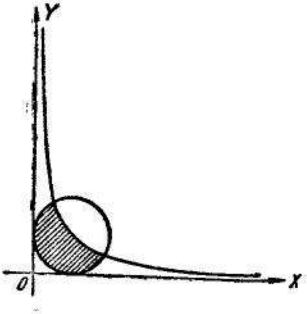


Рис. 11

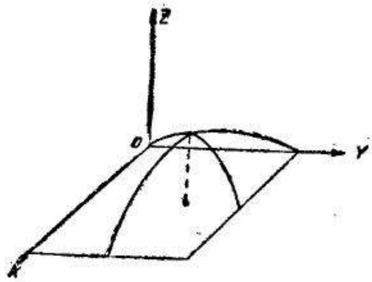


Рис. 12

И еще одно осложнение, отличающее нелинейные задачи от линейных. Целевая функция в допустимой области может иметь несколько локальных экстремумов. (Говорят, что функция имеет в точке A локальный экстремум, если значения функции в точке A не больше (или не меньше), чем значения функции во всех достаточно близких к A точках.) Геометрическая иллюстрация этого случая приведена на рис. 13.

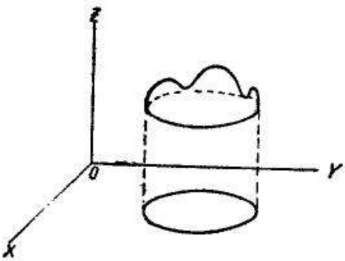


Рис. 13

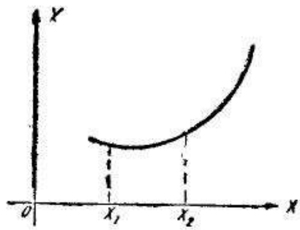


Рис. 14

Перечислив те особенности, которыми обладают нелинейные задачи по сравнению с линейными, укажем теперь некоторые возможные пути их решения. Начнем с рассмотрения нелинейных задач специального вида. Такой характер имеет в ряде случаев и упоминавшаяся выше задача размещения.

Для некоторых видов производства, таких, например, как эксплуатация месторождений полезных ископаемых и т. п., представляется естественным допущение о выпуклости функции производственных затрат, т. е. что затраты на единицу продукции возрастают с объемом добычи. Напомним, что функция называется выпуклой, если для любой пары точек x_1 и x_2 из области ее определения (которая предполагается выпуклой) и для всех чисел λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

График такой функции изображен на рис. 14.

Множество допустимых планов, определяемое условиями 1—3, представляет собой выпуклый многогранник. Таким образом, требуется найти минимум выпуклой функции, заданной в выпуклой области. Этот класс задач носит название *выпуклого программирования*.

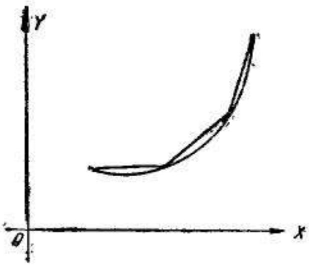


Рис. 15

Доказано, что минимум выпуклой функции на выпуклом множестве точек может быть только один и, следовательно, локальный минимум совпадает с глобальным минимумом. В этом случае возможно сколь угодно точно аппроксимировать задачу выпуклого программирования задачей линейного программирования. Для такой аппроксимации нужно заменить кривые $f_i(x_i)$ вписанными в них ломаными линиями (рис. 15), а затем преобразовать целевую функцию в линейную, используя уравнения звеньев этих ломаных и вводя дополнительные ограничения. Полученная при этом задача линейного программирования может быть уже без труда решена, и ее решение дает приближенно решение исходной нелинейной задачи. Разумеется, точность будет тем выше, чем более точно кривые аппроксимированы ломаными. Замена кривой ломаной в случае задачи размещения экономически соответствует замене одного нелинейно описываемого способа производства продукта на данном предприятии на ряд способов производства: скажем первой тысячи изделий, второй тысячи и т. д., описываемых линейно, но с различными затратами. Получаемый при решении такой линейно-программной задачи план и представляет приближенное решение нелинейной задачи. Этот путь неприменим при отсутствии условия выпуклости функции. В этом случае может оказаться включенным в план выпуск третьей тысячи изделий и не включенным выпуск первых двух тысяч — план окажется нереальным. В случае выпуклости такая возможность исключена — выпуск первых тысяч как более выгодный не может не войти в план.

К сожалению, очень часто гипотеза о выпуклости функций $f_i(x_i)$ оказывается неправомерной. Для большинства видов производства затраты на выпуск единицы продукции обычно уменьшаются с ростом производственных мощностей, т. е. функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают и вогнуты. Этот случай несравненно труднее предыдущего, так как задача может иметь теперь множество локальных минимумов. Интересная попытка решения такого рода задач предпринята в 1964 году вьетнамским математиком Хоанг Туем. Она основана на идее сужения допустимой области за счет отбрасывания тех частей, в которых заведомо не достигается минимум.

Возможно и применение различных итеративных методов, основанных на очень простой идее — пошаговом приближении к точке минимума. Если известно заранее, что целевая функция имеет единственный минимум, то поиск точки, в которой он достигается, может быть организован так. Возьмем в качестве начальной произвольную точку допустимой области и определим для этой точки то направление, в котором функция быстрее всего убывает. Перейдем к новой точке, сделав небольшой «шаг» в направлении скорейшего убывания функции. Потом снова отыскивается подходящее направление для перехода к очередной точке и т. д. Разумеется, это только грубое, схематическое описание общей идеи одного из итерационных процессов. Мы совершенно не касаемся таких вопросов, как выбор величины шага, количество необходимых шагов, продолжение поиска экстремальной точки при выходе на границу допустимой области и т. д.

Если целевая функция имеет несколько локальных минимумов или просто заранее о ней ничего не известно, то поиск экстремальной точки еще более осложняется. Это объясняется тем, что описанный процесс улучшения плана может в этом случае привести к локальному минимуму, очень далекому от глобального. Чтобы избежать этого, приходится, завершая один поиск, начинать его снова, но уже с другой начальной точки. Проделав такую процедуру с различными (желательно многими) точками, можно выбрать в качестве приближенного решения задачи наименьший из локальных минимумов (см. (рис. 13). Чем большее число точек допустимой области просмотрено, тем больше шансов, что найденный результат представляет действительное решение задачи.

