К. ЛАНКАСТЕР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

MATHEMATICAL ECONOMICS

Kelvin Lancaster

Professor of Economics
Columbia University

The Macmillan Company,
New York
Collier-Macmillan Limited,
London

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

К. Ланкастер

Перевод с английского
Т. Березневой

Под редакцией
и с послесловием
профессора ЮДИНА Д. Б.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКОЕ РАДИО»
МОСКВА — 1972

УДК 330.115

Ланкастер К. **Математическая экономика.** Нью-Йорк, 1968 г. Пер. с англ. под ред. Д. Б. Юдина. М., «Советское радио», 1972, 464 стр., т. 17000 экз., ц. 1 р. 84 к.

В книге изучаются важные аспекты состояния и поведения моделей экономических систем. Рассмотрены модели «затраты — выпуск», модели равновесия, сбалансированного роста. Удачно систематизированы, четко изложены и наглядно проиллюстрированы экономическими приложениями разделы математических дисциплин, необходимые для анализа поведения, оценки устойчивости системы и оптимизации планирования и управления.

Книга может быть учебным руководством для студентов, аспирантов и практических работников, интересующихся математическими методами анализа экономики и новыми методами планирования и управления.

Рис. 25, библ. назв. 141.

Редакция кибернетической литературы

К. ЛАНКАСТЕР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Пер. с англ. под редакцией **Д. Б. Юдина**

Редактор **Н. Я. Гутчина**
Художественный редактор **В. Т. Сидоренко**
Обложка художника **Б. К. Шаповалова**
Технический редактор **А. А. Белоус**
Корректоры: **Е. П. Озерецкая, Л. А. Максимова**

Сдано в набор 6/X 1971 г. Подписано в печать 13/I 1972 г.
Формат $84 \times 108/_{32}$. Бумага типографская № 2. Объем 24,360 усл. п. л. 24,330 уч.-изд. л. Тираж 17000 экз.
Зак. 1125. Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, п/я 693. Цена 1 р. 84 к.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, Москва, Трехпрудный пер., 9

3-3-14, 1-8-3, 2-2-3
95-72

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Директивы XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 гг. рекомендуют обеспечить широкое применение экономико-математических методов в управлении социалистической экономикой. Поставлена задача последовательно расширять и неуклонно улучшать систему подготовки и переподготовки кадров организаторов производства на всех уровнях.

Количество специалистов — научных и практических работников, заинтересованных в освоении современных экономико-математических методов, растет из года в год. Между тем методика преподавания экономико-математических дисциплин, содержание и направленность учебных руководств еще не соответствуют современным задачам и требованиям.

Во многих экономических вузах математические дисциплины читаются по схеме, давно сложившейся главным образом в связи с потребностями технических факультетов. В итоге будущие экономисты — теоретики и плановые работники — получают большое количество информации, которую они в дальнейшем не используют. При этом выпускники нередко остаются неподготовленными к освоению современных методов анализа поведения экономических систем. Дополнительная математическая подготовка, требуемая для этого, не всем доступна. Необходимо изучение ряда специальных вопросов из различных разделов математики, изложенных в различных учебниках и монографиях, как правило, без учета специфических требований, предъявляемых современным состоянием экономико-математической литературы. Книги типа монографий. Д. Гейла и С. Карлина написаны чрезмерно формально и предназначены, скорее, для узких специалистов, чем для массового читателя.

Предлагаемый перевод книги К. Ланкастера «Математическая экономика» представляет собой полезное пособие для широкого круга студентов, аспирантов, инженеров и практических работников, понимающих значение математики в экономике, желающих овладеть ее методами, но не имеющих возможности тратить годы на предварительную математическую подготовку.

В книге Ланкастера удачно собраны, систематизированы, четко изложены на современном уровне и хорошо проиллюстрированы экономическими приложениями разделы математических дисциплин, без которых в настоящее время не обойтись ни специалисту в области экономической теории, ни хозяйственному руководителю, ответственному за выбор решений. Значительную часть книги занимает анализ различных аспектов состояния и поведения макромоделей экономических систем, составляющих основу содержания современной математической экономики. Математический и прикладной разделы книги превосходно взаимосвязаны и составляют единое целое.

В переводе книги исправлены многочисленные опечатки и некоторые небрежности и погрешности оригинала; опущен при переводе § 7.4, содержащий ошибочный пример, и некоторые несущественные сноски; несколько расширена библиография.

Некоторую неудовлетворенность оставляет перевод терминов и понятий, связанных с моделями, впервые рассмотренными иностранными авторами. Мы вынуждены были считаться с тем, что перевод этих терминов (иногда, скорее, дословный, чем смысловой) уже встречался в переведенной на русский язык зарубежной экономико-математической литературе (Р. Аллен, Д. Гейл, С. Карлин и др.). Чтобы не увеличивать и без того значительный разнобой в экономико-математическом словаре, мы решили сохранить не всегда удачную, с нашей точки зрения, терминологию, встречающуюся в ранее выполненных переводах.

Можно надеяться, что изучение книги Ланкастера обеспечит многим читателям необходимый минимум знаний для самостоятельного анализа экономико-математических моделей и достаточную подготовку для того, чтобы свободно ориентироваться в современной экономико-математической литературе.

ПРОФЕССОР ЮДИН Д. Б.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга, по мнению автора, должна удовлетворить две важнейшие потребности экономистов — научных и практических работников. Одну — в учебнике для аспирантов, специализирующихся по математической экономике, другую — в справочнике для экономистов-практиков, которые хотели бы быть в курсе достижений экономической науки. В настоящее время нет книги, решающей эти задачи, хотя имеется ряд книг, посвященных отдельным теоретическим или прикладным проблемам экономической науки.

В течение ряда лет автор читал курс математической экономики в Лондонской экономической школе, в университете Джона Хопкинса и в Колумбийском университете. Для полного освоения курса студентам приходилось просматривать различные источники, которые сильно различались как по методам и степени трудности, так и по терминологии и обозначениям. Таким образом, назрела необходимость в источнике с единым подходом.

Примерно с 1950 г. получили широкое распространение математические методы экономического анализа. Цель настоящей книги — изложить эти методы наряду с классическими. «Новая математическая экономика» располагает мощными методами и в некоторых случаях позволяет значительно упростить анализ по сравнению с классическими методами.

Предполагается, что читатель имеет некоторое представление об элементарных методах анализа. Никакие другие предпосылки, исключая желание изучать предмет, не требуются.

В книге много внимания уделено изложению законченных и строго обоснованных методов. При этом несущественные доказательства опущены. Математическое дополнение расширяет круг специалистов, для которых книга может быть полезной.

Для удобства изложения экономический анализ отделен от чисто математического материала. В начале каждой главы перечислены параграфы математического дополнения, необходимые для ее понимания. Экономический анализ охватывает методы линейной и нелинейной оптимизации, модели типа «затраты — выпуск», модели анализа производственных процессов, неоклассические и теоретико-множественные статические экономические модели и современную теорию общего равновесия. Кроме того, в этих главах излагаются модель фон Неймана и другие модели сбалансированного роста, теоремы о магистралях и, наконец, современный анализ устойчивости. Математическое дополнение включает в себя элементы теории множеств, линейной алгебры, основы теории выпуклых множеств и и выпуклых функций, свойства непрерывных отображений, топологические идеи, вариационное исчисление и смежные вопросы. Математическое дополнение построено на достаточно современном уровне.

В книге есть несколько новых результатов и некоторые модификации и обобщения уже существующих. Однако автор не ставил перед собой цель — развитие новых методов экономического анализа. Основная цель книги — помочь как можно большему числу экономистов продвинуться возможно ближе к переднему краю экономической науки.

К. Л.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Математическая экономика является не самостоятельной дисциплиной, а разделом экономической теории. Сфера действия математической экономики постоянно меняется. То, что вчера считалось передовой теорией математической экономики, сегодня уже просто является математической экономикой, а завтра будет практическим аппаратом для анализа экономических процессов. Мы уже видели, как это случалось в прошлом, как в курсы для студентов включались вопросы, которые в свое время считались специальными проблемами для научных работников — экономистов.

За последние двадцать лет новые математические методы проникли во все области науки. Расширилось и их применение к математической экономике. Математическая экономика развивает, кроме того, и свои специфические методы, которые не являются простым приложением хорошо известных методов из других дисциплин.

В настоящее время хорошо подготовленный экономист-теоретик должен знать существенно больше, чем избранные главы из современного учебника по анализу. Он должен свободно владеть многими методами современной математики. К сожалению, все эти вопросы нигде не собраны вместе. Курс линейной алгебры содержит много тем, не представляющих интереса для экономиста. В то же время в нем могут отсутствовать некоторые понятия, важные для экономиста, но не имеющие значения для физика или математика. Одна из целей этой книги — собрать и объединить как можно больше таких глав из различных курсов математики.

Однако математическая экономика не является частью математики. Математическую экономику характеризует приложение различных разделов математики и развитие новых методов для решения новых задач. Экономисты стали настоящими новаторами в применении математических методов к своим потребностям. Цель настоящей книги — наглядно проиллюстрировать этот процесс приложения, применения и рационализации.

История математической экономики фактически до сих пор не написана. Среди историков экономической мысли мало приверженцев математических методов. В развитии математической экономики можно различать три основные стадии. Первая — стадия важных статей отдельных специалистов — почти полностью упущена экономистами вообще и англо-американской ветвью в частности. За этой стадией в тридцатые годы возникла и получила развитие неоклассическая математическая экономика *). Этот процесс продолжался до начала пятидесятых годов. В течение примерно пятнадцати лет новые методы все глубже проникали в теорию и практику экономики. Это привело к тому, что можно назвать «новой» математической экономикой.

Неоклассическую математическую экономику, основной математический аппарат которой — производная и уравнение, можно рассматривать, как полностью усвоенную экономической теорией. Однако, несмотря на это, в ней осталось много технических проблем, интересных для математически настроенного исследователя. Освоение новой математической экономики, математическая основа которой — векторы, выпуклые множества и неравенства, едва началось. Настоящая книга предназначена для того, чтобы ускорить этот процесс.

1.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КНИГИ

Книга содержит, не считая введения, одиннадцать глав, посвященных собственно математической экономике, в которых экономические модели анализируются, главным обра-

*) Неоклассическая школа в политической экономии представляет собой субъективно-психологическую теорию ценности или теорию предельной полезности. Неоклассики (Джевонс и Маршалл в Англии, Менгер и Визер в Австрии, Кларк и Фишер в США, Вальрас во Франции, Парето в Швейцарии) считали, что конкуренция — регулятор экономической активности — устанавливает равновесие между производством и потреблением. Критерий развития экономики в неоклассической теории — максимизация полезности для потребителя и максимизация прибыли для производителя. Неоклассическая теория развила и далеко продвинула математическую экономику. В книге Ланкастера излагаются не апологетические вопросы неоклассической экономической теории, а формальный математический аппарат экономического анализа, представляющий безусловный интерес для исследования экономических процессов в социалистическом обществе. (*Прим. ред.*)

зом, с точки зрения их математических свойств. За ними следует математическое дополнение, цель которого — удовлетворить потребность экономиста в математическом аппарате. Основные главы и математическое дополнение построены как замкнутая система, в которой дополнение содержит все сведения из математики, необходимые для содержательных глав, а экономические главы иллюстрируют использование почти всех методов, приведенных в дополнении. Необходимая математическая основа вместе со ссылками на соответствующие разделы дополнения указывается в начале каждой главы.

Основные главы сгруппированы в три части. В первой части (главы 2—5) рассматривается, в основном, теория оптимизации, включая линейное программирование, классические методы решения задач на условный оптимум и теорию Куна — Таккера. Во второй части (главы 6—9) обсуждаются различные статические экономические модели, в частности, модель «затраты — выпуск» (модель Леонтьева), модель анализа производственных процессов, последние неоклассические модели и современная теория общего равновесия. Третья часть (главы 10—12) содержит многосекторные динамические модели: модель фон Неймана и другие модели сбалансированного роста, модели оптимального роста и теоремы о магистралях. Здесь же приводится анализ устойчивости.

Математическое дополнение включает в себя линейную алгебру, выпуклые множества и конусы, функции и отображения, некоторые топологические понятия, свойства специальных матриц, дифференциальные уравнения и элементы вариационного исчисления. Во всех случаях, исключая параграфы, содержащие топологические методы, и дополнение Д11, доказательства приводятся полностью.

Изложение материала книги проводится, как правило, полно и строго. Эвристические доказательства используются лишь в тех местах, где строгость потребовала бы методов, выходящих за рамки этой книги. Можно указать ряд вопросов, которые могли бы претендовать на место в книге подобного рода. Из-за недостатка места необходимо было произвести выбор. Однако автор полагает, что он включил все темы, имеющие важное значение для современной экономической теории.

Автор предлагает следующий порядок использования книги в качестве учебника:

1. *Общая подготовка и теория оптимизации.* Дополнения Д1 — Д4 (исключая § Д4.7) и Д8 (исключая § Д8.7, Д8.8), за которыми следуют гл. 2, 3, 4 (подчеркивая утверждения § 4.5) и гл. 5 (§ 5.1—5.5).

2. *Основные экономические модели.* Дополнения Д5, Д6 (кроме § Д6.3) и Д7 (§ Д7.1 — Д7.3), затем гл. 6—10 (исключая § 10.5).

3. *Наиболее современные вопросы* (в любом порядке).
(*i*) Теория роста. Дополнения Д8 (§ Д8.7, Д8.8) и Д11 (§ Д11.1, Д11.2), затем гл. 10 (§ 10.5) и 11;
(*ii*) Теория устойчивости. Дополнения Д10 и Д7 (§ Д7.4), гл. 12.
(*iii*) Общее равновесие. Дополнение Д9 и гл. 9.

4. *Подведение итогов.* Дополнение Д6, затем серьезное изучение § 4, 5 гл. 4, гл. 5 (§ 5.6, 5.7). Наконец, § Д7.5 и Д11 (§ Д11.3, Д11.4).

Согласно опыту автора, из основного материала можно составить годовой курс лекций по данному учебнику. Материал математического дополнения часто превышает минимальные потребности основных глав. Поэтому необходимо проявить некоторую осторожность, выбирая уровень и глубину этого материала.

1.3. УКАЗАНИЯ ПО ЛИТЕРАТУРЕ

В настоящее время нет такой книги, которая охватывала бы материал так полно, как данная. Однако ряд книг в некоторых основных областях будут полезны для дополнительного чтения. На все эти книги есть ссылки в соответствующих местах. Они классифицируются как более элементарные, приблизительно того же уровня, или более формальные по сравнению с данной книгой. Классификация относится только к характеру изложения, но не к содержанию.

Более элементарная литература

Баумоль. *Экономическая теория и исследование операций.* (Баумоль [2]).

(Baumol. *Economic Theory and Operations Research.*)

Баумоль дает превосходный конспект большого числа методов, разработанных в последние годы, и некоторых их приложений. Книгу Баумоля можно использовать в качестве обзора. Эта книга особенно полезна тем, что в ней рассматриваются отдельные вопросы, не освещенные в настоящей работе.

Dorfman, Samuelson, Solow. *Linear programming and economic analysis.* (Дорфман, Самуэльсон и Солоу).

В первых главах по линейному программированию и его непосредственным приложениям авторы используют только основы линейной алгебры. Последние главы содержат весьма важный материал, особенно гл. 12 («Теория роста») и 13 («Общее равновесие»). В гл. 13 делается единственная попытка изложить теорию общего равновесия на более элементарном уровне, чем в гл. 9 настоящей книги.

Аллен. *Математическая экономика* (Аллен [2]).

(Allen. *Mathematical Economics.*)

Книга Аллена прекрасно освещает односекторные экономические модели. Линейные методы представлены в книге достаточно широко, но изложение оставляет желать лучшего.

Литература примерно того же уровня

Гейл. *Теория линейных экономических моделей* (Гейл [1]).

(Gale. *The theory of linear economic models.*)

Автор считает, что в книге Гейла лучшее по сравнению с перечисленными работами изложение теории линейного программирования. Гейл рассматривает также модели сбалансированного роста. Обозначения Гейла не являются стандартными, так как он использует вектор-строку там, где обычно используется вектор-столбец, и наоборот. Его матрично-векторные соотношения должны быть транспонированы для того, чтобы можно было сравнивать их с используемыми в настоящей книге.

Более формальная литература

Карлин. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике* (Карлин [1]).

(Karlin. *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics.*)

Книга в сжатой форме охватывает большое количество материала. Замечания Карлина очень интересны, а библиография обширна. Эту книгу, несомненно, можно рекомендовать для изучения после настоящей книги, хотя только гл. 5, 7, 8, 9 и три дополнения связаны с темами, рассматриваемыми в нашей книге.

D e b r e u. *Theory of value* (Дебре [1]).

Дебре дает более полное описание современной обобщенной теории производства, теории потребления, а также теории общего равновесия. Изложение материала здесь по стилю строгое, однако, часто важные этапы в доказательствах опущены или рассматриваются вскользь. Это трудная, но полезная книга, особенно для тех, кто хочет продолжить изучение общего равновесия, начатое в гл. 9 настоящей книги.

M o r i s h i m a. *Equilibrium stability and growth* (Моришима [1]).

Работа содержит важный материал по теории роста. Все утверждения здесь тщательно аргументированы. Но книгу трудно читать до того, как прочитаны гл. 10 и 11 настоящей книги.

Помимо упомянутых работ более специальная литература указывается в сносках в самой книге. На основании этих ссылок не может быть составлена полная библиография по математической экономике. Их назначение — помочь читателю найти дальнейшую литературу в этой области. Иногда сноски отсылают нас к первоисточникам, иногда к статьям, излагающим те же вопросы с другой точки зрения. Некоторые статьи из «Эконометрики» предлагают читателю некоторые другие приложения методов, приведенных в книге.

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

2. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Бóльшая часть этой главы потребует только предварительной подготовки по теории множеств и теории функций, не более той, какая дана в математическом дополнении Д1. Параграф 2.6 требует дополнительных знаний по выпуклым функциям (§ Д8.5) и выпуклым множествам (§ Д4.1, Д4.2).

2.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Оптимизация — нахождение всех максимизирующих или минимизирующих элементов или седловых точек **) — лежит в основе экономического анализа. В пассивных экономических моделях (таких, как изучающие общее равновесие) нас интересует оптимальное поведение лица, принимающего решение. В активных моделях (таких, как модели эффективного роста) мы сами заинтересованы в получении оптимума. В последние годы появилась тенденция к переходу от моделей типа «затраты — выпуск» к моделям анализа производственных процессов, от простейших моделей роста к моделям, изучающим траектории оптимального и эффективного роста. В макроэкономических политико-ориентированных моделях, где оптимизация в основном порождена параметрическими оценками, направление исследований

*) Возникновение и развитие теории оптимизации связано, главным образом, с работами по исследованию операций и по теории решений.

**) Седловые точки не будут рассматриваться до гл. 5.

изменилось в сторону более сложных моделей выбора оптимальной политики.

Действительно, оптимизация при соблюдении некоторых ограничений многими авторами рассматривалась как определяющая сущность экономики *). Значительное развитие теории оптимизации за последние двадцать лет привело к целому ряду различных методов анализа. Поэтому представляется желательным дать общее описание постановки задачи оптимизации и показать, в какой мере различные методы соответствуют этой постановке.

2.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассматриваемой задаче все переменные будут задаваться как составляющие векторов из R^n **)

Кроме вектора x будем рассматривать:

а) *допустимое множество* K ***). В задаче будут учитываться только те векторы x, которые принадлежат K ($x \in K$);

б) однозначную непрерывную *целевую функцию* $f(x)$, значения которой будут оптимизироваться при условии, что $x \in K$.

Таким образом, можно формально следующим образом записать задачу максимизации. *Найти* $x^* \in K$ *такой, что* $f(x^*) \geqq f(x)$ *для всех* $x \in K$.

Если такой x^* существует, то задача имеет *слабый глобальный максимум*. Слабый, так как удовлетворяет нестрогому (слабому) неравенству, глобальный — потому, что неравенство справедливо для всех $x \in K$. Не следует путать

*) Например, хорошо известное утверждение Робинса гласит: «Экономика — это наука, которая изучает поведение человека как взаимоотношение целей и ограниченных возможностей». Эта идея, которая фактически является формулировкой общей задачи оптимизации, кажется, впервые была выдвинута Менджером.

**) Будем рассматривать n-мерный вектор x как функцию его индексов $i = 1, \ldots, n$, определенную перечислением. Если заменить индексы непрерывным параметром t, $x(t)$ может быть рассмотрен как бесконечно-мерный аналог вектора из R^n. $x(t)$ является неизвестной функцией t, а не точкой, которая может быть задана перечислением ее координат. Задачи оптимизации, в которых неизвестными являются функции, а не точки, в лучшем случае сводятся в область задач *вариационного исчисления*. Однако здесь и в последующих трех главах такие задачи рассматриваться не будут. Методы подобного рода обсуждаются в дополнении Д11.

***) Здесь используется стандартная терминология линейного программирования. Мы будем использовать ее во всех видах задач оптимизации.

глобальный оптимум с оптимумом в задаче без ограничений. Последнее обозначает, что $K = R^n$. Будем считать максимум *сильным*, если можно найти такой x^*, что $f(x^*) > f(x)$ для всех $x \in K$ $(x \neq x^*)$.

Существование слабого оптимума допускает неединственность оптимальной точки, так как любой x, удовлетворяющий уравнению $f(x) = f(x^*)$, также является оптимальной точкой. Сильный оптимум всегда единственен.

Если поменять знак неравенств, получим слабый или сильный минимум. Минимум $f(x)$ дает максимум для $(-f(x))$. Значение x^* часто называют просто решением задачи на оптимум. Во многих экономических моделях решениями называют и другие понятия. Чтобы не путать их, обычно решение нашей задачи называют *оптимальным решением*.

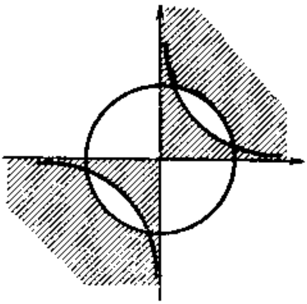
Большинство известных методов не пригодно для решения поставленной выше задачи. Обычно можно решить задачу следующего вида: *Найти* $x^* \in K$, *такой, что* $f(x^*) \geqq f(x)$ *для всех* $x \in (E \cap K)$, *где* E — *окрестность* x **). Такая точка называется слабым *локальным* максимумом. Аналогично можно определить сильный локальный максимум, а также слабый или сильный локальный минимум. Некоторые авторы используют термины *относительный* и *абсолютный*, а не локальный и глобальный оптимум.

Очевидно, что, если функция $f(x)$ вообще имеет оптимум, она должна иметь глобальный оптимум, и он должен быть также локальным. С другой стороны, локальный оптимум не обязательно будет глобальным. Прежде всего нас интересует глобальный оптимум. Интересно выяснить условия, которые надо наложить на постановку задачи для того, чтобы локальный оптимум был также и глобальным. Такие условия (применимые во многих экономических ситуациях) будут приведены ниже в этой главе. Если они не удовлетворяются, придется применить специальные процедуры (такие, как перечисление и сравнение всех локальных оптимумов), чтобы установить глобальный оптимум. Постановка задачи сама определяет, будет ли оптимум сильным или нет. Следует заметить, что сильный локальный оптимум не обязательно единственен, так как $f(x)$ может принимать оптимальное значение в нескольких различных точках, каждая из которых будет сильным локальным оптимумом.

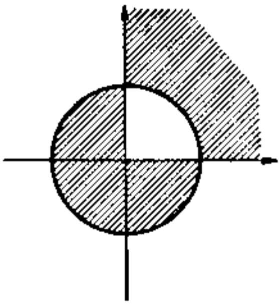
*) Заметим, что нельзя сказать «для всех $x \in E$» вместо «$\in (E \cap K)$». Анализ задачи существенно зависит от существования точек из E, не принадлежащих K.

2.3. ОГРАНИЧЕНИЯ И ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО

Допустимое множество может быть определено несколькими приемлемыми способами. В дискретном случае (в случае дискретных переменных) оно даже может быть описано перечислением. Однако типичное допустимое множество определяется равенствами или неравенствами, описывающими соотношения между переменными. Соотношения, которые определяют допустимое множество, называются *ограничениями* задачи. Одно ограничение определяет некоторое множество значений переменных. Если ограничений больше чем одно, возможные значения переменных должны удовлетворять всем ограничениям. Таким образом, допустимое множество является *пересечением* всех множеств, определяемых каждым из ограничений. На рис. 2.1, *а* рассматриваются два ограничения:



а)



б)

Рис. 2.1. Допустимые множества.

$$x_1^2 + x_2^2 - k^2 \leqq 0 \quad \text{и} \quad c - x_1 x_2 \leqq 0.$$

Первое ограничение определяет круг радиуса k, второе — область, отделенную от начала координат двумя ветвями равнобочной гиперболы.

В этом случае допустимое множество определяется двумя жирно очерченными незаштрихованными областями на рисунке. Одна из них находится в положительном квадранте, другая — в отрицательном. Обычно интерес представляет только одна из этих областей из-за естественного в ряде случаев ограничения $x_1, x_2 \geqq 0$, которое исключает область, расположенную в отрицательном квадранте.

Выделим ограничения типа $x_1, x_2 \geqq 0$. Будем называть их *прямыми* ограничениями на переменные. Ограничения типа представленных выше окружностью и гиперболой будем называть *функциональными* ограничениями. Более типично, чем на рис. 2.1, *а*, связь между функциональными и прямыми ограничениями дана на рис. 2.1, *б*. Здесь функциональное ограничение задает круг, а прямые ограничения оставляют только четверть этого круга.

Оба рассмотренных допустимых множества ограниченны, т. е. они могут быть заключены в окружность конечного радиуса. Если на рис. 2.1, *а* опустить первое ограничение и оставить только неравенство, определяемое гиперболой, и прямые ограничения, то допустимое множество будет *неограниченным*.

Ограничения задают допустимое множество, однако оно может быть пустым. Вернемся к рис. 2.1, *а*. Если достаточно сократить радиус круга, окажется, что не существует точек, лежащих внутри круга и в области, определяемой ветвями гиперболы. Будем называть ограничения *несовместными*, если допустимое множество пусто.

Для применения некоторых методов и для того, чтобы гарантировать, что локальный оптимум является глобальным, мы требуем выпуклости допустимого множества. Допустимые множества на рис. 2.1 (рис. 2.1, *а* учитывает неотрицательность переменных) выпуклы. Поменяем на рис. 2.1, *б* в ограничении, описываемом окружностью, знак на обратный. Тогда допустимое множество есть положительный квадрант без четверти круга с центром в начале координат. Эта область не выпукла.

Границы допустимых множеств важны при рассмотрении задач оптимизации. Изучим их более подробно. Пусть допустимая область определена неравенством $x_1^2 + x_2^2 - k^2 \leqq 0$. Для любой точки из допустимого множества x_1^*, x_2^* выполняется либо

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} - k^2 < 0,$$

либо

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} - k^2 = 0.$$

В первом случае можно найти такую окрестность точки x_1^*, x_2^*, что неравенство будет выполняться для любой точки из этой окрестности. Тогда x_1^*, x_2^* — *внутренняя* точка допустимого множества: она принадлежит множеству вместе с некоторой окрестностью.

Если же точка x_1^*, x_2^* удовлетворяет равенству, то в любой окрестности x_1^*, x_2^* существуют такие точки x_1', x_2' и x_1, x_2, что $x_1'^2 + x_2'^2 - k^2 < 0$, а $x_1^2 + x_2^2 - k^2 > 0$. В этом случае x_1^*, x_2^* — *граничная* точка, поскольку любая ее окрестность содержит допустимые и недопустимые точки.

Уравнение $x_1^2 + x_2^2 - k^2 = 0$ определяет границу рассматриваемого допустимого множества. Поскольку здесь заданы нестрогие ограничения, граница является частью допустимого множества. В этом случае допустимое множество *замкнуто*. Если же ограничения заданы в виде $x_1^2 + x_2^2 - k^2 < 0$, граница не принадлежит допустимому множеству. В этом случае допустимое множество *открыто*. В замкнутом множестве каждая точка либо внутренняя, либо граничная.

В дальнейшем при исследовании задач оптимизации будет предполагаться, что *допустимое множество замкнуто*; в противном случае задача часто не имеет решения *).

Обычно допустимое множество определяется не одним, а несколькими ограничениями. Рассмотрим допустимое множество, определенное несколькими неравенствами, и в нем точку x^*. Говорят, что данное ограничение *эффективно* в точке x^*, если оно обращается в равенство в точке x^*. В противном случае ограничение *не эффективно* в точке x^*. Гиперболическое ограничение $c - x_1x_2 \leqq 0$ эффективно в в точке $(c^{1/2}, c^{1/2})$ и не эффективно в точке $(2c^{1/2}, 2c^{1/2})$.

Ограничение, определенное как равенство, конечно, всегда эффективно.

2.4. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Будем рассматривать общую задачу оптимизации, сформулированную в следующей стандартной форме. Рассмотрим задачу максимизации:

$$\max f(x), \quad x = [x_j], \quad j = 1, \ldots, n,$$

1) $g^i(x) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$

2) $x_k \geqq 0, \quad k \in S,$

*) Рассмотрим задачу оптимизации $f(x) = x$ на открытом множестве $K = \{x \mid 0 < x < 1\}$. Для каждого x, достаточно близкого к 1, существует $x' \in K$, $x' > x$. Следовательно, $f(x)$ ограничена (< 1), но не достигает максимума.

где S — некоторое подмножество множества индексов $(1, \ldots, n)$, $f(x)$ — целевая функция, x — n-мерный вектор переменных задачи. Ограничения (1) — функциональные ограничения; ограничения (2) — прямые. Функции f, g^i предполагаются, если не оговорено противное, непрерывными функциями из классов C^1 или C^2 в зависимости от потребностей.

Удобно иметь все неравенства одного знака. Если же встретятся неравенства вида $\phi^i(x) \geqq 0$, всегда можно, обозначив $g^i = -\phi^i$, свести систему к стандартной форме. Естественно, что знак неравенства в стандартной форме произволен. Приведенный выше выбор знака для задачи на максимум (и обратные знаки в задаче на минимум) естествен во многих экономических задачах и в задачах линейного программирования. Обычно в задачах, использующих методы Куна и Таккера, неравенства записываются по-другому. Однако мы сохраним приведенное выше соглашение о знаке для всех задач.

Функциональное ограничение всегда можно представить в виде *неравенств*. Для этого ограничение вида $\phi(x) = 0$ представляют в виде пары условий $\phi(x) \leqq 0$ и $-\phi(x) \leqq 0$. В важном случае, когда все ограничения — равенства, целесообразно оставить эту форму.

Прямые ограничения (2), которых может и не быть (S может быть пустым множеством), всегда записывают, как условия на неотрицательность. Такой знак прямых ограничений естественно сохранить и в задаче на минимум, в которой знаки неравенств в функциональных ограничениях меняются на противоположные. Все прямые ограничения можно представить в таком виде, обозначая $x_k' = -x_k$, если в начальных условиях $x_k \leqq 0$, или обозначая $x_k' = x_k - b$, если $x_k \geqq b$.

Чтобы обеспечить замкнутость допустимого множества, предполагается, что все неравенства записаны как нестрогие.

Задача на оптимум, вообще говоря, не всегда имеет решение. Задача $\max(x_1 + x_2)$ при условии, что $x_1 - x_2 \leqq 0$, имеет неограниченное допустимое множество и не имеет решений: для любого x можно найти другой допустимый вектор, дающий большее значение целевой функции. Тем не менее можно выделить широкий класс задач, для которых гарантируется существование оптимума.

Теорема Вейерштрасса. *Непрерывная функция, определенная на непустом замкнутом ограниченном* *множестве, достигает максимума (минимума) по крайней мере в одной точке этого множества.*

Поскольку обычно целевая функция берется непрерывной, а допустимое множество замкнутым, то ограниченность допустимого множества — единственное необеспеченное условие. Во многих случаях допустимое множество будет ограничено, однако это не будет очевидным без соответствующего исследования. Будет установлено, что теорема Вейрштрасса дает *достаточные* условия оптимума. Задачи, в которых не выполняются условия теоремы, могут иметь оптимум *).

Задача на оптимум может, конечно, быть и тривиальной. Функция $f(x) = c$ при $a \leqq x \leqq b$ (x — скаляр) имеет и максимум и минимум, равные c.

2.5. ОБЩИЙ ПРИНЦИП РЕШЕНИЯ

Оптимальная точка должна лежать в допустимом множестве. Это либо внутренняя, либо граничная точка множества. Пусть оптимальная точка является внутренней. Тогда существует окрестность, содержащая эту точку и целиком лежащая в допустимом множестве, причем рассматриваемая точка оптимальна относительно точек этой окрестности. Такая точка должна удовлетворять обычным требованиям к безусловному оптимуму, то-есть она должна быть критической точкой f ($f_j = 0$ для всех j) **).

Пусть теперь оптимальная точка лежит на границе. Тогда в любой ее окрестности имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие допустимому множеству. Поэтому, вообще говоря, нельзя сказать, что эта точка является оптимальной относительно точек своей окрестности. Граничная оптимальная точка не обязательно должна быть критической точкой f.

Таким образом, имеем общий принцип решения:

Решение общей задачи на оптимум: max (*или* min) $f(x)$ *при* x, *принадлежащих замкнутому допустимому множеству* K, *если оно существует, является либо критической*

*) Если $f(x)$ — возрастающая функция, а допустимое множество ограничено сверху (а снизу нет), то, очевидно, что $f(x)$ будет иметь максимум.

**) Здесь $f_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. (*Прим. перев.*)

точкой функции f (x), либо граничной точкой множества K либо и тем и другим одновременно.