Несмотря на большие трудности, связанные с решением задач нелинейного программирования, о которых мы постарались дать представление читателю, в настоящее время ведется большая работа по разработке новых и совершенствованию уже известных методов их решения. В первую очередь это вызвано большой практической важностью задач такого типа, их актуальностью. Кроме упоминавшейся уже задачи размещения и выбора производственных мощностей, отметим еще одну характерную экономическую задачу, приводящуюся к задаче нелинейного программирования.

При изучении вопросов составления планов с учетом потребления бывает необходимо использовать функцию, выражающую объем потребления некоторого продукта в зависимости от его цены. Сразу же понятно, что функция эта зачастую нелинейная. (Например, если менять цену продукта, то при большом уменьшении цены объем потребления перестает заметно расти.) Если требуется отыскать производственный план и связанные с ним цены, определить объем потребления так, чтобы он был согласован с этими ценами, и при этом максимизировать эффект от производства и потребления этого продукта, то придем к типичной задаче нелинейного программирования. Дальнейшие примеры могут быть указаны самим читателем.

В нелинейном программировании также могут быть построены связанные с оптимальным планом оценки, однако их экономическое значение описывается более сложно, что вносит известные трудности в их применение.

§ 3. Целочисленное программирование

Рассмотрим теперь небольшую, но весьма существенную модификацию задачи размещения, упоминавшейся в § 2 второй главы и в предыдущем параграфе.

Пусть имеется n пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, в которых могут быть размещены предприятия, производящие некоторый продукт. Предполагается, что предприятия создаются по типовым проектам и их производственные мощности x_i могут принимать лишь конечное множество значений. Например, предприятие может быть оснащено одной, двумя или тремя конвейерными линиями, иметь два, четыре или шесть однотипных агрегатов (печей, котлов) и т. п. Таким образом, здесь производственные мощности принимают не только конечное число возможных значений, а и определенные целочисленные значения (точнее, кратные некоторой единице). Для каждого пункта известна зависимость производственных затрат от выпуска, т. е. функция $f_i(x_i)$. Для простоты будем считать ее линейной, т. е. $f_i(x_i) = C_i x_i$.

Кроме того, заданы m пунктов потребления этого продукта с объемами потребления, равными соответственно $B_1, B_2, \ldots, B_m$, а также матрица транспортных затрат с элементами C_{ij}. Задача, как и раньше, состоит в размещении предприятий, определении их производственных мощностей и организации перевозок таким образом, чтобы суммарные затраты по производству и транспортировке были минимальными.

Обозначая через x_i объем продукта, производимого в i-м пункте, а x_{ij} — количество продукта, перевозимое из A_i в B_j, приходим к следующей задаче: найти

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij} \right\}$$

суммарные затраты по производству и транспортировке при условиях

1. $x_{ij} \geqslant 0$ (перевозятся неотрицательные количества продукта);
2. $x_i = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ (произведенное количество продукта полностью доставляется потребителям);
3. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant B_j$ (каждый пункт потребления получает продукт в объеме, не меньшем заданного);
4. x_i принимает заданные целочисленные значения.

Задачи, в которых имеются ограничения типа 4 или сводящиеся к ним, получили название задач *целочисленного программирования.* Несмотря на, казалось бы, малое отличие их от линейнопрограммных (добавление условия 4), трудности при их решении возрастают очень сильно. Дело в том, что оптимальное решение в этом случае не обязательно находится в одной из вершин многогранника, задаваемого условиями 1—3, и обычные методы линейного программирования, использующие это обстоятельство, оказываются бессильными при решении задач целочисленного программирования.

Разработан, однако, ряд специальных методов, пригодных именно для такого класса задач. Простейший и наименее точный из них состоит в решении линейной задачи с ограничениями 1—3 с последующим округлением результатов так, чтобы они удовлетворяли и условию 4. Точный метод, дающий оптимальное решение целочисленной задачи, разработан американским математиком Р. Гомори. Хотя принципиальная применимость и даже конечность метода доказана, все же практическая ценность его ограничена, так как с его помощью удается решать лишь задачи не слишком большого объема, даже используя самую современную вычислительную технику.

Замечание. При решении практических вопросов особенно часто возникают задачи целочисленного программирования, в которых переменные принимают лишь два значения: нуль и единица. Экономически они соответствуют тому, что то или иное возможное решение принимается или нет. Например, строить домну или нет, приобретать машину или нет и т. п. При решении таких задач нередко удается использовать и методы комбинаторного анализа, так называемый направленный перебор, просмотр различных сочетаний значений переменных, но не всех возможных, а лишь разумно выбранной части их.

§ 4. Стохастическое программирование

В качестве последней задачи, не укладывающейся в рамки линейного программирования, приведем задачу *стохастическо-*

го программирования. Так называются задачи, учитывающие случайный характер некоторых параметров. Нужно отметить прежде всего, что в практике планирования часто приходится учитывать случайные факторы. Например, случайными могут быть элементы технологической матрицы в задаче линейного программирования, потребности, т. е. правые части ограничений, цены и др. Все это связано с тем, что невозможно, особенно при планировании на длительный период, указать значения всех коэффициентов и нормативов с полной определенностью, так как всегда они могут измениться под влиянием каких-нибудь непредвиденных событий.

Для примера рассмотрим задачу комплектования станочного парка при неизвестных заранее заказах. Ограничимся лишь словесным описанием ее.

На предприятие по ремонту автомобилей в течение года поступают заказы на выполнение тех или иных работ. Заранее неизвестно, когда, какие и в каком количестве заказы поступят. Здравый смысл подсказывает, что если набор станков мал, т. е. невелик круг выполняемых работ или мало количество станков, т. е. возможна задержка в выполнении заказов, то предприятие будет терпеть убытки, так как заказчики предпочтут обратиться к услугам других, более совершенных предприятий. Убытки естественно измерять величиной неполученной из-за этого прибыли. С другой стороны, ясно, что если велики и ассортимент, и число станков, то большую часть времени они будут бездействовать, а приобретение и содержание большого количества станков связаны с большими затратами.

Поскольку сумма прибылей за год является случайной величиной, не имеет смысла говорить непосредственно о ее максимизации. Поэтому на практике обычно в качестве целевой функции выбирается либо математическое ожидание прибыли, вычисляемое на основе известных вероятностей поступления заказов, либо вероятность того, что величина прибыли окажется не меньше заданной константы.

Доказано, что первый случай сводится к обычной задаче линейного программирования, второй же требует для своего исследования специальных методов.

Укажем еще две задачи, в которых естественно учитывать случайные факторы. При планировании сельскохозяйственного производства (см. гл. II) урожайности культур на различных участках, строго говоря, следует считать случайными, так как они зависят от погодных условий, предсказать которые точно невозможно. Точно так же невозможно предсказать число пассажиров, которое окажется на той или иной авиалинии, но тем не менее необходимо определить количество самолетов, обслуживающих каждую линию (ср. гл. II, § 2). По-видимому, читатель без труда сможет пополнить список таких примеров.

Глава IV

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

§ 1. Некоторые современные проблемы экономической науки

До сих пор мы рассматривали лишь сравнительно частные экономические задачи и убедились в целесообразности подходов к их решению с точки зрения концепции математического оптимального планирования. Теперь мы переходим к обсуждению проблем, возникающих перед экономикой в целом, остановимся на методах их исследования, существующих и тех, применения которых можно ожидать в будущем.

Прежде всего нужно отметить, что переход к этим более «широким» моделям связан не просто с расширением уже имеющихся частных моделей, но и со многими своеобразными вопросами, характерными для моделей народнохозяйственного планирования. Построение и исследование этих моделей возможны лишь на базе сочетания традиционных методов экономического анализа, возникших на основе экономической теории и уже имеющегося богатого опыта, статистических методов и математико-экономического моделирования. В связи с тем, что рассматриваемый класс моделей охватывает сложные экономические комплексы, деятельность которых далеко не детерминирована, роль статистических методов значительно возрастает по сравнению с предшествующими задачами.

Приступим теперь к описанию основных народнохозяйственных моделей и дадим их краткие характеристики. Прежде всего остановимся на вопросах составления плана хозяйства на базе планов отдельных отраслей производства и сбалансированной деятельности отраслей между собой.

При математическом анализе процесса расширенного воспроизводства использовались по преимуществу алгебраические соотношения. Известное применение при общем анализе динамики экономической системы находят и дифференциальные уравнения, однако при таком анализе речь идет по преимуществу о самых общих глобальных характеристиках экономической системы. Между тем нужды высокоразвитого хозяйства, являющегося типичным для XX века, и в особенности нужды планируемой управляемой экономики, возникшей после социалистической революции, диктовали потребность не только в глобальных, но и в более конкретных экономических показателях и характеристиках. Это привело к созданию в 20-е годы в СССР системы межотраслевого баланса, получившей систематическое развитие в работах американского экономиста и статистика В. Леонтьева. В СССР исследования по межотраслевому балансу возобновились в 50-х годах. Эта новая форма представления системы статистических данных оказалась весьма эффективной.

Что такое баланс, известно каждому. Хозяйка дома, получив заработную плату мужа и свою, распределяет, на какие покупки она будет израсходована. Возможно, и не подозревая об этом, она составляет балансовые отношения в их простейшей форме.

Таблица 16

	Отрасли производства				Общее промышленное и производственное потребление	Конечный продукт		Общая продукция
	1	2	...	n		текущее непроизводственное потребление	накопление производственных фондов	
Отрасли производства								
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	U_1	α_1	β_1	W_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	U_2	α_2	β_2	W_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	U_n	α_n	β_n	W_n
Заработная плата	Z_1	Z_2	...	Z_n				
Доход	δ_1	δ_2	...	δ_n				
Общая продукция	W_1	W_2	...	W_n				

Баланс всего народного хозяйства основан на идее сопоставления результатов и затрат. Поскольку приведенные ниже балансовые отношения для хозяйства в целом характеризуют взаимосвязи между различными отраслями, они получили название *межотраслевого баланса.* Схематически эти соотношения можно записать в виде следующей таблицы (табл. 16).

Для того чтобы лучше разъяснить принципы построения межотраслевого баланса, ограничимся условно только четырьмя отраслями производства: *1* — производство электроэнергии, *2* — топливная промышленность, *3* — черная металлургия и *4* — легкая промышленность.

Величина x_{ij} выражает объем продукции i-й отрасли, затрачиваемой при функционировании j-й отрасли. Например, x_{11} — количество электроэнергии, затрачиваемое при производстве электроэнергии, x_{12} — количество электроэнергии, затрачиваемое в топливной промышленности. Электроэнергия расходуется и в черной металлургии, и в легкой промышленности, и эти потребности определят соответственно величины x_{13} и x_{14}. Однако электроэнергию потребляют не только перечисленные отрасли производства. Потребителями являются население, транспорт, культурные учреждения и др.

Обозначим объем конечного продукта j-й отрасли через V_j. Он складывается из непроизводственного потребления α_i (включая и вложения в непроизводственные фонды) и накопления производственных фондов β_i. Если общий объем производства j-й отрасли обозначить W_j, то приходим к следующим соотношениям:

$$W_j = U_j + V_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$U_j = \sum_{k=1}^{4} x_{jk} \text{ и } V_j = \alpha_j + \beta_j.$$

Эти уравнения получаются в результате суммирования по строкам и указывают, как используется и распределяется произведенная продукция. Например, первое из них ($j=1$) означает, что вся произведенная электроэнергия W_1 распределяется между четырьмя отраслями производства ($U_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$) непроизводственным потреблением и накоплением ($V_1 = \alpha_1 + \beta_1$).

Матрица межотраслевого баланса может строиться как в натуральной (тонны металла и т. п.), так и в стоимостной форме (в каких-то базовых неизменных ценах). В дальнейшем будем иметь в виду именно последнюю форму баланса.

Однако отрасль можно анализировать не с точки зрения распределения ее продукции, а с точки зрения затрат на производство в данной отрасли. Так, для получения продукции черной металлургии требуются и электроэнергия, и топливо, и изделия легкой промышленности (спецодежда, и т. п.).

Помимо этого, в i-й отрасли имеются затраты на заработную плату, равные Z_i, а также доход δ_i, возникающий при реализации продукта отрасли.

Таким образом, для затрат на производство продукции i-й отрасли можно записать следующее равенство:

$$W_i = \sum_{k=1}^{4} x_{ki} + Z_i + \delta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Например, последнее из них ($i=4$) означает, что стоимость продукции легкой промышленности равна стоимости затраченных в ней продуктов всех четырех отраслей плюс заработная плата работников легкой промышленности и доход, полученный от реализации продуктов легкой промышленности.