Мы выделили два типа оптимальных точек — *внутренний* и *граничный* оптимумы. Это показано на рис. 2.2, *а*, *б*. На обоих рисунках эллиптические кривые представляют линии (или в общем случае поверхности) уровня целевой

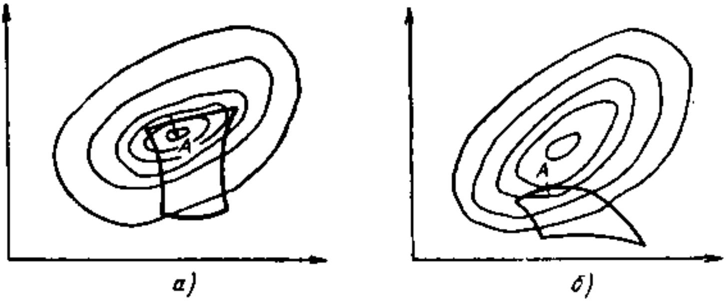


Рис. 2.2. Внутренний и граничный оптимумы.

функции, а жирно выделенная область есть допустимое множество. Оптимальная точка A является внутренним оптимумом на рис. 2.2, *а* и граничным на рис. 2.2, *б*.

В принципе задача оптимизации может быть решена следующим образом. Находятся критические точки $f(x)$, затем вычисляются значения $f(x)$ вдоль границы, и, наконец, сравнивая полученные при этом значения целевой функции, выбираются точки, дающие максимум или минимум функции $f(x)$. На практике этот подход к решению задачи оказывается слишком трудоемким.

Если $f(x)$ не является всюду дифференцируемой, то вместе с критическими и граничными точками необходимо исследовать и точки, в которых $f(x)$ не дифференцируема.

2.6. УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМА *)

Обычно интерес представляет глобальный оптимум целевой функции. Однако большинство известных методов оптимизации позволяет вычислить только локальный оптимум. Поэтому большое значение имеют условия, гаранти-

*) Этот параграф требует знания теории выпуклых функций (§ Д8.5) и выпуклых множеств (§ Д4.1, Д4.2).

рующие, что локальный оптимум является глобальным. Вообще говоря, исследование свойств некоторого локального оптимума не покажет нам, является он глобальным или нет. Однако существуют такие свойства общей структуры задачи, которые могут гарантировать, что *каждый* локальный оптимум будет и глобальным. Эти условия, основанные на структуре задачи, являются *достаточными*, но не необходимыми.

Частные условия, установленные ниже, важны, так как они выполняются в большинстве типичных для экономической теории задач на оптимум.

В задаче оптимизации непрерывной функции $f(x)$ на замкнутом допустимом множестве K каждый локальный оптимум будет и глобальным, если:

а) $f(x)$ — *вогнутая (выпуклая вверх) функция в задаче максимизации и выпуклая в задаче минимизации; и*

б) K — *выпуклое множество.*

В экономической теории типичные функции, которые необходимо максимизировать, обычно вогнуты, а допустимые множества очень часто выпуклы. Поэтому приведенные выше условия имеют широкое применение. Указанные условия выполняются в таких классических примерах задач оптимизации в экономике, как теория потребительского выбора и теория производства. В сложных моделях приходится тщательно исследовать задачу оптимизации, чтобы определить, выполняются ли условия глобального оптимума.

Покажем, что приведенные условия являются достаточными для совпадения локального и глобального оптимумов. Предположим противное. Пусть $f(x)$ — выпуклая вверх функция, допустимое множество K выпукло, x^* — глобальный максимум, а x' — точка локального максимума, не являющегося глобальным.

По определению выпуклой вверх функции имеем

$$f(kx^* + (1-k)x') \geqq kf(x^*) + \\ + (1-k)f(x'), \quad 0 < k < 1.$$

Поскольку x^* определяет глобальный максимум, а x' — нет, то $f(x^*) > f(x')$; тогда

$$kf(x^*) + (1-k)f(x') > f(x'), \quad 0 < k < 1,$$

$$f(kx^* + (1-k)x') > f(x'), \quad 0 < k < 1.$$

Рассмотрим теперь окрестность x', такую, что x^* не лежит в ней. Тогда $x = kx^* + (1 - k)x'$ принадлежит этой окрестности для достаточно малого $k (k > 0)$. Кроме того, поскольку K — выпуклое множество, $x \in K$. Мы показали, что $f(x) > f(x')$. Это противоречит тому, что x' — точка локального максимума. Таким образом, x' не может определять локальный максимум, если $f(x') \neq f(x^*)$, то-есть, если x' не глобальный максимум.

По приведенным выше причинам ясно, что если x^* и x' дают глобальный максимум, то и любая их выпуклая линейная комбинация также является глобальным максимумом, так как

$$f(x) \geqq kf(x^*) + (1 - k) f(x') = f(x^*) = f(x').$$

Таким образом, задача, удовлетворяющая условиям глобального оптимума, имеет либо *единственный* оптимум, либо бесконечное множество таких оптимумов.

Пусть $f(x)$ строго вогнута, а x^* и x' — различные точки глобального оптимума. Рассмотрим выпуклую комбинацию этих точек x. Имеем

$$f(x) = f(kx^* + (1 - k)x') > kf(x^*) + \\ + (1 - k) f(x') = f(x^*) = f(x').$$

Однако $f(x^*)$ — глобальный оптимум и $f(x^*) \geqq f(x)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, точки x^* и x' должны совпадать, и оптимум единственен.

Таким образом, установлено следующее:

Если функция f строго вогнута на выпуклом множестве, то оптимум единственен.

Приведенные выше условия можно расширить, чтобы включить важные в экономической теории случаи, в которых целевая функция не вогнута, а квазивогнута (см. дополнение Д8, § Д8.6) и возрастает. Под эту категорию, в частности, подходят функции полезности, благосостояния и производственные функции при возрастании эффективности при изменении масштаба производства.

Для выполнения условий глобального оптимума в задаче на максимум достаточно, чтобы $f(x)$ была положительным монотонным преобразованием вогнутой функции, а K — выпуклым множеством.

Расширенные условия легко доказываются. Пусть $f(x)$ есть положительное монотонное преобразование некоторой функции $F(x)$. Из того, что $F(x^*) \geqq F(x)$, следует, что

$f(x^*) \geqq f(x)$, и наоборот. Таким образом, функция $f(x)$ достигает максимума в той же точке, что и $F(x)$. Любая квазивогнутая функция, возрастающая по всем компонентам x, может быть представлена как положительное монотонное преобразование некоторой вогнутой функции.

Приведенные выше доказательства проводились для задачи максимизации. Однако, если заменить $f(x)$ на $-\varphi(x)$, условия вогнутости f перейдут в условия выпуклости φ, а максимум — в минимум.

2.7. ВАЖНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Для двух частных классов задач оптимизации имеется хорошо разработанная теория. Кроме того, во многих других случаях используются методы, основанные на принципах одного или обоих частных классов задач. Это — задача линейного программирования и классическая задача на условный оптимум.

Задача линейного программирования. В этой задаче целевая функция и функции, определяющие ограничения, линейны. Ограничения на неотрицательность являются характерными условиями этой задачи.

Поскольку целевая функция линейна, она не имеет критических точек. Следовательно, все оптимумы являются граничными. Допустимое множество выпукло, так как все ограничения линейны. Линейная целевая функция и выпукла и вогнута. Поэтому все максимумы и минимумы задачи линейного программирования являются глобальными. Как будет показано в следующей главе, важное свойство решения задачи линейного программирования состоит в том, что необходимо исследовать только конечное число граничных точек.

Если решение задачи линейного программирования существует, то в принципе оно может быть точно найдено. Линейное программирование открыло способ непосредственного численного решения практических задач на оптимум, если они представлены моделями линейного программирования или могут быть приближены к ним.

Линейное программирование дало огромный толчок в развитии исследования операций и других областей, в которых требуется численное решение задач оптимизации. Экономисты, занимающиеся прикладными вопросами, также заинтересованы в непосредственном численном решении задач линейного программирования. Экономистов-теоретиков это интересует в меньшей степени. Теория линейного программирования пролила свет на природу задачи оптимизации вообще и на природу цен в типичной задаче оптимизации в экономике в частности. Линейное программирование стимулировало развитие математической экономики.

Теория линейного программирования дает возможность проникать в свойства более общих задач оптимизации с условиями-неравенствами и ограничениями на неотрицательность переменных. Влияние теории линейного программирования выходит далеко за рамки относительно ограниченного класса линейных условных задач оптимизации.

Классическая задача на условный оптимум. В классических задачах на условный оптимум целевая функция и функции, определяющие ограничения, должны быть непрерывными и дифференцируемыми. Никаких других ограничений на характер функций не предполагается. Однако в этом случае все ограничения должны быть равенствами и отсутствует требование неотрицательности переменных.

Исследование классической задачи на условный оптимум предшествовало изучению задачи линейного программирования больше чем на столетие. Методы классической теории задач на условный оптимум, основанные на вычислительных концепциях, имеют широкое применение во многих областях и являются основанием неоклассической экономической теории.

В рассматриваемом случае все ограничения представляют собой равенства. Поэтому все они эффективны в каждой точке допустимого множества. Это значит, что внутренность допустимого множества пуста *). Как и в задаче линейного программирования, в этой задаче существуют только граничные оптимумы. Однако особенность задачи линейного программирования — возможность сравнения конечного числа граничных точек для установления оптимума — здесь не выполняется. Условия глобального оптимума здесь, вообще говоря, также на выполняются. Для выявления глобального оптимума приходится сравнивать значения целевой функции в локальных оптимумах.

*) Под этим утверждением понимается то, что размерность допустимого множества меньше размерности пространства допустимых векторов. (*Прим. перев.*)

Строго говоря, в этом случае нет непосредственного метода решения. Стандартные методы анализа указывают условия, которые должны выполняться в оптимальных точках. Вообще говоря, мы не можем точно установить, какие точки удовлетворяют этим условиям. Для экономиста большое значение имеют описательные свойства оптимальных точек, а не только точное значение их координат.

Расширения классической задачи на условный оптимум. Комбинация понятий, установленных в теории линейного программирования и в классической теории оптимизации (условной), дает возможность расширить метод анализа и охватить случаи с ограничениями на неотрицательность переменных и с неравенствами в функциональных ограничениях. Как и в классических задачах на условный оптимум, здесь мы, вообще говоря, получим свойства оптимальных точек, а не сами оптимальные точки.

2.8. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ИЛИ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ?

Один из подходов к задаче оптимизации обусловливается тем, что разыскивается нечто, принимаемое за решение задачи. Рассмотрим простую задачу оптимизации — максимизировать выпуск при заданных издержках и целесообразно определенных производственной функции и других необходимых показателях.

Планирующему органу производства, вероятно, желательно было бы знать непосредственное решение, т. е. точные указания, что должно использоваться, в каких количествах и что получится в результате. Администрация хотела бы знать, если уж не численное решение, то, по крайней мере, формулу или инструкцию, обеспечивающую численный ответ при заданных исходных параметрах условий задачи.

С другой стороны, экономическая теория обычно требует более универсальные качественные характеристики, не всегда связанные с конкретными численными значениями, которые являются целью непосредственного решения задачи. Другими словами, экономист-теоретик часто интересуется не конкретными решениями задач для каждой отдельной фирмы, а свойствами решений, общими для всех фирм. Эти свойства решений называются *условиями оптимальности*.

Условия оптимальности намечают метод для распознавания оптимальных точек и исследования их свойств. Однако условия оптимальности не обязательно указывают процедуру вычисления оптимальных решений. В течение многих лет экономистов-теоретиков смущало, что администрация фирм мыслит не в маргинальных терминах. Такое положение было связано с неразберихой между условиями оптимальности и эффективными методами вычисления непосредственного решения. Только после второй мировой войны возникли методы непосредственного решения ряда типичных задач оптимизации управления фирмой.

Различные требования к результатам анализа задачи ведут к различным подходам к постановке и методам решения задач. Это — подход исследования операций, подход, требующий численного решения задачи оптимизации, и, наконец, подход математической экономики. Последний связан, главным образом, с интересами экономической теории и анализа и поэтому имеет дело с условиями оптимальности.

В этой главе не обсуждаются методы оптимизации, предназначенные, главным образом, для нахождения численного решения. Теория этих методов не представляет интереса для экономической теории *).

Среди этих методов можно назвать следующие **):

1. *Квадратичное программирование* — относительно простая система методов решения задач минимизации положительно определенной квадратичной формы при линейных ограничениях.

2. *Целочисленное программирование*, имеющее дело с задачами оптимизации, в которых все или некоторые переменные могут принимать только дискретные значения.

3. *Выпуклое программирование* представляет методы решения задач максимизации вогнутых целевых функций на выпуклых множествах.

---

*) Эти методы обсуждаются в литературе по исследованию операций и теории решений. См., например, Баумоль [2], Хэдли [3]. Динамическое программирование связано с вариационным исчислением. См., например, Беллман и Дрейфус, гл. 5.

См. также Вентцель Е. С., Юдин Д. Б. и Гольштейн Е. Г. (*Прим. перев.*)

**) Определения методов здесь несколько уточнены по сравнению с оригиналом. (*Прим. перев.*)

4. *Динамическое программирование* — система методов, позволяющих решать многоэтапные задачи планирования.

Упражнения

1. Пусть заданы пять функций от x_1, x_2:

$$\phi^1 = 2x_1 - 3x_2, \qquad \phi^4 = 3x_1 + 2x_2,$$

$$\phi^2 = x_1 - 3x_2, \qquad \phi^5 = x_1 + 2x_2$$

$$\phi^3 = x_1 + x_2,$$

и три допустимых множества

$$K_1: \phi^1 \geqq -3, \quad \phi^2 \geqq 0, \quad \phi^3 \leqq 3, \quad \phi^4 \leqq 6, \quad \phi^5 \geqq 2;$$

$$K_2: \phi^1 \geqq -3, \quad \phi^2 \leqq 0, \quad \phi^3 \leqq 3, \quad \phi^4 \leqq 6, \quad \phi^5 \geqq 2;$$

$$K_3: \phi^1 \leqq -3, \quad \phi^2 \leqq 0, \quad \phi^3 \leqq 3, \quad \phi^4 \geqq 6, \quad \phi^5 \leqq 2.$$

Используя алгебраические и графические методы, определите характер каждого из этих множеств.

2. Известно, что для задачи с положительными переменными

$$\max x_1^a x_1^{(1-a)},$$

$$x_1 \leqq l_1^b, \quad x_2 \leqq l_2^c, \quad l_1 + l_2 \leqq L,$$

где L — константа, существует локальный оптимум. При каких значениях a, b и c выполняются условия глобального оптимума?

3. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Эта глава требует знакомства с линейной алгеброй (дополнения Д2 и Д3) и с теорией выпуклых множеств (дополнение Д4, § Д4.1 — Д4.4). Изложение построено так, чтобы приблизиться, насколько возможно, к наиболее современным аспектам этой теории.

3.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Задача линейного программирования является частным случаем общей задачи оптимизации, в которой целевая функция и функции ограничений линейны. Неравенства в функциональных ограничениях и требование неотрицательности переменных — обычные условия.

В линейном программировании стандартная задача на максимум записывается в виде

$$\max\left\{f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$x_j \geqq 0, \; j=1, \ldots, n.$$

Часто удобнее использовать векторно-матричные обозначения. Тогда *стандартную задачу на максимум* можно записать в виде

$$\max cx,$$
$$Ax \leqq b, \quad x \geqq 0,$$

где c — n-мерная вектор-строка; b — m-мерный вектор-столбец, а A — матрица порядка $m \times n$.

В стандартной задаче число ограничений m может быть произвольным образом связано с числом переменных n. Обычно бывает $m < n$.

---

*) Изложение теории линейного программирования в значительной степени следует Г е й л у [1] (гл. 3).

Иногда целесообразно записывать задачу линейного программирования в *канонической форме*

$$\max cx,$$
$$Ax = b, \quad x \geqq 0.$$

(Матрица A, конечно, отлична от матрицы условий в стандартной форме.)

Стандартная задача всегда может быть приведена к каноническому виду при помощи так называемых дополнительных переменных. Обозначим $z = b - Ax$. Тогда системы ограничений

$$Ax \leqq b \quad \text{и} \quad Ax + z = b, \quad z \geqq 0$$

эквивалентны. Каноническая задача имеет $n + m$ переменных x, z.

Каноническую задачу всегда можно свести к стандартной, используя эквивалентность системы неравенств $Ax \leqq b$ и $-Ax \leqq -b$ в системе уравнений $Ax = b$.

Прежде чем перейти к дальнейшему анализу задачи линейного программирования, заметим, что в силу линейности целевая функция не имеет критических точек. Из общего принципа оптимальности можно установить, что *оптимум задачи линейного программирования может достигаться только в граничной точке допустимого множества.*

3.2. ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО

Ограничения задачи линейного программирования записываются в виде равенств или в виде нестрогих неравенств. Поэтому допустимое множество *замкнуто*. Может случиться, что допустимое множество пусто, так как произвольная система ограничений может быть и несовместной. В этом случае будем называть задачу *неразрешимой*. Допустимое множество *выпукло*, но может быть и *не ограниченным*. Выпуклость следует из того, что допустимое множество является пересечением выпуклых множеств, задаваемых каждым отдельно взятым линейным ограничением *).

Можно непосредственно установить выпуклость допустимого множества. Пусть x', x'' — допустимые точки (их часто называют допустимыми решениями. Однако такая тер-

*) Для обоснования этого вывода можно также использовать утверждение (6) из § Д4.2.

минология может привести к путанице между решением системы ограничений и решением задачи). Имеем

$$Ax' \leqq b, \quad Ax'' \leqq b.$$

Рассмотрим выпуклую комбинацию x' и x'':

$$x = kx' + (1-k)\,x'', \quad 0 \leqq k \leqq 1.$$

Подставим x в систему ограничений

$$Ax = A\,[kx' + (1-k)\,x''] = kAx' + (1-k)\,Ax'' \leqq b.$$

Таким образом, если x'' и x' допустимы, то допустима и их выпуклая комбинация. Следовательно, допустимое множество выпукло.

Целевая функция линейна; поэтому ее можно считать как выпуклой, так и вогнутой функцией. Поскольку допустимое множество выпукло, условия глобального оптимума, установленные во второй главе, выполняются и для задачи на максимум и для задачи на минимум *). Таким образом, можно утверждать:

Оптимум в задаче линейного программирования всегда является глобальным.

Итак, оптимум в задаче линейного программирования глобальный и достигается в граничной точке замкнутого выпуклого допустимого множества. Из теории выпуклых множеств известно, что существует специальный класс граничных точек — *экстремальные точки.* Эти точки не могут быть представлены в виде выпуклой комбинации (т. е. линейной комбинации с неотрицательными весами, сумма которых равна 1) других точек множества, а все другие точки допустимого множества являются выпуклыми комбинациями экстремальных точек **).

Рассмотрим задачу на максимум и возьмем любую граничную, но не экстремальную точку. Эта точка может быть представлена в виде выпуклой комбинации некоторого числа экстремальных точек x^k. Возьмем минимальное число экстремальных точек, необходимых для определения x. Поэтому в представлении x все экстремальные точки x^k имеют ненулевые веса. Таких точек x^k должно быть по крайней мере две:

$$x = \sum a_k x^k, \quad a_k > 0; \quad \sum a_k = 1.$$

*) См. § 2.7.
**) См. § Д4.4.

Теперь рассмотрим целевую функцию cx.
Имеем

$$cx = c \sum a_k x^k = \sum a_k (cx^k).$$

Выберем экстремальную точку x^k, для которой cx^k максимально. Если несколько точек дают максимальное значение целевой функции, выберем любую из них. Обозначим соответствующее значение cx^k через v. Правая часть приведенного выше соотношения не уменьшится, если все cx^k заменить на v. Следовательно,

$$cx \leqq v.$$

Могут встретиться две возможности:

1. Максимальное значение v достигается не во всех экстремальных точках, используемых для определения x, т. е. $cx^k < v$ для некоторых k и $cx < v$. В этом случае x не является точкой максимума.

2. Максимальное значение достигается во всех экстремальных точках, так что $cx = v$. Если x — оптимальная точка, то и все другие выпуклые комбинации рассматриваемых экстремальных точек также оптимальны.

Только что было показано, что никакая допустимая точка, отличная от экстремальной, не может быть оптимальной, если она не представляется в виде выпуклой комбинации оптимальных экстремальных точек.

Можно утверждать следующее:

Оптимум в задаче линейного программирования достигается либо в одной экстремальной точке, либо на множестве экстремальных точек. В последнем случае все выпуклые комбинации этих экстремальных точек также оптимальны *).

Этот результат важен для решения задачи линейного программирования. Допустимое множество здесь выпуклое множество, описанное линейными ограничениями. Поэтому все экстремальные точки задаются пересечением соответствующего числа граней. Поскольку все оптимальные точки — это экстремальные точки или их выпуклые комбинации, можно искать решение, исследуя значения целевой функции только в экстремальных точках. Число экстре-

*) Другое доказательство приведенного утверждения можно получить из того, что, если x^* — оптимальная точка, то гиперплоскость $cx = cx^*$ должна быть опорной к допустимому множеству и потому должна содержать экстремальную точку. См. теорему 1, § Д4.4.

мальных точек конечно. Поэтому задача всегда может быть решена за конечное число шагов.

Перечисленные характеристики задачи линейного программирования иллюстрируются рис. 3.1. Это простой пример на плоскости. Здесь представлены три ограничения, заданные прямыми C_1, C_2, C_3. (Знаки неравенств выбираются такими, чтобы определяемые ими точки лежали по ту же сторону от границы, что и начало координат.) Учитывая неотрицательность переменных, получим допустимое множество $OE_1E_2E_3E_4$. Точки O, E_1, E_2, E_3, E_4 являются экстремальными. Легко видеть, что никакая из этих точек не лежит на прямой, соединяющей две другие точки множества. В то же время любая другая граничная точка лежит на прямой, соединяющей экстремальные точки, и любая внутренняя точка принадлежит прямой, соединяющей граничные точки.

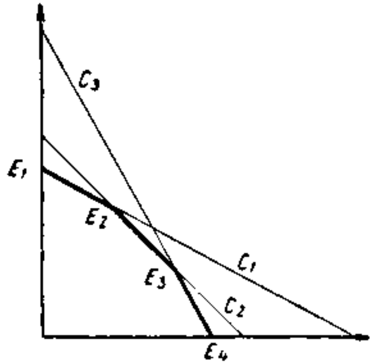


Рис. 3.1. Допустимое множество для линейной задачи.

Этот пример показывает, что задача может быть решена простой оценкой целевой функции в каждой экстремальной точке и выбором оптимальной.

Все методы решения задач линейного программирования — это методы поиска. Прежде всего разыскивается экстремальная точка, оценивается в ней целевая функция, затем берется другая экстремальная точка и т. д. Эффективные методы решения, из которых наиболее известен симплексный метод *), обеспечивают некоторое правило, благодаря которому из рассмотрения исключаются экстремальные точки, дающие меньшее значение целевой функции,

*) Симплексный метод сделал линейное программирование вычислительным аппаратом. Впервые он был применен Данцигом. См. Данциг. Этот метод описан в гл. 4 работы Гейла [1] и во всех книгах по линейному программированию. Модифицированный симплексный метод (иногда он называется методом обратной матрицы) чаще используется для численного решения задачи линейного программирования.

См. также Юдин Д. Б. и Гольштейн Е. Г. (*Прим. перев.*)

чем в рассмотренных ранее точках. По этому правилу из процедуры поиска исключаются шаги, уменьшающие значение линейной формы cx. Правило приводит к оптимуму или устанавливает неразрешимость задачи. Наиболее тонким вопросом методов решения является выбор начальной экстремальной точки, так как число шагов в процессе решения существенно зависит от выбора исходной точки.

Как мы увидим в следующем параграфе, непосредственное вычисление не обязательно для выявления оптимальной точки.

3.3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Идея двойственной задачи и теория линейного программирования, связанная с понятием двойственности, весьма важны в экономическом анализе. Принципы двойственности проясняют природу цен. Цена — это самое фундаментальное понятие экономической теории.

В стандартной задаче максимизации

$$\max cx,$$
$$Ax \leqq b, \quad x \geqq 0,$$

векторы c, b и матрица A предполагаются заданными. Используя те же данные, но другое множество переменных, можно сформулировать следующую задачу:

$$\min yb,$$
$$yA \geqq c, \quad y \geqq 0.$$

Эта задача называется *двойственной* к первой задаче. Если обе задачи рассматриваются вместе, то первая называется *прямой* задачей.

Для образования двойственной задачи производятся следующие изменения в прямой задаче:

а) если вектор переменных в прямой задаче записывается как n-мерный вектор-столбец, то в двойственной задаче вектор переменных — m-мерный вектор-строка, и наоборот;

б) компоненты вектора ограничений прямой задачи становятся компонентами вектора линейной формы двойственной задачи, а вектор линейной формы прямой задачи переходит в вектор ограничений двойственной;

в) задача максимизации переходит в задачу минимизации, и наоборот;

г) знак неравенств (функциональных ограничений) изменяется на обратный;

д) ограничения на неотрицательность (прямые ограничения) не изменяются *).

Двойственное соотношение симметрично. Рассмотрим задачу, двойственную к стандартной задаче. Тогда двойственной к двойственной задаче снова будет исходная задача. Таким образом, существует только пара двойственно связанных задач.

С самого начала важно четко представлять себе, что двойственность — прежде всего формальное математическое соотношение. Для любой задачи линейного программирования можно построить двойственную к ней по приведенному выше правилу. Если прямая задача выражает реальную проблему, естественно ожидать, что и двойственная обладает некоторой подходящей интерпретацией. Проста ли эта интерпретация, представляет ли она интерес — это зависит от содержательного характера задачи. Формально же двойственная задача всегда существует.

Возникает вопрос: зачем вообще вводится двойственность? Начнем анализ этого вопроса с формулировки следующих двух важных теорем линейного программирования.

Теорема двойственности. *Допустимый вектор прямой задачи x^* оптимален тогда и только тогда, когда существует допустимый вектор двойственной задачи y^*, такой, что $cx^* = y^*b$. В этом случае y^* — оптимальный вектор двойственной задачи.*

Теорема существования. *Прямая и двойственная задачи имеют оптимальные решения тогда и только тогда, когда обе задачи имеют допустимые векторы* **).

Предположим, что теорема двойственности верна. Тогда, если одна задача имеет оптимальное решение, то и другая — также имеет решение. Очевидно, что оптимальное решение может существовать, только если существует допустимый вектор. Этим доказана необходимость условий теоремы существования.

Не совсем полное доказательство достаточности может быть основано на следующей лемме.

*) Этот перечень изменений относится к стандартной задаче. В двойственной к канонической задаче п. (*г*) и (*д*) не выполняются.

**) В отечественной литературе приведенные здесь теоремы двойственности и существования формулируются в виде одной так называемой первой теоремы двойственности. (*Прим. перев.*)

Основная лемма: *Если x и y — допустимые векторы прямой и двойственной задач соответственно, то справедливо следующее соотношение:*

$$cx \leqq yAx \leqq yb.$$

Для доказательства леммы заметим, что ограничения прямой задачи дают $Ax - b \leqq 0$. Поскольку $y \geqq 0$, то $y(Ax - b) \leqq 0$
и

$$yAx \leqq yb.$$

Используя ограничения двойственной задачи и неотрицательность x, получим таким же образом

$$cx \leqq yAx.$$

Утверждение леммы следует из полученных неравенств.

Вернемся теперь к теореме существования. Пусть y' — произвольный допустимый вектор двойственной задачи. По лемме для всех x — допустимых векторов прямой задачи

$$cx \leqq y'b.$$

Таким образом, множество значений линейных форм $v = cx$, где x — допустимый вектор прямой задачи, замкнуто и ограниченно (по крайней мере сверху) и, следовательно, имеет максимум. Поэтому, если обе задачи допустимы, прямая имеет оптимум. Аналогично, рассматривая множество значений $v' = yb$, покажем, что если обе задачи допустимы, то двойственная имеет оптимум.

В достаточности условий теоремы двойственности легко убедиться, используя основную лемму. Пусть x^* и y^* — допустимые решения, такие, что $cx^* = y^*b$, и x — любой допустимый вектор прямой задачи. Тогда

$$cx \leqq y^*b \quad \text{(согласно основной лемме)}$$

и в силу условия

$$cx \leqq cx^*.$$

Таким образом, x^* — оптимальный вектор прямой задачи. Оптимальность y^* в двойственной задаче доказывается аналогичным образом.

Доказательство необходимости условия теоремы двойственности (если x^* оптимален в прямой задаче, то существует y^* — допустимый в двойственной задаче, такой, что

$cx^* = y^*b$) в понятиях и терминах, используемых до сих пор, достаточно трудоемко. Необходимость доказывается существенно проще при использовании свойств функции Лагранжа. Поэтому это доказательство будет приведено в гл. 5 *).

Теорема двойственности дает возможность проверить, является ли данная пара векторов оптимальной. Для этого нужно одновременно исследовать прямую и двойственную задачи. Поэтому в некотором смысле теорема двойственности дает условие оптимальности. Тем не менее обычно условия оптимальности в задаче линейного программирования задаются теоремой равновесия **), которая обсуждается в следующем параграфе. Приведенные ниже примеры иллюстрируют использование теоремы двойственности и теоремы существования в простых задачах. Следует, однако, иметь в виду, что ценность этих теорем не столько в возможности их непосредственного применения в вычислительных методах, сколько в вытекающих из них теоретических выводах.

Пример 1. Покажем, что точки $x^* = (8,0)$ и $y^* = (0,3)$ являются оптимальными для следующей пары двойственных задач ***):

$$\begin{aligned} &\max\{3x_1+2x_2\}, &\qquad &\min\{2y_1+8y_2\},\\ &-2x_1+x_2 \leqq 2, & &-2y_1+y_2 \geqq 3,\\ &x_1+2x_2 \leqq 8, & &y_1+2y_2 \geqq 2,\\ &x_1,\ x_2 \geqq 0, & &y_1,\ y_2 \geqq 0. \end{aligned}$$

Прежде всего проверим допустимость точек x^* и y^*. Конечно, x^* и y^* неотрицательны. Подставляя x^* в систему неравенств прямой задачи, убеждаемся, что x^* — допустимая точка. Аналогично убеждаемся в допустимости y^* в двойственной задаче. Значения линейных форм обеих задач в рассматриваемых точках равны соответственно $cx^* = 3 \times 8 + 2 \times 0 = 24$ и $y^*b = 2 \times 0 + 8 \times 3 = 24$. Таким образом, x^* и y^* оптимальны.

Поскольку обе задачи содержат по две переменных, можно проиллюстрировать пример графически. Это сделано на рис. 3.2. Штриховка вдоль границ показывает, с какой стороны от границы лежит допустимое множество. Сами множества очерчены жирными ломаными. Допустимое множество прямой задачи имеет четыре экстремальные точки: (0, 0), (0, 2) (4/5, 18/5) (8, 0). Целевая функция, график которой изображен в каждой экстремальной точке и обозначен символом ОГ, очевидно, более всего отдалена от начала коор-

*) См. § 5.7. Непосредственное доказательство можно найти, например, в работе Гейла [1], теорема 3.1.

**) В отечественной литературе эта теорема обычно называется второй теоремой двойственности. (*Прим. перев.*)

***) Читатель должен проверить, что эти задачи действительно представляют собой двойственную пару задач.

динат в точке (8, 0). На плоскости всегда можно решить задачу таким графическим методом.

Допустимое множество двойственной задачи в этом случае имеет только одну экстремальную точку (0, 3). Заметим, что здесь допустимое множество не ограничено сверху. Однако это не создаст трудностей, поскольку двойственная задача в рассматриваемом примере является задачей минимизации.

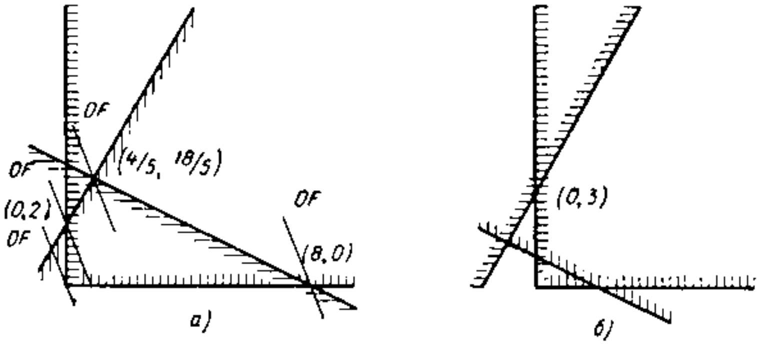


Рис. 3.2. Графическое решение примера 1.

Пример 2. Исследуем, имеет ли следующая задача оптимальное решение:

$$\max\ (x_1 + x_2),$$
$$-2x_1 - x_2 \leqq 2,$$
$$-x_1 - x_2 \leqq 1; \quad x_1,\ x_2 \geqq 0.$$

Используем теорему существования. Проверим разрешимость двойственной задачи. Двойственные ограничения записываются в виде

$$-2y_1 - y_2 \geqq 1,$$
$$-y_1 - y_2 \geqq 1; \quad y_1,\ y_2 \geqq 0.$$

Очевидно, что не существует вектора y, который удовлетворял бы всем этим неравенствам. Следовательно, двойственная задача не имеет допустимых точек, и прямая задача не имеет оптимума.

В этом примере прямая задача не имеет оптимального решения потому, что ее допустимое множество не ограничено сверху. Для каждого x, удовлетворяющего ограничениям, существует другой допустимый вектор x', дающий большее значение целевой функции. Это было очевидно с самого начала, но здесь ставилась цель проиллюстрировать использование теоремы существования.

В сложных примерах неограниченность допустимого множества бывает трудно непосредственно установить, и теорема существования может быть полезна. Неразрешимость двойственной задачи означает либо отсутствие допустимых точек прямой задачи, либо неограниченность в нужном направлении допустимого множества прямой задачи.