Совокупность величин V_1, V_2, ..., V_n представляет собой национальный доход в его отраслевой структуре, а $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ — суммарный национальный доход.

Рассмотренные нами балансовые соотношения представляют собой большую ценность, так как на их основе могут рассчитываться многие важные экономические характеристики — коэффициенты прямых и полных затрат и др. Действительно, из уравнений связи затрат и выпуска продукции можно подсчитать затраты продукта i-й отрасли на выпуск единицы продукта k-й отрасли. Эти числа a_{ik} и являются коэффициентами прямых затрат.

Так, например, коэффициент прямых затрат электроэнергии на продукцию металлургии составляет $a_{13} = \frac{x_{13}}{W_3}$.

Однако расход электроэнергии на металл не исчерпывается непосредственными затратами ее. На металл расходуется топливо, в производстве которого также используется электроэнергия, и эти затраты электроэнергии должны быть учтены как связанные с производством металла.

Если произвести аналогичным образом подсчет всех затрат, приходящихся на единицу конечного продукта, то будут определены коэффициенты полных затрат. Отметим, что полные затраты могут существенно отличаться от прямых. Так, например, по межотраслевому балансу СССР за 1959 год прямые затраты черных металлов на производство электроэнергии составляют 14,4 руб. на тысячу рублей продукции, тогда как полные — 45,4 руб. Математически полные затраты находятся с помощью обращения соответствующей матрицы. Данные межотраслевого баланса частично используются уже сейчас при составлении народнохозяйственного плана.

Однако схема межотраслевого баланса имеет и существенные недостатки. Например, немалые трудности при составлении балансовых соотношений возникают из-за того, что предприятия почти каждой отрасли производят не только продукцию, относящуюся непосредственно к своей отрасли, но и другие виды продукции. Скажем, шарикоподшипниковый завод, кроме своей основной продукции, выпускает мясорубки, фигурные коньки и другие предметы широкого потребления. Но даже если и преодолеть эти трудности, то от главного ее недостатка избавится не удается — схема межотраслевого баланса представляет собой по сути как бы моментальную фотографию сложившегося состояния экономики: в ней никак не учитывается процесс развития народного хозяйства. Получаемые средние уровни затрат не учитывают многообразия возможных технологий, реализации достижений технического прогресса. Естественно поэтому, что на основе межотраслевого баланса не могут решаться задачи экономической динамики — определения оптимальных темпов и пропорций, в которых должны развиваться различные отрасли народного хозяйства. На частичное устранение этих недостатков направлены некоторые построенные на базе межотраслевого баланса народнохозяйственные динамические модели. Более существенный прогресс может быть достигнут на другом пути. Мы имеем в виду интенсивно разрабатываемую в настоящее время теорию динамических моделей оптимального планирования.

Оптимальные динамические модели перспективного планирования (линейнопрограммные), сбалансированные на каждый год планируемого периода, учитывающие реализацию достижений технического прогресса и трудовые ресурсы, предусматривают не только функционирование экономики, но и оптимальное развитие ее. Эти модели особенно важны для планируемой экономики социалистического государства, так как на их основе может осуществляться научно обоснованное и наиболее эффективное перспективное планирование развития отдельных отраслей производства и народного хозяйства в целом.

Преимущество динамической модели по сравнению со статической состоит не только в возможности отображать динамику производства, но и динамику оценок, т. е. тот факт, что один и тот же продукт в разные периоды имеет разные оценки. В частности, как правило, для экономики характерно убывание оценок — будущие продукты дешевле тех же продуктов, относящихся к более раннему периоду, так как последние, используемые как средство производства, дают возможность повысить производительность труда и возмещаются с лихвой в будущем.

Тот факт, что оценка единицы продукта меняется с течением времени, приводит к очень важному понятию — *норме эффективности*. Норма эффективности — это тот прирост чистой продукции, который может быть получен благодаря дополнительной единице капиталовложений в течение единицы времени (года). Знание нормы эффективности при анализе экономических вопросов, относящихся к длительному периоду времени, дает возможность расчетным путем учитывать фактор времени. Наибольшую роль играет этот фактор при решении задач перспективного планирования, в особенности относящихся к эффективности капиталовложений, структуре цен и т. п.

Для исследования линейных динамических моделей могут успешно применяться методы линейного программирования, однако, в соответствии со сказанным, увеличиваются размерность задачи (число переменных) и объем матрицы, содержащей исходную экономическую информацию, даже если производить (без чего здесь нельзя обойтись) широкое агрегирование (объединение) отдельных продуктов в целые группы их. Может объединяться даже продукция целой отрасли, использоваться данные межотраслевого баланса. Здесь полезно отметить, что при решении больших задач оптимального планирования, относящихся к большому хозяйственному комплексу, а тем более к народному хозяйству в целом, исходная информация подготавливается не одним лицом и даже не одной организацией. Большое достоинство линейнопрограммной модели состоит в том, что отдельные части матрицы, содержащие информацию, относящуюся к различным отраслям и специальным технологиям, могут подготавливаться различными компетентными учреждениями. Объединение же частей матрицы происходит в процессе решения, когда с помощью ЭВМ отыскивается оптимальный перспективный план. Следует сказать и о другом достоинстве этих моделей. Они правильно направляют мысль исследователя в постановке задачи, определении программы работ, необходимой исходной информации, выборе цели исследования.

Помимо построения оптимальных народнохозяйственных моделей, концепция оптимального планирования имеет существенное значение при анализе ряда важнейших конкретных проблем экономической теории и практики, позволяя лучше понять их сущность, уточнить постановку, рассматривать их не изолированно, а во взаимной связи, с точки зрения единой проблемы развития народного хозяйства в целом.

Вопросы перспективного планирования, такие, как создание новых предприятий, электростанций, дорог и т. п., представляют конкретные случаи общей проблемы эффективности капитальных вложений. Сущность ее в том, что должно быть найдено такое распределение средств, капиталовложений между отраслями и отдельными объектами, которое обеспечило бы максимальный эффект их по всему народному хозяйству для производства нужной обществу продукции.