3.4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В предыдущем параграфе указывалось, что теорема двойственности дает условие оптимальности в терминах значений целевых функций. В экономическом анализе под условиями оптимальности часто подразумевают соотношения между параметрами, характеризующими выполнение ограничений, и переменными задачи.

Теорема равновесия линейного программирования.

1. *Пусть векторы x^* и y^* допустимы в прямой и двойственной задачах соответственно. Они оптимальны тогда и только тогда, когда:*

$$\text{а) } y_i^* = 0, \quad \textit{если} \quad \sum_j a_{ij}x_j^* < b_i,$$

$$\text{б) } x_j^* = 0, \quad \textit{если} \quad \sum_i a_{ij}y_i^* > c_j,$$

т. е., если k-я переменная одной задачи равна нулю в том случае, когда k-е ограничение другой задачи неэффективно.

2. *Оптимальная точка (или одна из оптимальных точек в случае слабого оптимума) всегда будет такова, что число ненулевых переменных в каждой задаче не превосходит числа функциональных ограничений задачи.*

Доказательство части (1) следует из теоремы двойственности и основной леммы. Докажем необходимость условий (*а*) и (*б*). Заметим, что если x^* и y^* — оптимальные решения, то

$$cx^* = y^*Ax^* = y^*b.$$

Из первого равенства следует, что $y^*Ax^* - cx^* = 0$, т. е. $(y^*A - c)\,x^* = 0$. Поскольку y^* и x^* — допустимые векторы, то $y^*A - c \geqq 0$ и $x^* \geqq 0$. Следовательно, каждое слагаемое в выражении

$$(y^*A - c)\,x^* = \sum_j \Big(\sum_i a_{ij}y_i^* - c_j\Big)\,x_j^*$$

должно равняться нулю и либо $\sum_i a_{ij}y_i^* - c_j = 0$, либо $x_j^* = 0$ (либо и то, и другое вместе).

Используя равенство $y^*Ax^* = y^*b$, докажем аналогичным образом необходимость условия (*б*).

Докажем теперь достаточность условий (*а*) и (*б*). Пусть x^* и y^* — допустимые векторы и удовлетворяют условиям

(a), ($б$). Тогда каждый член в выражении

$$\sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^*$$

и в выражении

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^*$$

равен нулю. Следовательно,

$$cx^* = y^*Ax^* = y^*b,$$

и x^*, y^* — оптимальные векторы.

Теорема равновесия важна по двум причинам. Во-первых, она дает возможность проверить на оптимальность решение прямой задачи, даже если не задано оптимальное решение двойственной задачи. И во-вторых, и это главное, она ведет к важным интерпретациям условий оптимальности в экономических моделях, которые можно представить в форме задачи линейного программирования. Это будет проиллюстрировано на примерах.

Пример 1 (проверка решения). Показать, что точка $x^* = (8{,}0)$ является оптимальной в задаче

$$\begin{gathered} \max\,(3x_1 + 2x_2), \\ -2x_1 + x_2 \leqq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leqq 8, \quad x_1,\ x_2 \geqq 0. \end{gathered}$$

Это та же самая задача, что рассматривалась в примере 1 предыдущего параграфа. Но здесь задано только предполагаемое оптимальное решение прямой задачи.

Поступим следующим образом: подставим значение (8,0) в ограничения прямой задачи. Мы видим, что первое ограничение неэффективно. Из теоремы равновесия следует, что $y_1 = 0$, если (8,0) — оптимальная точка. В предполагаемой оптимальной точке $x_2 = 0$. Поэтому можно ожидать, что в двойственной задаче второе ограничение будет неэффективным, а первое — эффективным. Приравняв y_1 нулю, получим $y_2 = 3$, и точка (0,3) предполагается оптимальной в двойственной задаче. Используя теорему двойственности так же, как и в предыдущем параграфе, покажем, что пара решений (8,0) и (0,3) действительно оптимальна.

Пример 2 (экономическая интерпретация).

Задана линейная модель производства, в котором выпускаются n продуктов x_j и затрачиваются m факторов b_i. Модель описывается постоянными коэффициентами затрат a_{ij}. Коэффициент a_{ij} определяет количество i-го фактора, требуемое для производства единицы j-го продукта. Тогда $\sum\limits_j a_{ij}x_j$ определяет суммарное количество i-го фактора, необходимое, чтобы произвести набор продуктов x, а Ax задает вектор затрат факторов b, необходимых для выпуска набора x.

Пусть заданы вектор цен p и вектор ресурсов $\overline{b}$, ограничивающий использование факторов. Исследуем свойства оптимального производства, определяемого допустимым набором x, максимизирующим доход px. Оптимальное производство описывается задачей линейного программирования

$$\max px,$$

$$Ax \leqq \overline{b}, \quad x \geqq 0.$$

Запишем задачу, двойственную к ней,

$$\min y\overline{b},$$
$$yA \geqq p, \ y \geqq 0.$$

Прежде всего приведем интерпретацию двойственной задачи. Согласно теореме двойственности имеем $px^* = y^*\overline{b}$. Величина px^* имеет размерность стоимости (цена, умноженная на объем продукции). Следовательно, $y^*\overline{b}$ имеет ту же размерность. Поскольку b — вектор объемов факторов, то y^* — в некотором роде вектор цен — цен на факторы. Вследствие этой экономической интерпретации двойственные переменные часто называют *условными оценками*.

Рассмотрим ограничения двойственной задачи, каждое из которых записано в виде

$$\sum_i a_{ij}y_i \geqq p_j.$$

Поскольку a_{ij} — количество i-го фактора, требуемое для выпуска единицы j-го продукта, величина $a_{ij}y_i$ представляет собой оценку затрат i-го фактора, а $\sum_i a_{ij}y_i$ — суммарную оценку факторов, необходимых для выпуска единицы j-го продукта. Стоимость факторов вычисляется в условных оценках y.

Отсюда можно получить интерпретацию двойственности (важно четко понимать, что не обязательно следовать этой интерпретации, она связана лишь с рассматриваемой моделью). Условные оценки определяют ответ на вопрос, какова наименьшая стоимость набора факторов $\overline{b}$, дающая возможность обращения факторов в продукты и продажи продуктов. Ограничения двойственной задачи выражают тот факт, что если оценка затрат, необходимых для производства продукта, меньше цены продукта, то более выгодно произвести и продать продукт, чем продать эти факторы. При оптимальных значениях x^* и y^* экономической системе или фирме безразлично, использовать ли факторы и продать продукты, чтобы получить px^*, или продать ресурсы $\overline{b}$ по ценам y^*, так как для оптимальных векторов $y^*\overline{b} = px^*$.

Легко видеть, что к этой интерпретации причастна теорема равновесия, которая в терминах этой модели утверждает, что:

а) всякий фактор, который не может быть полностью использован при производстве оптимального набора продуктов, получает нулевую условную оценку (нулевую оптимальную оценку);

б) продукт, издержки на производство которого превосходят его цену (когда факторы оцениваются в оптимальных условных оценках), не будет производиться при оптимальном производстве *).

Другими словами, если условные оценки являются двойственными ценами факторов, то избыточно предлагаемые факторы не представляют ценности (их условные оценки равны нулю), а убыточные процессы не будут использоваться (т. е. соответствующие продукты не будут производиться). Поскольку эти соотношения соответствуют состоянию равновесия конкурентной экономики, теорема и получила название теоремы равновесия.

Сущность термина «условные оценки» будет уточнена в последнем параграфе, где приводится более полная интерпретация двойственных переменных **).

3.5. БАЗИСНЫЕ РЕШЕНИЯ

Уже было показано, что стандартная задача может быть приведена к каноническому виду при помощи дополнительных переменных, и каноническая задача также может быть приведена к стандартному виду. Для некоторых целей удобнее обсуждать задачу в каноническом виде, а в некоторых экономических приложениях задача с самого начала поставлена как каноническая задача.

Рассмотрим каноническую задачу

$$\max cx,$$
$$Ax = b, \quad x \geqq 0.$$

Ограничения образуют систему из m уравнений с n переменными, где предполагается, что $m < n$. Из теории линейных уравнений известно, что если ранг матрицы A равен m, можно приравнять любые $n - m$ переменных нулю и затем однозначно решить систему относительно оставшихся m переменных. Любое такое решение системы называется *базисным* решением. Поскольку система линейна, то любая линейная комбинация решений будет также решением, хотя не обязательно базисным ***).

Базисное решение системы $Ax = b$ может не быть допустимым, так как может не выполняться неравенство $x \geqq 0$. Базисное решение, для которого $x \geqq 0$, называется *допустимым базисным решением*. Справедлива следующая теорема:

---

*) Если оптимум не единственен, последнее утверждение справедливо, по крайней мере, для одной оптимальной точки.

**) См. § 3.7.

***) См. § Д3.4.

Если система $Ax = b$, $x \geqq 0$, имеет допустимое решение, то она имеет и базисное допустимое решение.

Доказательство проводится по индукции. Пусть x — допустимое, но не базисное решение, т. е. $x \geqq 0$ и имеет $k\ (>m)$ ненулевых компонент. Обозначим через A^j j-й столбец матрицы A. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} A^j x_j.$$

Не ограничивая общности, можно считать ненулевыми первые k компонент вектора x. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} A^j x_j = Ax = b.$$

Но столбцы A^i представляют собой m-мерные векторы. При $k > m$ векторы A^j, $j = 1, \ldots, k$, должны быть линейно зависимы. Поэтому можно найти числа v_j, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} v_j A^j = 0.$$

Существует взаимно однозначное соответствие между v_j и x_j. Обозначим максимум отношения v_j/x_j через θ. Рассмотрим линейную комбинацию уравнений для x и v с весами 1 и $1/\theta$ соответственно

$$\sum_{j=1}^{k} A^j x_j - \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{k} v_j A^j = b,$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{k} A^j \left(\theta - \frac{v_j}{x_j}\right) x_j = b.$$

По определению θ величины $[\theta - (v_j/x_j)]$ неотрицательны для всех j и равны нулю по крайней мере для одного j.

Таким образом, вектор, j-я компонента которого равна $(1/\theta)[\theta - v_j/x_j]\, x_j$, является неотрицательным решением системы $Ax = b$ и имеет не более чем $k - 1$ ненулевых компонент.

Можно продолжать рассуждения, пока k больше m. Процесс не остановится, пока k не станет равным m, так как только в этом случае векторы A^j линейно независимы.

Легко показать, что, если x — базисный допустимый вектор (т. е. базисное допустимое решение), то он не может быть представлен как выпуклая комбинация других допустимых векторов. Пусть это не так, т. е.

$$x = \sum_k a_k x^k, \quad a_k > 0, \quad \sum_k a_k = 1.$$

Могут встретиться три случая. Первый — когда некоторый вектор x^k небазисный и имеет более чем m ненулевых компонент. Тогда и x — небазисный вектор. Второй случай — все векторы x^k базисные с одними и теми же ненулевыми компонентами. Тогда и x — базисный вектор. Однако, поскольку все x^k определяются одними и теми же столбцами матрицы A, все x^k совпадают и равны x. Третий случай — все x^k базисные, но с разными ненулевыми компонентами. Тогда x имеет более чем m ненулевых компонент и не является базисным вектором.

Поскольку базисное допустимое решение не может быть представлено в виде выпуклой комбинации других допустимых векторов, то оно соответствует экстремальной точке допустимого множества.

Таким образом, пункт (б) теоремы о равновесии, который оставался недоказанным в предыдущем параграфе, эквивалентен утверждению, что оптимальная точка будет экстремальной точкой, или множество оптимальных точек содержит экстремальную точку.

Множество из m столбцов матрицы A, которые соответствуют ненулевым компонентам базисного вектора, называется *базисом*. Он будет *допустимым* или *оптимальным базисом*, если он соответствует допустимому или оптимальному вектору. Базис представляет собой квадратную матрицу порядка m. Будем обозначать базис через A_B.

3.6. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Запишем двойственную задачу к канонической задаче. Если прямая задача была задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации. Предполагалось, что $m < n$. Поэтому нельзя ожидать, что двойственные ограничения будут иметь вид $yA = c$. В этом случае получилась бы система из n уравнений с m переменными, которая не имела бы решений, так как ранг матрицы A по условию равен m. Ограничения двойственной задачи должны быть записаны в форме неравенств типа $yA \geqq c$ (так как двойственная задача — задача минимизации). Если прямая задача была задачей минимизации, то двойственная будет задачей максимизации, и неравенства в ограничениях должны изменить знак на обратный.

Подчеркнем различие в построении двойственных задач к стандартной и канонической задачам. В задаче, двойственной к канонической, на переменные y не наложены прямые ограничения.

Чтобы объяснить это утверждение, рассмотрим число переменных и ограничений в стандартной задаче и двойственной к ней. Прямая задача имеет n переменных, m функциональных и n прямых ограничений, двойственная — m переменных, n функциональных и m прямых ограничений. Всего задачи имеют $(m + n)$ переменных и $2\,(m + n)$ ограничений в форме неравенств.

Каноническая (прямая) задача имеет n переменных, m ограничений-равенств и n прямых ограничений. Но каждое ограничение-равенство эквивалентно двум ограничениям-неравенствам. Таким образом, можно считать, что прямая задача имеет n переменных и $(2m + n)$ ограничений-неравенств. Двойственная задача имеет m переменных и n функциональных ограничений. Следовательно, и без прямых ограничений на двойственные переменные пара двойственных задач имеет $(m + n)$ переменных и $2\,(m + n)$ ограничений-неравенств. Мы получили для канонической задачи тот же результат, что и для стандартной задачи.

Таким образом, задача, двойственная к канонической задаче максимизации, записывается в виде

$$\begin{gathered}\min yb,\\ yA \geqq c.\end{gathered}$$

Теорема равновесия для канонической задачи имеет простой вид:

Допустимые векторы x^* и y^* оптимальны тогда и только тогда, когда $x_j^* = 0$ в том случае, если $\sum\limits_i a_{ij} y_i^* > c_j$.

Теперь можно сформулировать теорему, важную для анализа некоторых линейных экономических моделей.

Основная теорема линейного программирования. *Если оптимальный базис A_B канонической задачи* max (min) cx *при условии, что* $Ax = b$, $x \geqq 0$ *допустим для задачи* max (min) cx *при условии, что* $Ax \leqq b'$, $x \geqq 0$, *то он оптимален и для последней задачи* *).

Будем рассматривать задачу максимизации (в задаче минимизации доказательство проводится аналогичным образом). Пусть x^* и y^* — оптимальные векторы первой задачи и двойственной к ней. Согласно теореме равновесия из $\sum_i a_{ij} y^{i*} > c_j$ следует, что $x_j^* = 0$.

Пусть x', определенный на том же базисе, что и x^*,— допустимый вектор второй задачи **). Такой вектор по условию существует. Поскольку x' и x^* имеют один и тот же базис, то из $x_j^* = 0$ следует, что $x_j' = 0$. Следовательно, если $\sum_i a_{ij} y_i^* > c_j$, то $x_j' = 0$.

Согласно теореме равновесия x' и y^* — допустимые векторы второй задачи и двойственной к ней. (Заметим, что ограничения двойственных задач к первой и второй задачам совпадают.) Это значит, что x' и y^* — оптимальные векторы соответствующих задач.

Заметим, что оптимальные значения двойственных переменных не изменяются при замене b на b'.

Можно интерпретировать основную теорему в терминах стандартной задачи. Сведем задачу

$$\max cx,$$
$$Ax \leqq b, \quad x \geqq 0$$

к каноническому виду, используя вектор z дополнительных переменных.

Ограничения задачи перепишутся в виде

$$[A : I] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = b, \quad x,\ z \geqq 0.$$

---

*) Эта теорема установлена Гейлом. (Гейл [1], гл. 9, лемма 9.3.). Термин «основная теорема» не использовался ни у Гейла, ни в других работах.

**) Это значит, что x' и x^* являются линейными комбинациями одного и того же набора векторов A^j, определяющих базис. (*Прим. перев.*)

Базис матрицы $[A : I]$ определяет нулевые компоненты вектора $[x, z]$. Обращение в нуль компоненты вектора x связано с эффективностью ограничений двойственной задачи. Если же $z_i = 0$, то эффективно i-е ограничение прямой задачи.

Таким образом, основную теорему можно сформулировать в следующем виде:

Основная теорема для стандартной задачи. *Пусть* $S = \{i \mid A_i x^* = b_i\}$ — *множество индексов, соответствующих ограничениям, эффективным в оптимальной точке стандартной задачи*:

$$\max cx \text{ при условии, что } Ax \leqq b,\ x \geqq 0.$$

Рассмотрим другую задачу:

$\max cx$ *при условии, что* $Ax \leqq b'$, $x \geqq 0$.

Если существует допустимое решение этой задачи, такое, что $A_i x = b'_i$ *при* $i \in S$, *то эта задача имеет оптимальное решение с теми же эффективными ограничениями.*

3.7. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим изменение допустимого множества, обусловленное изменением вектора ограничений в прямой задаче. Каждое ограничение представляется в виде $\sum_j a_{ij}x_j \leqq b_i$ (стандартная форма). Изменение b_i эквивалентно смещению гиперплоскости $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$, ограничивающей допустимое множество, по отношению к началу координат. При этом наклон гиперплоскости, определяемый коэффициентами a_{ij}, не меняется.