Анализ динамической модели перспективного планирования, наличие динамической системы оценок делают ясным, что для решения вопроса об эффективности данного капиталовложения должны быть сопоставлены связанные с его осуществлением затраты и полученные результаты и эффекты за все время его функционирования, при этом разновременные эффекты должны быть приведены к одному моменту. Уменьшающаяся оценка будущих благ говорит о том, что вложение эффективно только если полученные за счет него приращения продукции на рубль вложения, экономия затрат достаточно велики — не ниже нормы эффективности единого народнохозяйственного показателя, характеризующего потенциальный эффект капиталовложений для хозяйства в данных условиях. Конкретные оптимальные модели, в частности рассмотренная выше модель размещения производства и развития отрасли, а также более совершенная динамическая модель развития отрасли дают объективные методы наилучшего использования капиталовложений.

Ранее мы уже отмечали неоднократно важную роль в конкретном экономическом анализе объективно обусловленных оценок, возникающих при решении задач линейного программирования. Для народнохозяйственных моделей значение их особенно велико, так как на их основе может осуществляться построение эффективной (оптимальной) системы цен. Поясним подробнее саму проблему ценообразования. Прежде всего выясним, в чем состоит основная, важнейшая функция цен.

Если осуществляется какое-то техническое или производственное решение, то при этом неизбежно что-то получается и что-то тратится. Нужно уметь соизмерять затраты и результаты, а так как в современном высокоразвитом производстве, использующем продукцию многих отраслей, приходится учитывать затраты и влияние далеких отраслей хозяйства (натуральное сопоставление при этом, разумеется, немыслимо), все затраты приходится приводить к одному эквиваленту — посредством цен. На основании цен, сравнивая затраты и результат, и делается заключение о выгодности или невыгодности того или иного решения с народнохозяйственной точки зрения. Таким образом, цены не только обладают информационным значением, но и являются параметрами управления — служат базой экономических расчетов и решений. Поэтому от того, насколько правильно построены цены, зависит качество экономического расчета. Как мы видели, такую же роль выполняют и объективно обусловленные оценки в модели оптимального планирования. Если бы удалось в одной модели охватить все продукты, производимые в народном хозяйстве, то в качестве цен естественно было бы выбрать и оценки, соответствующие оптимальному плану (при условии внесения корректив, связанных с нелинейностью, динамикой и другими неучтенными моментами). Так как оптимальный план является наилучшим и в принципе достижимым в условиях социалистической экономики, то и соответствующие ему, согласованные с ним оценки в принципе образуют наилучшую систему цен. К сожалению, построить такую модель и найти оценки для всех отдельных видов продукции практически невозможно из-за чрезмерно большого объема задачи, отсутствия необходимой информации и по другим причинам. Все реально осуществимые модели в большей или меньшей степени агрегированы, и на их базе, используя найденные агрегированные оценки, цены должны рассчитываться дополнительно. При этом, конечно, в особенности в ценах на продукты потребления, приходится учитывать и внеэкономические факторы, связанные с соображениями социального и политического порядка.

Для того чтобы цены могли действительно быть основой экономического расчета, необходимо, чтобы они правильно отражали общественно необходимые затраты живого и прошлого труда. В условиях единого социалистического производства должны учитываться *полные затраты* — затраты всего хозяйства на производство данной продукции. Поэтому оказывается, что при оценке затрат и определении цены продукции необходимо учитывать не только то, что непосредственно затрачивается на производство продукции, но и то, какие связаны с ее производством затраты и потери на других участках единого хозяйства. Например, на строительство какого-то дома можно собрать самых квалифицированных рабочих, самую совершенную строительную технику, материалы. В результате дом будет построен очень быстро и дешево, но зато 10—15 других домов будут строиться очень медленно и строительство их окажется дорогостоящим. Эти потери нельзя оставлять неучтенными. Следовательно, затраты на данном участке нужно брать с учетом того, какие для него выделены средства, т. е. наряду с непосредственными затратами живого труда и перенесенными (материалы, амортизация оборудования и т. п.) следует учесть и затраты средств, повышающих производительность труда — занятость техники, занятость хорошей земли и т. д., как мы это уже видели при анализе структуры о. о. оценок в рассмотренных ранее частных задачах. Итак, правильно исчисленная цена продукции неизбежно должна учитывать плату за фонды, ренту на землю, на лучшие месторождения, и только тогда она способна правильно служить эффективным экономическим инструментом.

Кроме того, так как общественно необходимые затраты труда (т. е. затраты, которые полезны с точки зрения общества) обеспечивают удовлетворение потребностей общества, необходимо, чтобы при построении цен учитывались размер и структура общественных потребностей.

Следует сказать, что выводы теории оптимального планирования нашли уже известное отражение в принципах ценообразования, примененных в проведенном в 1967 году пересмотре оптовых цен на промышленные товары. В этих ценах учтены отраслевые фондовые затраты и частично природные условия, учтен эффект продукции для потребителя, т. е. структура цен приближена к оптимальной.

Имеется и еще одна функция цен, особенно важная в связи с проводимой в настоящее время хозяйственной реформой. Они стимулируют реализацию именно оптимального плана, выступают, так сказать, в качестве рычагов, его поддерживающих. Остановимся на этом вопросе детальнее.

Как известно, в печати многократно приводились случаи, когда выпуск той или иной продукции выгоден предприятию и невыгоден государству, или наоборот. Неизбежны ли такие противоречия? Ясно, что в условиях социалистического производства такие противоречия не являются антагонистическими, неустранимыми. Оказывается, что если бы показатели, по которым оценивается работа предприятий, были высококачественными, соответствовали оптимальным планам и оценкам, то этих противоречий не было бы. Это положение служит теоретической основой для принципиального вывода о реальной осуществимости сочетания централизованного управления экономикой с широкой инициативой на местах. Оно позволяет, как это и предполагается в хозяйственной реформе, перейти в значительной мере от административных средств управления к использованию экономических рычагов хозяйства. Действительно, при правильно построенных ценах и платежах директор предприятия имеет возможность по введенным показателям, опирающимся на цены, узнать, что выгодно не только для предприятия, но и для государства, и тогда его права могут быть расширены без ущерба для дела.