Рис. 3.3 иллюстрирует этот тип изменения ограничений. Во всех четырех случаях наклоны границ C_1, C_2 и C_3 остаются неизменными. Меняются лишь расстояния прямых C_1, C_2, C_3 от начала координат. Таким образом, были получены четыре (заштрихованных) допустимых множества.

Экстремальные точки допустимого множества получаются при пересечении границ. Пересечение одних и тех же граней (в рассматриваемом случае — прямых), например C_1 и C_2, отвечает одному и тому же базису, и определяемая им экстремальная точка V_2 поставлена в соответствие одному и тому же допустимому базису во всех случаях. Экстремальные точки, отвечающие одному и тому же допустимому базису, будем называть *эквивалентными*.

Основная теорема предыдущего параграфа может быть здесь интерпретирована следующим образом. Пусть прямые, определяющие ограничения задачи, передвигаются параллельно самим себе, и некоторая экстремальная точка, скажем, V_2, является оптимальной в одном из случаев. Тогда

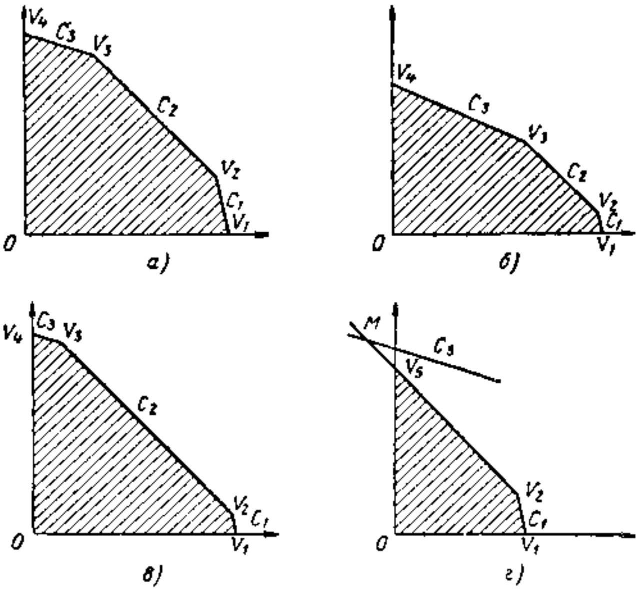


Рис. 3.3. Пример изменения ограничений.

эквивалентная экстремальная точка (также обозначенная V_2) будет оптимальной во всех случаях, в которых она еще допустима.

Заметим, что если бы точка V_3 была оптимальной в случае (*а*), она оставалась бы оптимальной также и в случаях (*б*) и (*в*). В случае (*г*) пересечение C_2 и C_3 дает точку M, которая не удовлетворяет ограничению на неотрицательность. Следовательно, эта точка не принадлежит допустимому множеству и, следовательно, не оптимальна.

Как можно видеть на иллюстрации, изменение вектора b, не нарушающее допустимость начального базиса, может проводиться в достаточно широких пределах. Поэтому утверждение, приведенное ниже, представляет значительный интерес.

Рассмотрим задачу линейного программирования с вектором ограничений b, оптимальным значением целевой функции V^* и оптимальным вектором двойственной задачи y^*. Заменим b на $b + \Delta b$ так, чтобы начальный оптимальный базис оставался допустимым. Тогда вариация ΔV^* оптимального значения целевой функции определяется соотношением

$$\Delta V^* = y^* \Delta b.$$

В частности, если меняется только i-я компонента вектора b, то

$$\Delta V^* = y_i^* \Delta b_i.$$

Доказательство сразу же следует из основной теоремы и теоремы двойственности. Пусть x^* и x' — оптимальные векторы начальной и измененной задач. Тогда, поскольку начальный базис остается допустимым, y^* является также оптимальным вектором задачи, двойственной к измененной задаче. Используя теорему двойственности в обоих случаях, имеем

$$\begin{aligned} cx' &= y^* (b + \Delta b), \\ cx^* &= y^* b. \end{aligned}$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем утверждение теоремы.

Теперь можно закончить интерпретацию двойственных переменных. Пусть меняется только i-е ограничение. Тогда

$$\frac{\Delta V^*}{\Delta b_i} = y_i^*.$$

Следовательно, i-я двойственная переменная (в оптимальной точке) рассматривается как приращение целевой функции при ослаблении i-го ограничения на единицу.

В типичных экономических задачах эта величина может истолковываться, например, как приращение дохода при возрастании объема соответствующего ресурса. Таким образом, оправдывается обычная интерпретация двойственных переменных как условных оценок.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

В главе приведены основы теории линейного программирования. Читатель может найти подробное изложение этого вопроса в работе Гейла [1] (следует обратить внимание на сделанные выше замечания относительно обозначений). Дорфман, Самуэльсон и Солоу дают более элементарное изложение теории с бо́льшим количеством экономических приложений. Кроме того, эти вопросы приведены в работе Аллена [2].

Читатель, интересующийся линейным программированием как вычислительным методом, может изучить симплексный метод у Гейла [1], гл. 4, у Гасса и у Хэдли [2] *).

Упражнения

1. Исследовать на допустимость и существование оптимальных решений приведенную ниже задачу и двойственную к ней:

$$\max \{x_1 + 3x_2\},$$
$$-3x_1 + 6x_2 \leqq -1,$$
$$x_1 - 3x_2 \leqq 2, \qquad x_1,\ x_2 \geqq 0.$$

2. Решая двойственную задачу и применяя теорему равновесия, показать, что (2,1) является оптимальным решением задачи

$$\max (2x_1 - x_2),$$
$$-4x_1 + x_2 \leqq 2,$$
$$x_1 - x_2 \leqq 1,$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 5, \quad x_1,\ x_2 \geqq 0.$$

3. Определите: а) базисные решения; б) базисные допустимые решения для равенств

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6$$

при условии, что $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$.

Какие решения являются оптимальными в канонической задаче $\max (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)$ при приведенных выше ограничениях? Постройте и решите двойственную задачу.

4. Рассмотрим стандартную задачу с оптимальным решением x^*. Заменим начальную целевую функцию cx на новую $c'x$, где $c'_k > c_k$, $c'_i = c_i$, $i \neq k$. Пусть ограничения задачи не меняются и x^{**} — оптимальное решение новой задачи. Показать, что $x_k^{**} > x_k^*$.

---

*) Подробное изложение теории и методов линейного программирования имеется в работах Зуховицкого С. И. и Авдеевой Л. И., Юдина Д. Б. и Гольштейна Е. Г. (*Прим. перев.*)

5. Замените в задаче упражнения 2 вектор b на

$$b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4,5 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что при этом применима основная теорема из § 3.6. Установите связь между изменением вектора ограничений $b \to b'$ и величинами двойственных переменных (см. § 3.7.).

6. Задача о диете. Рассмотрим n продуктов, каждый из которых содержит в себе неотрицательные количества каждого из m питательных веществ. Пусть заданы цены на продукты и минимальный необходимый уровень каждого из питательных веществ. Сформулируйте задачу о составлении диеты, обеспечивающей требуемое количество питательных веществ при минимальных издержках.

Исследуйте влияние на решение условия, ограничивающего потребление одного из питательных веществ заданным уровнем.

7. Пусть допустимое множество ограничено. Изложите теорию линейного программирования в терминах опорных гиперплоскостей к выпуклым множествам (см. § Д4.3—Д4.4).

4. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА УСЛОВНЫЙ ОПТИМУМ

Эта глава предполагает знакомство с основными свойствами непрерывных функций (дополнение Д8, § Д8.1 — Д8.4). Рассмотрение условий второго порядка требует дополнительной информации, указанной в начале § 4.5. Однако при начальном чтении главы этот дополнительный материал может быть опущен.

4.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Как указывалось при обсуждении общей структуры задач оптимизации (см. гл. 2), классические методы условной оптимизации могут применяться к задаче, характеризующейся следующими особенностями:

а) целевая функция и функции ограничений обладают подходящими свойствами гладкости. Обычно они принадлежат классу C^2. Этого достаточно для всех целей;

б) все функциональные ограничения являются равенствами;

в) отсутствуют прямые ограничения на переменные (ограничения на неотрицательность).

Классическая задача на условную оптимизацию в стандартной форме записывается в виде:

$$\max f(x) \quad (x\text{—}n\text{-мерный вектор}),$$
$$g^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \quad (m < n).$$

В этой задаче все ограничения эффективны. Поэтому допустимое множество K состоит только из граничных точек и, следовательно, внутренние оптимумы исключаются.

---

*) Элементарное изложение классических методов оптимизации приведено в различных работах (см., например, Аллен [1]). Изложение этих вопросов для инженеров и физиков обычно поверхностно и ограничивается условиями первого порядка.

Подробный анализ классических методов решения задач на условный оптимум приведен в работе Самуэльсона [1].

См. также сноски к § 4.5, связанные с подходом автора к рассматриваемым вопросам.

Если не все ограничения линейны, то, вообще говоря, K — невыпуклое множество.

Здесь рассматривается система из m уравнений с n переменными, где $m < n$. Если соответствующий якобиан не вырожден, можно $n - m$ переменных выразить через остальные m (по теореме о неявной функции). Эти значения подставляются в целевую функцию, и решается задача на безусловный оптимум относительно $n - m$ переменных. Казалось бы, этот подход обладает всеми чертами хорошей процедуры: уменьшается число переменных и задача сводится к уже исследованной.

Непосредственная подстановка (замещение) часто используется при решении задач, в которых желательно получить явное решение. Однако приведенная выше процедура не столь полезна, как кажется с первого взгляда. Весьма редко удается получить явное решение системы уравнений, если они не линейны.

В типичных задачах математической экономики вид функций f и g^i не определен явно. Некоторые свойства оптимального решения могут быть объяснены при использовании соотношений между производными, задаваемыми теоремой о неявной функции. Однако получаемые при этом результаты не симметричны по отношению к выбору зависимых и независимых переменных.

Мы далее увидим, что, как это ни парадоксально, более полезным методом исследования свойств оптимального решения классической задачи является метод, который не уменьшает числа переменных задачи, а увеличивает его.

4.2. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

Исследуем свойства функции

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x),$$

где λ_i — произвольные величины. Функция $L(x, \lambda)$ называется *функцией Лагранжа*, а величины λ_i — *множителями Лагранжа*. Иногда линейная комбинация функций, определяющих ограничения задачи, прибавляется к целевой функции, а не вычитается из нее. Разница здесь только в знаках λ_i. Форма, принятая здесь, более целесообразна для экономической интерпретации λ_i, которая будет приведена ниже.

Рассмотрим производные функции $L(x, \lambda)$ по λ_i:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = -g^i(x),$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \text{для } x \in K.$$

Кроме того, для всех $x \in K$

$$L(x, \lambda) = f(x).$$

Если $L(x, \lambda)$ достигает максимума по x, λ в точке x^*, λ^*, тогда, поскольку оптимум безусловный, это критическая точка $L(x, \lambda)$, и все частные производные в ней равны нулю. Поскольку частные производные по λ_i равны нулю, $x^* \in K$ и $L(x^*, \lambda^*) = f(x^*)$, то x^* обеспечивает максимум $f(x)$ при $x \in K$. Следовательно, x^* является решением классической задачи на условный максимум. И наоборот, если $f(x)$ достигает максимума в точке x^*, принадлежащей K, то

$$L(x^*, \lambda) = f(x^*) \text{ и } L(x^*, \lambda^*) \geqq L(x, \lambda^*).$$

Таким образом, можно сформулировать утверждение, оправдывающее введение функции Лагранжа:

а) *если* (x^*, λ^*) — *критическая точка* $L(x, \lambda)$, *то* $x^* \in K$;

б) *если* $L(x, \lambda)$ *достигает максимума в точке* x^*, λ^*, *тогда* $f(x)$ *достигает максимума на* K *в точке* x^*. *Если же* $f(x)$ *достигает максимума на множестве* K *в точке* x^*, *то существует вектор* λ^*, *такой, что* $L(x^*, \lambda^*)$ *максимальна. Эти утверждения справедливы и для задачи на минимум.*

В методе Лагранжа строится функция Лагранжа и затем находятся ее критические точки. Частные производные функции $L(x, \lambda)$ можно разделить на две группы. Частные производные по λ являются функциями ограничений g^i. Приравнивая эти производные нулю, получаем, что $x \in K$. Для вычисления оптимума решающую роль играют производные по x. Если их приравнять нулю, получим n уравнений вида

$$f_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_j^i = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.2.1}$$

Представим это выражение в векторной форме

$$\nabla f - \lambda G = 0, \qquad \text{где } G = [g_j^i] \text{ и } \lambda = [\lambda_i].$$

Приведенное выражение является системой уравнений относительно x и λ. Функции f и g^i не содержат λ. Поэтому система может рассматриваться как линейная относительно λ с матрицей G и вектором свободных членов ∇f. Рассматриваемая система содержит n уравнений и m переменных λ_i. Поэтому решение существует только тогда, когда не более m уравнений линейно независимы. Если ограничения задачи независимы, это условие выполняется. Таким образом, можно решать систему относительно множителей λ_i и получить единственный набор λ^*, не все компоненты которого равны нулю.

Пример. Пусть производственные функции каждого из двух продуктов зависят от двух (одних и тех же) факторов. Суммарное количество каждого фактора фиксировано. Пусть заданы цены продуктов. При каких условиях доход от выпуска будет максимальным?

Обозначим через x_1, x_2 объемы выпуска первого и второго продуктов соответственно. Пусть x_3, x_4 — объемы факторов, использованные при производстве первого продукта с производственной функцией $x_1 = F^1(x_3, x_4)$. Аналогично, $x_2 = F^2(x_5, x_6)$. Предполагается, что x_3 и x_5 представляют один и тот же фактор, так же как и x_4 и x_6. Задача состоит в следующем:

$$\max \{f(x) = p_1x_1 + p_2x_2\},$$

$$x_1 - F^1(x_3, x_4) = 0, \qquad x_3 + x_5 - k_1 = 0,$$

$$x_2 - F^2(x_5, x_6) = 0, \qquad x_4 + x_6 - k_2 = 0.$$

Функция Лагранжа в этом случае запишется в виде

$$L(x, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda_1[x_1 - F^1(x_3, x_4)] -$$
$$-\lambda_2[x_2 - F^2(x_5, x_6)] - \lambda_3(x_3 + x_5 - k_1) - \lambda_4(x_4 + x_6 - k_2).$$

Приравнивая частные производные по x нулю, получим шесть уравнений:

$$p_1 = \lambda_1, \qquad p_2 = \lambda_2,$$

$$\lambda_1(\partial F^1/\partial x_3) = \lambda_3, \qquad \lambda_1(\partial F^1/\partial x_4) = \lambda_4,$$

$$\lambda_2(\partial F^2/\partial x_5) = \lambda_3, \qquad \lambda_2(\partial F^2/\partial x_6) = \lambda_4.$$

Отсюда легко получить знакомые условия на выпуск, максимизирующий доход:

$$p_1(\partial F^1/\partial x_3) = p_2(\partial F^2/\partial x_5 = \lambda_3,$$
$$p_1(\partial F^1/\partial x_4) = p_2(\partial F^2/\partial x_6) = \lambda_4.$$

Следовательно, стоимость предельного продукта *) по каждому фактору будет одна и та же в обеих отраслях. Заметим, что все

---

*) Предельный анализ достаточно подробно описан в работе Баумоля [2]. (*Прим. перев.*)

множители Лагранжа оказались равными ценам. Если в приведенном случае имеет место конкурентное ценообразование, то λ_1, λ_2 — цены продуктов, а λ_3, λ_4 — цены факторов.

4.3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В примере, приведенном в предыдущем параграфе, множители Лагранжа оказались равными ценам. Такими же свойствами, как мы помним, обладают двойственные переменные в теории линейного программирования. Ниже будет предложена формальная интерпретация множителей Лагранжа.

Рассмотрим стандартную задачу условной оптимизации. Решим ее с помощью метода Лагранжа, который дает оптимальные векторы x^*, λ^*. Пусть i-е ограничение имеет вид $g^i(x) = b_i$.

Первоначально полагалось, что $b_i = 0$. Исследуем здесь влияние малого ослабления ограничения.