Переход от административных средств управления к использованию экономических рычагов приводит к тому, что производственный план делается более реализуемым, так как в этом заинтересовано само предприятие. При этом следует подчеркнуть, что, с другой стороны, если показатели работы предприятия построены неверно, то они служат рычагами, препятствующими выполнению установленного плана. Например, если работа прокатного стана оценивается только тоннажом прокатанных труб, то, естественно, предприятие, будет стремиться преимущественно катать толстостенные трубы больших диаметров, так как это дает больший тоннаж, выполнение плана, премии работникам и т. п. В хозяйстве в этом случае неизбежно будет возникать нехватка тонких труб.

Разумеется, при сочетании централизованного планирования и экономического регулирования важно правильно определить сферы их действия. Ясно, что бессмысленно было бы пускать в свободную продажу крупные турбины, рассчитанные на Усть-Илимскую ГЭС, так как ни для какой другой станции они и не годятся. Здесь налицо необходимость централизованного планирования.

С другой стороны, ясно, что никто не будет заказывать в ресторане обеды на три года вперед. Вряд ли также является эффективным точный предварительный заказ на кнопки и гвозди. Тут не обойтись без экономического оперативного регулирования. Таким образом, должны определиться сферы хозяйства и управления, где эффективнее централизованное планирование и где оперативнее регулирование с использованием экономических рычагов и рыночных отношений, а также эффективнее сочетание этих двух начал. По-видимому, невозможно да и не нужно раз и навсегда заранее разделить эти сферы действия. Разделение должно определиться природой самого объекта, степенью совершенства методов планирования и регулирования на основе дальнейшего анализа опыта и практики.

Быть может, читателю поможет понять сравнение эффективности планирования и рыночного механизма такая аналогия. Пусть требуется плотная укладка в пространстве (в вагон, контейнер) различных предметов. При крупных или геометрически правильных предметах наиболее эффективным будет нахождение рациональной укладки с помощью расчетов, путем сравнения различных вариантов. Однако при мелких неправильной формы предметах они лучше уложатся, если, не прибегая ни к каким расчетам, положить их в наброс, а потом утрясти.

Итак, еще раз подчеркнем, что плановая социалистическая экономика, согласно концепции оптимального планирования и функционирования, отнюдь не предполагает полной централизации экономических решений. Напротив, благодаря тому, что вместе с оптимальным народнохозяйственным планом строится согласованная с ним система цен и других общественных оценок (нормативы фондоотдачи, рента на землю и месторождения полезных ископаемых, норматив эффективности капиталовложений и др.), появляется возможность на местах принимать решения, максимально согласованные с народнохозяйственными интересами. Это дает широкие возможности использования инициативы производственных коллективов, способствующей мобилизации ресурсов и вскрытию резервов на местах, позволяет расширять права отдельных хозяйственных участков, позволяет построить такую систему оценки и стимулирования работы отдельных участков, при которой выгодное для общества в целом становится выгодным и для каждого предприятия. Иначе говоря, система оптимального планирования создает теоретическую базу для решения проблемы сочетания централизованного управления экономикой с широкими правами и инициативой на местах на основе экономических средств управления.

При изучении вопросов ценообразования очень важно различать оптовые и розничные цены. Если первые определяются в основном производственными условиями (полными затратами на производство продукта), то при формировании розничных цен большую роль играют размер и структура потребительского спроса, на важное значение учета которых указывали К. Маркс и Ф. Энгельс, бюджетные ограничения, социальная оценка структуры потребления. В связи с этим, а также для нужд планирования ведется исследование проблем потребления, изучается уровень и степень удовлетворенности спроса, а также тенденции в его изменении. И в этих сложных проблемах также находят место математические подходы. Весьма полезным в этих исследованиях оказалось использование *коэффициентов эластичности* спроса или потребления, выражающих относительные изменения спроса или потребления в зависимости от различных факторов — дохода, цены продукта, качества продукта, группы потребителей по составу семьи и т. д.

Оказывается, что спрос на предметы потребления, являющиеся наиболее насущными, предметами первой необходимости, как правило, оказывается малоэластичным, потребность в них потребитель удовлетворяет в первую очередь. Наоборот, спрос на предметы непервой необходимости, особенно предметы роскоши, как правило, отличается большой эластичностью. При увеличении дохода возрастает по преимуществу потребление предметов непервой необходимости.

Анализ коэффициентов эластичности дает возможность делать заключения о степени удовлетворения потребностей по различным продуктам, о желательных изменениях их качества и цены. На основе этого анализа оказывается возможным предсказать изменения в спросе, которые происходят при изменении цены на какой-нибудь продукт, правильно планировать объемы производства и цены на предметы потребления. Используя надлежащую систему цен, можно оказывать желательное влияние на структуру потребления.

Так, под руководством одного из авторов было проведено исследование эластичности спроса на такси в зависимости от тарифа, т. е. изучение реакции населения на изменение стоимости проезда в такси. После того как эта работа была проделана, был разработан и введен новый, более рациональный тариф, приближающий структуру оплаты поездок к соотношению затрат. Для кого оказался более выгоден этот тариф? Нередко принято считать, что от изменения тарифа может быть польза либо государству, либо населению. Обратимся к фактам.

Введение нового тарифа, а он был введен с 1 января 1961 года, дало за прошедшие годы выигрыш населению в сумме более 500 млн. руб. и выигрыш государству за счет снижения себестоимости порядка 300 млн. руб. (интересно отметить, что показатели и результаты весьма точно соответствовали сделанным заранее прогнозам!). Этот двойной эффект объясняется тем, что изменение тарифа вызвало резкое увеличение спроса, причем в особенности на дальние поездки. В результате этого примерно на треть сократились потери от холостых пробегов и простоев. Иначе говоря, население и государство получили теперь те суммы, которые раньше выбрасывались на ветер из-за неправильных тарифов. Вообще, говоря об эффекте оптимального планирования, всегда следует иметь в виду этот источник доходов.

Совершенно аналогичное влияние на структуру спроса осуществлено в авиации изменением цен на билеты для некоторых категорий пассажиров в разное время года. Можно, к сожалению, привести и обратный пример. На железной дороге, где не принята столь гибкая система тарифов, в периоды ненапряженной работы вагоны нередко идут с малой загрузкой, тогда как в остальное время количество пассажиров столь велико, что у билетных касс возникают очереди. Введя дифференциацию цен на билеты, можно было бы добиться более равномерной загрузки железной дороги во все времена года.