Обозначим через V^* оптимальное значение целевой функции ($V^* = f(x^*)$). Малое ослабление i-го ограничения приводит к малым изменениям оптимальных значений переменных. Однако предполагается, что условия оптимальности по-прежнему удовлетворяются, так что новое состояние, достигаемое в результате ослабления ограничений, также оптимально. Влияние ослабления на оптимальное значение целевой функции определяется формулой

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \sum_j \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i}. \tag{4.3.1}$$

Из ограничений имеем

$$\sum_j \frac{\partial g^k(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Умножим k-е равенство в (4.3.2) на λ_k^* и просуммируем по k. Получим

$$\sum_k \sum_j \lambda_k^* \frac{\partial g^k(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \lambda_i^*.$$

Вычтем это выражение из (4.3.1). Получим

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i}=\lambda_i^*+\sum_j\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}-\sum_h\lambda_h\frac{\partial g^h(x^*)}{\partial x_j}\right]\frac{\partial x_j}{\partial b_i}.$$

Выражение справа в скобках в силу условия оптимальности равно нулю, поэтому

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i}=\lambda_i^*.$$

Таким образом, λ_i^* соответствует маргинальной (предельной) скорости изменения целевой функции относительно малого ослабления i-го ограничения при условии, что все остальные ограничения неизменны. Эта интерпретация аналогична интерпретации двойственных переменных в теории линейного программирования (см. § 3.7 предыдущей главы).

В типичных экономических приложениях ограничения могут задаваться лимитами на ресурсы, а целевая функция — некоторым индексом общественного благосостояния. Тогда оптимальные множители Лагранжа соответствовали бы маргинальным (предельным) общественным оценкам ресурсов. В примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, множители соответствуют ценам на продукты и на факторы. Цены на факторы соответствуют предельным оценкам для фиксированного предложения факторов. Чему же соответствуют цены на продукты? Оказывается, они соответствуют маргинальным оценкам производственных функций, выступающих в качестве ограничений, или параметрам эффективности производственных функций.

Связь между множителями Лагранжа и переменными двойственной задачи в теории линейного программирования будет рассмотрена в следующей главе (см. § 5.5).

4.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Простейшая задача классического типа на условный оптимум, часто встречающаяся в экономическом анализе, имеет одно ограничение. Условия первого порядка имеют простой вид:

$$f_j-\lambda g_j=0,\qquad j=1,\ \ldots,\ n,$$
$$g=0.$$

Можно исключить λ, полагая, что какая-либо из переменных, например n-я, определяет масштаб. Тогда $\lambda = f_n/g_n$. Решая приведенную систему относительно λ, получаем

$$f_j/f_n = g_j/g_n, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $n = 2$. Тогда $f_1/f_2 = g_1/g_2$. Следовательно, касательная к линии уровня $f = c$ имеет тот же наклон, что и касательная к кривой $g=0$ (в оптимальной точке).

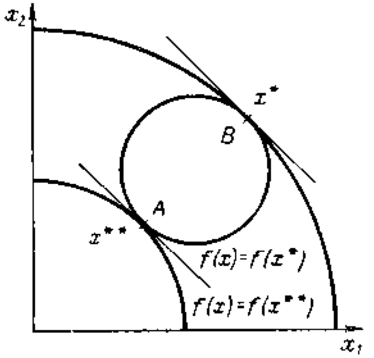


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация

При произвольном n имеет место аналогичное утверждение, эквивалентное известному условию об общей касательной гиперплоскости в точке оптимума у поверхности уровня целевой функции и поверхности ограничений $g = 0$.

Это положение иллюстрирует рис. 4.1. Здесь целевая функция — монотонное преобразование функции $x_1^2+x_2^2$. Функция ограничений также определяет окружность, но с центром в положительном квадранте. В этом случае имеются две точки касания — A и B. Точка A соответствует условному максимуму, а точка B — условному минимуму. Если изменить знак целевой функции, то положения максимума и минимума поменяются местами.

В этом простейшем случае представляет интерес следующий факт. В случае A линии уровня целевой функции и кривые ограничений лежат по разные стороны от касательной, а в случае B — по одну сторону. В классической задаче на условный оптимум условия второго порядка, которые будут рассматриваться в следующем параграфе, могут быть применены и к точке A и к точке B. Достаточные условия для определения максимума или минимума в расширении классического случая (рассматривается в следующей главе) основываются на достаточных условиях глобального оптимума, установленных во второй главе (см. § 2.8). Эти условия нельзя применить к таким точкам, как точка B. Поэтому условия следующего параграфа могут показаться сложными.

4.5. УСЛОВИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ОПТИМУМ

Анализ этого параграфа требует знания квадратичных форм, переменные которых связаны линейными ограничениями. Эти свойства устанавливаются в § Д6.3. Читатель, которому приведенные ниже рассуждения покажутся сложными, может только ознакомиться с результатами, приведенными в конце параграфа.

До сих пор мы были связаны с условиями *первого порядка*, т. е. с условиями, *необходимыми* для того, чтобы $f(x)$ имела максимум или минимум в точке x^*. Эти условия дают критические точки $L(x, \lambda)$. Однако они не указывают, является ли критическая точка максимумом или минимумом функции $f(x)$.

В этом параграфе будут рассматриваться условия *второго порядка*. Это так называемые *«достаточные»* условия того, что x^* дает локальный максимум или минимум. Строго говоря, термин «достаточные» здесь не совсем уместен. Условия первого порядка необходимы, а условия первого и второго порядка необходимы и достаточны, но сами по себе условия второго порядка не являются достаточными условиями оптимальности. Тем не менее этот термин общепринят. При этом неявно предполагается, что условия первого порядка уже выполнены.

При изложении классической задачи на условный оптимум редко приводится полное обсуждение условий второго порядка *). Исключение составляет случай одного ограничения. Ввиду важности условий второго порядка для математической экономики здесь рассматривается общий случай.

Условия второго порядка на безусловный максимум или минимум хорошо известны и обсуждаются в дополнении

*) Условия второго порядка в большинстве работ по современным методам оптимизации если и приведены, то только для случая одного ограничения. Часто ссылаются на Хэнкока, но он не развивает условия в подходящей для экономического анализа форме. Фриш приводит условия второго порядка в терминах характеристических корней окаймленных гессианов. Эти условия действительно необходимы и достаточны, но бесполезны для большинства аналитических целей. Самуэльсон [1] (дополнение А) получает детерминантное условие. Он рассматривает как *необходимые* и *достаточные* условия, приведенные ниже здесь только как *достаточные*, неявно предполагая невырожденность соответствующих матриц. Дальнейшее рассмотрение этого вопроса см. в § Д6.3.

Д8 (§ Д8.5). Они были получены при разложении функций в ряд Тейлора в точке оптимума и изучении условий, при которых в разложении член второго порядка всегда положителен (в случае минимума) или отрицателен (в случае максимума). Соответствующие утверждения, основанные на свойствах квадратичных форм, обычно выражаются в терминах матриц Гессе — матриц из частных производных второго порядка и их главных миноров.

В этом параграфе устанавливаются условия подобного типа для задачи на условный оптимум. Утверждения, которые будут установлены, аналогичны во многих отношениях соответствующим результатам для задачи на безусловный оптимум. К сожалению, путь к ним много труднее.

Функции $f(x)$ и $L(x, \lambda)$ достигают максимума или минимума при одних и тех же значениях x. Может показаться, что $L(x, \lambda)$ можно исследовать просто как целевую функцию на безусловный оптимум и использовать обычные методы. Однако это не так. Этого нельзя делать по двум причинам. Во-первых, $L(x, \lambda)$ не имеет максимума или минимума по λ, так как для оптимального x^* имеем $L(x^*, \lambda) = f(x^*)$ и, следовательно, $L(x^*, \lambda)$ не зависит от λ.

Во-вторых, здесь не все изменения x допустимы, как в случае задачи на безусловный оптимум.

Поэтому мы будем анализировать условия второго порядка для $L(x^*, \lambda^*)$, рассматривая $L(x, \lambda)$ только как функцию от x. При этом будем предполагать, что x удовлетворяет заданным ограничениям.

Разложим $L(x, \lambda)$ в точке x^*, λ^* в ряд Тейлора. Член второго порядка имеет вид

$$Q(dx) = \left(\frac{1}{2!}\right) \sum_j \sum_k (\partial^2 L/\partial x_j \partial x_k)\, dx_j\, dx_k.$$

Вариации dx должны удовлетворять ограничениям

$$dg^i = \sum_j g_j^i\, dx_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Точка x^*, λ^* дает минимум (максимум), если $Q(dx) > 0$ (<0) для всех dx, удовлетворяющих ограничениям. Ограничения, заданные в дифференциальной форме, линейны. Следовательно, мы разыскиваем условия, при которых квадратичная форма положительна (или отрицательна) для переменных, удовлетворяющих системе линейных ограничений.

Такая задача подробно обсуждается в § Д6.3. В настоящем параграфе мы применим полученные там результаты.

Обозначим через L симметрическую матрицу порядка $n \times n$, элементы которой равны

$$\left[\frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j \partial x_k}\right] = \left[f_{jk} - \sum_i \lambda_i^* g_{jk}^i\right],$$

а через G — матрицу порядка $m \times n$, составленную из производных по x функций ограничений $[g_j^i]$.

Тогда условия второго порядка примут вид (здесь dx заменен на y):

$y'Ly > 0$ при условии, что $Gy = 0$ (минимум),

$y'Ly < 0$ при условии, что $Gy = 0$ (максимум).

К условиям, записанным в такой форме, можно непосредственно применять результаты § Д6.3.

Чтобы использовать эти результаты, образуем окаймленную матрицу

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G' & L \end{bmatrix}.$$

Матрица $\hat{L}$ имеет порядок $(n + m) \times (n + m)$, так как G порядка $m \times n$, G' — $n \times m$, а нулевая подматрица соответственно порядка $m \times m$.

Сформулируем *достаточные* условия для выполнения условий второго порядка:

1. Задача на минимум. Определитель матрицы $\hat{L}$ и все главные миноры порядка больше чем $m + 1$ должны иметь знак $(-1)^m$, где m — число ограничений задачи.

2. Задача на максимум. Определитель матрицы $\hat{L}$ должен иметь знак $(-1)^n$, где n — число переменных в задаче. Главный минор порядка $m + n - 1$ (главный минор наиболее высокого порядка) должен иметь противоположный знак. Последующие по величине порядка главные миноры до главного минора порядка $m + 1$ должны иметь чередующиеся знаки.

Заметим, что эти условия достаточны, но не необходимы для выполнения условий второго порядка. Условия второго порядка могут выполняться, а приведенные условия относительно знаков определителя матрицы $\hat{L}$ и его главных миноров — нет.

Матрица $\hat{L}$ содержит множители Лагранжа. Множители могут быть исключены при использовании условий первого порядка. Тогда матрица $\hat{L}$ будет зависеть только от первых и вторых частных производных целевой функции и функций ограничений. Условия второго порядка определяются свойствами функций ограничений и целевой функции.

Пусть задача содержит только одно ограничение. В этом случае структура матрицы $\hat{L}$ и исключение λ существенно упрощаются. Для задачи с одним ограничением и двумя переменными имеем

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11}-\lambda g_{11} & f_{12}-\lambda g_{12} \\ g_2 & f_{12}-\lambda g_{12} & f_{22}-\lambda g_{22} \end{bmatrix}.$$

Вместо λ можно подставить $\lambda=f_1/g_1$ либо $\lambda=f_2/g_2$.

Условия упрощаются, если (что встречается достаточно часто в экономическом анализе) функция ограничений либо целевая функция линейны. Пусть линейна функция ограничений, т. е. $g(x)$ имеет вид $\sum a_j x_j - b = 0$. Тогда $g_j=a_j$, а $g_{jk}=0$. Заменим g_i на kf_i, где $k=1/\lambda$ (из условий первого порядка):

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} 0 & kf_1 & kf_2 & \dots & kf_n \\ kf_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kf_n & f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k(\nabla f) \\ k(\nabla f)' & H_f \end{bmatrix}.$$

Матрица $\hat{L}$ отличается от $\hat{F}$ — окаймленной матрицы Гессе функции f — только первой строкой и первым столбцом. Первая строка (первый столбец) матрицы $\hat{L}$ получается из первой строки (первого столбца) матрицы $\hat{F}$ умножением всех ее (его) элементов на k:

$$\hat{F}=\begin{bmatrix} 0 & f_1 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{1n} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \nabla f \\ (\nabla f)' & H_f \end{bmatrix}.$$

Из свойств определителя следует, что $\det\hat{L}=k^2\det\hat{F}$. Такое же соотношение справедливо и для соответствующих главных миноров. Следовательно, знаки определителей и главных миноров матриц $\hat{L}$ и $\hat{F}$ одинаковы. Поэтому условия второго порядка выражают в терминах $\hat{F}$.

Пусть теперь функция ограничений нелинейна, а целевая функция линейна. Тогда $f_{ij} = 0$. Элементы подматрицы L матрицы $\hat{L}$ имеют вид $-\lambda g_{ij}$. Элементы окаймления представляют собой первые производные g. Поэтому в этом случае получим

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0 & \nabla g \\ (\nabla g)' & -\lambda H_g \end{bmatrix}.$$

Обозначим теперь через $\hat{F}$ окаймленную матрицу Гессе функции g. Умножая каждую строку матрицы $\hat{L}$ на $-(1/\lambda)$, получим новую матрицу $\hat{L}^*$, такую, что

$$\det \hat{L}^* = (-1/\lambda)^{n+1} \det \hat{L} = \det \begin{bmatrix} 0 & kg_1 & \dots & \dots \\ kg_1 & g_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kg_n & g_{1n} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

где $k = -(1/\lambda)$. Определители $\det \hat{L}^*$ и $\det \hat{F}$ и соответственно их главные миноры связаны такими же соотношениями, что и в предыдущем случае. Но здесь $\det \hat{L} = (-\lambda)^{n+1} \det \hat{L}^*$. Для получения главного минора порядка n (главный минор наибольшего порядка) матрицы $\hat{L}$ из соответствующего главного минора матрицы $\hat{L}^*$ нужно умножить каждую строку на $(-\lambda)$. Такая же связь имеет место для главных миноров меньших порядков. Следовательно, главные миноры порядка s будут различаться множителем $(-\lambda^s)$.

Таким образом, в случае линейности целевой функции и $\lambda > 0$ (что имеет место в типичных экономических моделях) отношение последовательных главных миноров матрицы $\hat{L}$ имеет знак, противоположный знаку отношения соответствующих главных миноров матрицы $\hat{L}^*$, и, следовательно, противоположный знаку отношения главных миноров окаймленной матрицы Гессе $\hat{F}$.

Подытожим теперь правила для важного в экономике случая, в котором: а) имеется только одно ограничение и при этом б) целевая функция либо функция ограничений линейна.

Рассмотрим классическую задачу на условный оптимум, содержащую только одно ограничение. Пусть целевая функ-

ция либо функция ограничений (но не обе одновременно) линейна. Рассмотрим последовательность, состоящую из определителя окаймленной матрицы Гессе нелинейной функции и его главных миноров убывающих порядков вплоть до второго. Для того чтобы критическая точка представляла локальный максимум или минимум, достаточно, чтобы

а) в задаче на максимум члены последовательности имели чередующиеся знаки, если линейна функция ограничений, и одинаковые знаки, если линейна целевая функция;

б) в задаче на минимум члены последовательности имели одинаковые знаки, если линейна функция ограничений, и противоположные, если линейна целевая функция.

Еще раз подчеркнем, что приведенные выше условия достаточные, но не необходимые для локального максимума или минимума *).

4.6. ЭФФЕКТ ЗАМЕЩЕНИЯ В НЕОКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СПРОСА **)

Удачный пример использования условий второго порядка в качестве аппарата экономического анализа представляет собой классический анализ Слуцкого — Хикса поведения потребителя при изменении цены одного продукта в условиях конкурентного рынка. Этот анализ будет более подробно рассмотрен в гл. 8. Здесь же мы исследуем лишь чистый эффект замещения. Сформулируем задачу в несколько ином виде, чем Слуцкий или Хикс.

Потребитель характеризуется непрерывной функцией полезности $u(x)$, зависящей от объемов x_i, $i = 1, \ldots, n$ продуктов. Цена p_i единицы i-го продукта задана. Требуется минимизировать затраты, при которых может быть

*) Условия достаточны потому, что они исключают из рассмотрения необычные обстоятельства, такие, например, как случай, когда целевая функция «плоская» в некоторых направлениях, определенных ограничениями. Другие неприятные случаи могут встретиться, когда одно из ограничений имеет ту же форму, что и поверхность уровня целевой функции в окрестности оптимума.

**) Приведенная здесь формулировка — минимизация затрат при данном уровне полезности — обратна обычной формулировке — максимизации полезности при данном уровне дохода. Это наиболее простой подход к получению чистого эффекта замещения.

Обычная формулировка дана в гл. 8, § 8.2, где подробно обсуждается неоклассическая теория спроса. Ссылки на соответствующую литературу можно найти в конце параграфа.

достигнут заданный уровень полезности. Задача состоит в следующем:

$$\min px,$$
$$u(x) - u^0 = 0.$$

Это простая классическая задача на условный оптимум с одним ограничением и линейной целевой функцией. Запишем условия первого порядка:

$$\begin{aligned} &u(x) - u^0 = 0, \\ &p_i - \lambda u_i = 0. \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Очевидно, $\lambda > 0$. Поэтому можно использовать упрощенную форму условий второго порядка, приведенную в конце предыдущего параграфа.

Рассмотрим влияние малого изменения одной цены (остальные цены не меняются) на оптимальные значения переменных x при условии, что уровень полезности u^0 не меняется. Не уменьшая общности, можно считать, что меняется только цена n-го продукта.