Разумеется, изучение потребления проводится не только на основе рассмотрения коэффициентов эластичности. Так как именно в этих вопросах приходится учитывать взаимодействие нескольких сторон, то возникают ситуации, для оптимального разрешения которых с успехом может применяться математическая теория игр. Мы не будем останавливаться здесь на этих применениях. Применяемые математические средства весьма разнообразны.

В экономике, как и в естественных науках, наряду с теоретическим исследованием важное значение имеет эксперимент — опытное проведение тех или иных мероприятий в ограниченных масштабах и изучение их результатов. Однако проведение такого эксперимента не всегда возможно, нередко оно оказывается дорогостоящим и далеко не безобидным. Поэтому представляет большой интерес возможность замены во многих случаях реального экономического эксперимента имитированным экспериментом на вычислительной машине. Оказывается, что, заложив в машину необходимую информацию о той или иной реальной ситуации (изменение цен, рост зарплаты и т. п.), приняв определенные гипотезы о поведении потребителей, можно «проиграть» ее на машине, построить, как говорят, машинную модель действительности, получив в результате определенные количественные характеристики. Такой способ относящийся к так называемому эвристическому программированию, позволяет нередко хорошо предсказывать последствия принимаемых экономических решений, в связи с чем некоторые планово-хозяйственные решения целесообразно апробировать прежде всего именно таким образом.

Одной из важнейших проблем, требующих скорейшего изучения, является проблема размещения и развития производства, освоения новых районов, использования природных ресурсов. Специфика нашей страны, обладающей огромной территорией с разнообразными неравномерно распределенными природными ресурсами, различной плотностью населения, выдвигает эту проблему в первый ряд. По существу своему это экстремальная, многовариантная проблема, которая должна быть разрешена с учетом всех важнейших ограничений (потребности, трудовые ресурсы, имеющиеся в наличии энергетические ресурсы и т. п.). Помимо размещения новых предприятий, приходится также исследовать возможности расширения, а может быть, и закрытия, если это целесообразно, уже действующих предприятий, определять наиболее рациональные сферы влияния отдельных предприятий. Переход к оптимальному планированию размещения и развития производства, основанный на применении ЭВМ и экономико-математических методов, даст возможность значительно повысить эффективность всего народного хозяйства.

Очень важно отметить, что решение указанных важнейших проблем социалистической экономики, а также и многих других проблем, которые мы не упомянули здесь из-за недостатка места, может быть успешно осуществлено лишь при условии системного, комплексного подхода к их изучению. Но именно такой подход характерен для концепции оптимального планирования, так как все эти проблемы рассматриваются как отдельные части одной всеобъемлющей проблемы — оптимального функционирования социалистического хозяйства.

§ 2. Сегодня и завтра концепции математического оптимального планирования

Заканчивая этот краткий очерк, хотелось бы сказать о современном состоянии, значении, возможностях и перспективах фактического использования математических методов в экономической практике, особенно в проблемах народнохозяйственного планирования.

В настоящее время математико-экономические методы расчета с использованием ЭВМ все больше берутся на вооружение нашим народным хозяйством. В ряде министерств, комитетов, крупных хозяйственных объединений и предприятий созданы отделы и группы по применению этих новых методов. Во многих научно-исследовательских, технологических и проектных организациях, в вычислительных центрах и вузах также имеются значительные группы ученых и практиков-экономистов, математиков, инженеров, ведущих теоретическую и экспериментальную работу по развитию и внедрению этих методов. Имеется и несколько институтов, деятельность которых целиком сосредоточена на этой проблематике. Следует сказать, что растет и число научных учреждений, использующих методы оптимального программирования для решения неэкономических задач (автоматика, техника и др.). В частности оптимальное программирование широко используется в исследовании операций — дисциплине, рассматривающей поиск наилучшей целенаправленной системы действий. Число научно-технических работников в области экономической кибернетики и математического программирования исчисляется тысячами. В ряде университетов, экономических, инженерно-экономических и технических вузах созданы факультеты, выпускающие экономистов с повышенной математической подготовкой. Начата подготовка и математиков, специализирующихся в области математико-экономических исследований. Развернута значительная работа по повышению квалификации имеющихся экономических кадров, освоению ими новых математико-экономических методов и электронной вычислительной техники. Непрерывно растет выпуск и получает широкое распространение электронная вычислительная техника, совершенствуется качество ее, в частности качество внешних устройств, делающих ее более приспособленной для планово-экономических расчетов. Важное значение имеет и математическое обеспечение машин, оснащение их обширным комплексом разнообразных программ. Вычислительными машинами обладают теперь не только министерства и исследовательские институты, но и многие предприятия. Это делает возможной широкую машинную обработку экономической информации, начиная с предприятий, что намного облегчает возможность реализации оптимальных расчетов. Идет разработка систем автоматизированного управления по ряду отраслей. В этих системах также находит широкое использование математическое оптимальное программирование.

Наличие подготовленных кадров, широкое распространение и постоянное совершенствование средств вычислительной техники создало возможности для развертывания фронта работ такого рода. По некоторым направлениям применение оптимальных расчетов носит уже довольно массовый и систематический характер и используется многими организациями (например, маршрутизация автомобильных перевозок, обработка банковской информации, сетевое планирование, размещение предприятий и др.).

По многим другим перспективным областям применение этих методов, их разработка и внедрение носят еще экспериментальный единичный характер, и они не получили широкого развития. Несомненно, что нынешнее использование математических методов реализует пока лишь в небольшой мере их потенциальные возможности.

Проведенная хозяйственная реформа должна способствовать более интенсивному применению математических методов расчета с использованием ЭВМ. С одной стороны, использование математических методов при расчете нормативов, необходимых для реализации проводимого совершенствования планирования и управления (цен, платы за фонды, рент, нормативов прибыли и т. д.), а также прогнозирование изменений потребностей и спроса может сделать эти показатели более точными и обоснованными и тем самым будет способствовать полной реализации преимуществ новой системы. Метод оптимизации важен и для формирования самой структуры экономических показателей.

С другой стороны, новая система хозяйственного руководства создает более благоприятные условия для внедрения математических методов оптимизации. Хозяйственные организации становятся более заинтересованными в сокращении затрат, повышении фондоотдачи и т. д. и тем самым в реализации оптимальных решений. Повышение роли экономических показателей, устранение излишних ограничений, совершенствование ценообразования, приводящее к лучшему согласованию интересов предприятия и народного хозяйства в целом, исключают те случаи, когда осуществление решения, оптимального с точки зрения народного хозяйства, оказывалось бы невыгодным с точки зрения интересов предприятия. В прошлом такого рода противоречия нередко тормозили применение математических методов.

Наиболее важным и перспективным и в то же время наименее разработанным является применение методов математической оптимизации в народнохозяйственном планировании.

Социалистическая экономика, которая базируется на единой общественной собственности, по самой своей природе наиболее приспособлена для реализации оптимальных плановых решений. Только в условиях социалистической экономики принципиально возможно осуществление оптимального планирования на высшем уровне — для национальной экономики в целом. В настоящее время имеются все объективные условия, в том числе и научная база, для перехода в недалеком будущем на систему оптимального планирования во всех звеньях хозяйства, однако для реализации этого перехода нужна еще большая подготовительная работа.

Необходимо существенное обогащение и перестройка всей экономической и статистической информации, разработка ее структуры, создание соответствующих технологических средств — вычислительных центров и т. д. Перед экономической наукой, статистикой, математикой ставятся новые большие задачи по научной разработке необходимых экономических показателей, системы планирования и функционирования экономики, методики реализации принципов оптимального планирования, его организации на различных ступенях и уровниях хозяйства, увязки планов в их отраслевом и территориальном разрезах. Требуется разработка объективных методов учета потребностей, принципов оптимальной системы оплаты труда и материального стимулирования и т. д. Особого внимания требует проблема функционирования экономики.

Изучение всех этих моделей, методов их расчета и анализа требует серьезных математических исследований, предъявляет новые требования к математике и вычислительной технике.

Исследования в этом направлении начаты и ведутся в ряде исследовательских институтов: Центральном экономико-математическом институте (ЦЭМИ, директор академик Н. П. Федоренко), Институте математики СО АН СССР (директор академик С. Л. Соболев), Институте экономики и организации производства СО АН СССР (директор член-корр. АН СССР А. Г. Аганбегян), Институте кибернетики АН УССР (директор академик В. М. Глушков), Институте автоматики и телемеханики (директор академик В. А. Трапезников) и др. В развитии этих работ большую роль играют работы тех экономистов и статистиков старшего поколения, которые с энтузиазмом начали работу в этой области, отстаивали и пропагандировали новые методы: ныне покойного академика В. С. Немчинова, профессоров В. В. Новожилова, А. Л. Вайнштейна, А. Л. Лурье и других, а также более молодых ученых — экономистов и математиков, талант которых развернулся именно в этой новой области: К. А. Багриновского, В. Д. Белкина, И. Я. Бирмана, В. А. Булавского, В. А. Волконского, Е. Г. Гольштейна, А. Г Гранберга, Э. Б. Ершова, А. И. Каценеленбойгена, В. Л. Макарова, В. С. Михалевича, Ю. А. Олейника-Овода, В. Ф. Пугачева, И. В. Романовского, Г. Ш. Рубинштейна, Д. Б. Юдина. Однако размах и интенсивность ведущихся исследований еще далеко не соответствуют народнохозяйственному значению данной сложной проблемы и ее объему.

Хотя широкое систематическое осуществление принципов математического оптимального планирования — дело будущего, его методы и положения могут найти значительное использование уже в настоящее время.

На базе математических моделей экономики существенно уточняются наши представления об основных экономических понятиях и количественных закономерностях социалистического народного хозяйства, углубляются и конкретизируются постановка и анализ проблем, что дает возможность получить ряд важных конкретных выводов и правильно подойти к формированию необходимых экономических показателей, рассчитывая и оценивая их пока, может быть, весьма приближенно, в силу неполноценности имеющейся информации.

Многим представляется, что положение концепции оптимального планирования имеет пока чисто теоретическое значение. На самом деле они существенны для конкретного решения очередных практических проблем нашего хозяйства. Например, они позволяют помочь в решении таких вопросов, как установление принципа дифференциации платы за фонды построения рентных платежей, как определение особенностей конструирования цен в отдельных отраслях народного хозяйства — на транспорте, в строительстве и т. д.

Практическая ценность концепции оптимального планирования, доказательство того, что эта методика не является только «теоретизированием», подтверждены тем, что ряд выводов (платность фондов, значение показателя прибыли и др.), сделанных теоретически, совпал с предложениями практиков-организаторов производства, прогрессивных экономистов и техников, выдвинутыми в процессе подготовки хозяйственной реформы.

Опыт работы со всей очевидностью доказал прогрессивность новой системы хозяйствования, способствующей развитию творческой инициативы коллективов, стимулирующей предприятия к поискам внутренних резервов.

Широкое использование оптимальных принципов имеет не только практическое, но и идеологическое значение, помогает глубже и конкретнее понимать отличительные черты, потенциальные возможности и преимущества социалистического хозяйства. В этой связи следует обратить внимание на предложения ряда экономистов-теоретиков об использовании математических моделей в построении курса политической экономии.

Широкое использование оптимального планирования на основе применения математических методов и моделей, более глубокое познание экономических законов социалистической экономики позволят реализовать еще более высокие темпы развития материального производства, осуществить дальнейший рост благосостояния всего советского народа.

ЛИТЕРАТУРА

Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.

Дж. Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., «Прогресс», 1966.

Л. Л. Терехов. Оценки в оптимальном плане. М., «Экономика», 1967.

Н. П. Федоренко. Экономика и математика. М., «Знание», 1967.

В. А. Булавский, Г. Ш. Рубинштейн. Несколько лекций по линейному программированию. Новосибирск, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1965.

А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.

С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1964.

Р. Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. М., «Наука», 1965.

С. Гасс. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961.

Л. В. Канторович. Математические методы организации и планирования производства. Л., Изд-во ЛГУ, 1939. (Перепечатано в сборнике «Применение математики в экономических исследованиях», М., Соцэкгиз, 1959).

Л. В. Канторович и В. А. Залгаллер. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л., Лениздат, 1951.

А. Г. Аганбегян и А. Г. Гранберг. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР. М., «Мысль», 1968.

И. Я. Бирман. Оптимальное программирование. М., «Экономика», 1968.

Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Советское радио», 1964.

Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во иностранной литературы, 1963.

У. Черчмен, Р. Акоф, Л. Арноф. Введение в исследование операций. М., «Наука», 1968.

Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.