Изменение p_n влечет за собой изменение оптимальных значений x^*, λ^*. Однако ограничение и условия первого порядка при этом остаются справедливыми, так что можно продифференцировать по p_n уравнения (4.6.1). Получим

$$\begin{aligned} &\sum_j u_j \frac{\partial x_j}{\partial p_n} = 0, \\ &-u_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} - \lambda^* \sum_j u_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial p_n} = 0, \quad i \neq n, \\ &1 - u_n \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} - \lambda^* \sum_j u_{nj} \frac{\partial x_j}{\partial p_n} = 0. \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

Умножим в (4.6.2) все равенства, кроме первого, на $1/\lambda^*$. Получим

$$\begin{aligned} &\sum_j u_j \frac{\partial x_j}{\partial p_n} = 0, \\ &u_i \frac{1}{\lambda^*} \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} + \sum_j u_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial p_n} = 0, \\ &u_n \frac{1}{\lambda^*} \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} + \sum_j u_{nj} \frac{\partial x_j}{\partial p_n} = \frac{1}{\lambda^*}. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Перепишем систему в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^*}\frac{\partial\lambda}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda^*} \end{bmatrix}. \quad (4.6.4)$$

Решим систему относительно $\partial x_n/\partial p_n$ по правилу Крамера. Вектор свободных членов имеет только один ненулевой элемент. Поэтому

$$\frac{\partial x_n}{\partial p_n} = \frac{1}{\lambda^*}\frac{U_{nn}}{\det U},$$

где U — матрица системы (4.6.4); U_{nn} — алгебраическое дополнение к элементу u_{nn}. Главный минор $|U_{nn}|$ связан с алгебраическим дополнением U_{nn} соотношением

$$U_{nn} = (-1)^{(n+1)+(n+1)}|U_{nn}| = |U_{nn}|.$$

Рассматривается задача на минимум с одним ограничением и линейной целевой функцией. Здесь U — окаймленная матрица Гессе функции ограничений, и $\lambda^* > 0$. Поэтому, если выполняются достаточные условия для минимума, имеем

$$|U_{nn}|/(\det U) < 0,$$

то есть

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial p_n}\right)_{u=u^0} < 0.$$

Приведенные рассуждения доказывают отрицательность чистого эффекта замещения в неоклассической теории спроса *).

Еще раз подчеркнем, что приведенное доказательство основано на предположении о том, что если потребитель достигает минимума затрат в выбранной точке x^*, детерминантные условия обязательно выполняются. Это, вообще говоря, не верно, хотя можно предположить, что допущение справедливо для «хороших» функций полезности при линейном ограничении.

---

*) Отрицательность эффекта замещения состоит в том, что при заданном уровне полезности u^0 с увеличением цены p_n выпуск n-го продукта уменьшается. (*Прим. перев.*)

4.7. УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМА В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА УСЛОВНЫЙ ОПТИМУМ

В классической задаче на условный оптимум все m ограничений являются равенствами, и $m < n$. Вообще говоря, эту систему уравнений можно свести к одному уравнению $G(x) = 0$ от $n - m$ независимых переменных. Единственный вид уравнения, решения которого образуют выпуклое множество,— линейное уравнение. Так что область определения целевой функции является выпуклым множеством только в том случае, когда $G(x)$ линейна. Для линейности $G(x)$ достаточно, чтобы все $g^i(x)$ были линейны. Это условие не является необходимым, поскольку нелинейные поверхности могут определять линейное пересечение.

Только в случае линейного ограничения $G(x) = 0$ удовлетворяются условия глобального оптимума. Этот случай охватывает большой класс простых экономических моделей.

В задаче потребительского выбора, сформулированной в предыдущем параграфе, не выполняются условия глобального оптимума, поскольку допустимое множество, определяемое уравнением $u(x) = u^0$, не выпукло. Известно, что в этом случае могут возникнуть те же ситуации, что и в задаче максимизации $u(x)$ при выполнении линейного бюджетного ограничения.

Поскольку эта задача удовлетворяет условию глобального оптимума, можно надеяться, что обращенная задача (задача минимизации px при условии $u(x) = u^0$) должна также иметь глобальный оптимум.

Действительно, в задаче, аналогичной задаче потребительского выбора, можно удовлетворить условиям глобального оптимума, если сделать ограничения неравенствами. Множество, определяемое соотношением $u(x) \geqq u^0$, выпукло. Но полученная задача уже не является задачей классического типа. Хотя, как мы увидим в следующей главе, в этом случае решение задачи при ограничениях-неравенствах будет совпадать с решением классической задачи, если обеспечено выполнение условий глобального оптимума. Заметим, что классические условия второго порядка дают уверенность в существовании локального максимума или минимума при некоторых оговорках (упомянутых в § 4.4). При этих оговорках, однако, более общие условия следующей главы не выполняются.

Упражнения

1. Пусть $f(x) = x_1^2 + 2bx_1x_2 + x_2^2$. В каком диапазоне значений параметра b существуют:

а) локальный минимум $f(x)$ при $x_1 + x_2 = 1$?

б) локальный максимум $f(x)$ при $x_1 + x_2 = 1$?

2. Рассмотрим производную по направлению $D_v f(x)$ в точке x как функцию от v, задаваемую в виде $\Phi(v) = \nabla f(x) \cdot v$ при условии, что $v'v = 1$. Показать, что производная по направлению максимальна в направлении вектора градиента.

3. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух индивидуумов и двух продуктов. Функция благосостояния имеет вид $W = u_1^a u_2^{1-a}$. Индивидуальные функции полезности имеют вид $u_1 = x_{11}^b x_{21}^{1-b}$, $u_2 = x_{12}^c x_{22}^{1-c}$, где x_{ij} — количество i-го продукта, потребляемое j-м индивидуумом.

Пусть суммарные объемы каждого из двух продуктов заданы. Найти оптимальное распределение продуктов между индивидуумами. Дать интерпретацию двойственных переменных. (Предполагается, что $0 < a, b, c < 1$.)

4. Рассмотреть условия второго порядка для задачи упражнения 1 при $b = 1$.

5. Исследовать связь между решениями двух следующих задач при различных k:

а) $\max f(x) : g(x) = 0$;

б) $\max f(x) : g(x) = 0,\ h(x) = 0$,

где $h(x) = f_1/f_2 - k(g_1/g_2)$. (Предполагается, что x — трехмерный вектор.)

6. Рассмотрим экономическую систему из упражнения 3. Пусть каждая функция полезности зависит от отношения собственного потребления продукта к потреблению другим индивидуумом. Имеем

$$u_1 = r_1^b r_2^{1-b}, \quad u_2 = r_1^{-c} r_2^{c-1},$$

где $r_i = x_{i1}/x_{i2}$.

Как и прежде, найти оптимальное распределение продуктов и дать интерпретацию двойственных переменных.

5. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Эта глава основана на материале гл. 2, 3 и 4. Параграфы 5.1—5.5 не требуют дополнительной математической подготовки. Параграфы 5.6 и 5.7 (которые могут быть опущены при первом чтении) требуют некоторого знакомства с отображениями и теоремами о неподвижной точке, приведенными в дополнениях Д8 (§ Д.8.7) и Д9.

5.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Классический метод решения задач на условный оптимум, обсуждаемый в предыдущей главе, предполагает равенства в функциональных ограничениях и отсутствие прямых ограничений (обычно это ограничения на неотрицательность переменных). Этот метод широко используется в экономическом анализе. Однако большинство экономических задач в явном или неявном виде содержат особенности, которые не позволяют анализировать их классическими методами. Почти всегда неявно предполагается неотрицательность, по крайней мере, некоторых переменных. Функциональные ограничения точнее описываются неравенствами, чем равенствами. Традиционный экономический анализ основывается на убежденности (часто обоснованной) в том, что функциональные ограничения всегда эффективны, а прямые не существенны в окрестности оптимума. Часто возникают осложнения из-за того, что неявные ограничения упускаются из рассмотрения и не формализуются. Экономисты развивают модели все возрастающей сложности. Поэтому область использования немодифицированного классического метода решения задач на условный оптимум все более и более ограничивается.

Рассмотрим следующий простой пример. Пусть функция полезности потребителя, зависящая от двух переменных (объемов продуктов x_1 и x_2), задается в виде $u = (1 +$

*) Хорошее изложение обобщений классического метода дано в работе Х э д л и [3], гл. 3.

$+ x_1)$ $(1 + x_2)$. Доход потребителя равен единице. Кроме того, задан вектор цен на продукты (4.1). Требуется найти равновесное потребление. Сформулированная задача оптимизации может быть записана в следующем виде:

$$\max \{u = (1 + x_1)\ (1 + x_2)\},$$
$$4x_1 + x_2 = 1.$$

Решим эту задачу, используя традиционные методы. Получим оптимальные значения переменных $x^* = (-1/4, 2)$ и оптимальный уровень полезности $u^* = 9/4$. Мы пришли к отрицательному значению одной переменной, не смотря на то, что принятый вид функции полезности вполне естественный.

Получив отрицательное значение составляющей решения, экономист отверг бы его, сказав: «Я забыл вас предупредить, что объемы продуктов не могут быть отрицательными». При формальном подходе к задаче не всегда очевидно, что ограничения на неотрицательность могут оказаться существенными.

Пусть теперь $x_1 = 0$. Это ближайшая точка, куда можно прийти из оптимальной точки, вычисленной без учета ограничения на неотрицательность. Тогда $x_2 = 1$ и $u\,(0,1) = 2$, т. е. $u\,(0,1) < u^*$. В точке (0,1) отношение u_1/u_2 *) равно 2, а $p_1/p_2 = 4$. Как видим, в этой точке классическое условие $u_1/u_2 = p_1/p_2$ не выполняется. Однако непосредственное вычисление показывает, что при условии неотрицательности переменных точка (0,1) оптимальна.

Аналогичная ситуация возникает в простой модели экономической системы, в которой обращаются два продукта и два фактора. При этом запасы факторов предполагаются заданными. Рассмотрим производственные функции, у которых кривые постоянства объемов выпусков пересекают оси (подобно кривым безразличия функции полезности, приведенной выше). Из того, что классические условия для оптимального производства выполняются — множества постоянных объемов касаются — следует, что один из факторов имеется в отрицательном количестве. Производственные функции, приводящие к подобной ситуации, возможны. Поэтому естественна необходимость уметь обращаться с такими случаями. Производство с одним видом

*) Напомним, что $u_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$. (*Прим. перев.*)

капитала или с одним видом труда кажется очень специальным случаем простой модели, в то время как производство с нулевым количеством одного или более видов труда или капитала в сложной модели представляет собой обычную ситуацию.

5.2. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Простейшим расширением классических задач на условный оптимум являются задачи, в которых все или некоторые переменные подчинены прямым ограничениям. Такими ограничениями чаще всего являются ограничения на неотрицательность. Будем рассматривать задачу максимизации вида

$$\max f(x),$$
$$g^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x \geqq 0.$$

Определим функцию $L(x, \lambda)$ обычным образом. Возможны три ситуации:

а) функция $L(x, \lambda)$ имеет регулярный *) локальный максимум в критической точке (x^*, λ^*) при $x^* > 0$, и задача удовлетворяет условиям сильного глобального оптимума. (Допустимое множество выпукло, функция $f(x)$ вогнута, и либо выпуклость, либо вогнутость строгая);

б) функция $L(x, \lambda)$ имеет регулярный локальный максимум в критической точке (x^*, λ^*) при $x^* > 0$. Однако условия глобального оптимума не выполняются;

в) функция $L(x, \lambda)$ не имеет критической точки при $x > 0$, которая являлась бы локальным максимумом.

В первом случае ограничения на неотрицательность не эффективны в окрестности глобального оптимума и ими можно пренебречь. Этот случай встречается в традиционном экономическом анализе.

В третьем случае глобальный оптимум *должен* достигаться в точке, в которой какое-либо ограничение на неотрицательность существенно. Во втором случае оптимум *может* достигаться в такой точке. Обычно это нуждается в проверке.

---

*) Регулярный оптимум — оптимум, достигающийся внутри области определения оптимизируемой функции. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим свойства функций $L(x, \lambda)$ и $f(x)$ в точке, в которой $x_k = 0$ по крайней мере для одного индекса k. Поскольку функциональные ограничения $g^i(x) = 0$ пока еще представляют собой равенства, максимумы $L(x, \lambda)$ и $f(x)$ достигаются в одной и той же точке x^*. Кроме того, из $\partial L/\partial \lambda_i = g^i$ следует, что $\partial L/\partial \lambda_i = 0$. Таким образом, некоторые из условий первого порядка для максимума L по-прежнему выполняются.

Какие из оставшихся условий первого порядка ($\partial L/\partial x_j = 0$) будут еще выполняться? При случайном сочетании параметров условий задачи они еще могут выполняться. Однако в общем случае эти условия не выполняются. Какими же условиями они заменяются?

Разделим множество индексов компонент вектора x на две группы. Пусть $j \in S$, если $x_j = 0$, и $j \notin S$, если $x_j > 0$. Тогда можно вести рассмотрение интересующего нас вопроса следующим образом.

Пусть $j \notin S$. При этом возможны малые вариации x_j как в одну, так и в другую сторону. Поэтому x не может быть оптимальным, если $\partial L/\partial x_j \neq 0$.

Пусть теперь $j \in S$. Тогда возможны малые вариации только в сторону увеличения x_j. Поэтому, если $\partial L/\partial x_j > 0$, x не может быть оптимальным. Иначе можно было бы увеличить L при малом возрастании x. Однако малые уменьшения x не допустимы, поэтому нельзя исключать из рассмотрения точку x, если в ней $\partial L/\partial x_j < 0$.

Подведем итоги сказанного выше.

Оптимальная точка x^* задачи $\max f(x)$ *при условии, что $g^i(x) = 0$, $x \geqq 0$, удовлетворяет условиям:*

а) $$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j^*} = f_j - \sum_i \lambda_i g_j^i \leqq 0 \ \textit{и либо}$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j^*} = 0, \ \textit{либо} \ x_j^* = 0;$$

б) $$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} = -g^i(x) = 0.$$

Если же рассматривается задача минимизации, то неравенства в (а) меняют знак на обратный.

В справедливости последнего утверждения убеждаемся тем же путем, что и при рассмотрении задачи максимизации.

Эти условия могут быть записаны несколько более компактно, если использовать обозначение, которое будет применяться в следующем параграфе. Обозначим через $\hat{L}_x$ вектор из частных производных L по переменным x, а через $\hat{L}_\lambda$ — вектор из частных производных L по переменным λ. По причинам, которые станут ясны в дальнейшем, будем считать, что $\hat{L}_x$ — вектор-столбец, а $\hat{L}_\lambda$ — вектор-строка. Для задачи на максимум условия оптимальности примут вид.

1) $\hat{L}_x \leqq 0, \quad \hat{L}'_x \cdot x = 0, \quad x \geqq 0,$

2) $\hat{L}_\lambda = 0,$

где штрих у матрицы $\hat{L}_x$ означает транспонирование.

Пример. Вернемся к примеру, рассмотренному ранее. Запишем задачу в виде: Найти max $\{u = (1 + x_1)(1 + x_2)\}$, если $4x_1 + x_2 = 1$; $x_1, x_2 \geqq 0$.

Мы уже знаем, что функция L не имеет критической точки при $x_1, x_2 > 0$. Приравняем сначала x_1, затем x_2 нулю. При выполнении бюджетных ограничений получим точки (0,1) и (1/4,0). В точке (0,1) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda = 0, \quad \text{следовательно, } \lambda = 1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 \quad \text{при } \lambda = 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

В точке (1/4, 0) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 4\lambda = 0, \quad \text{следовательно, } \lambda = 1/4;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 \quad \text{при } \lambda = 1/4,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Точка (0,1) удовлетворяет условиям оптимальности, а точка (1/4, 0) — нет.

К сожалению, не существует универсального правила для определения, какие из переменных и в каком случае следует приравнять нулю для получения оптимального решения. В принципе, можно попытаться сначала приравнять нулю по одной переменной, затем по две, по три и т. д. После этого сравнить значения $f(x)$ для всех вариантов и выбрать тот из них, который удовлетворяет условиям оптимальности. Вообще говоря, не более чем $n - m$ переменных могут одновременно обращаться в нуль, так как функциональные ограничения уже определяют m переменных через оставшиеся. Таким образом, вообще говоря, по крайней мере m из условий $\partial L/\partial x_j \leqq 0$ обращаются в равенства, и этого достаточно для однозначного определения значений m множителей Лагранжа.

Число групп, в которых k переменных приравнены нулю, когда k меняется от 1 до $n - m$, огромно в задаче с большим числом переменных и ограничений. Поэтому приведенные условия оптимальности не дают конструктивного метода решения сложных задач.

В экономическом анализе, однако, интересно знать, что случится с условиями оптимальности, когда решение выходит на границу, определенную ограничением на неотрицательность. Приведенные выше рассуждения дают ответ на этот вопрос. Задачи подобного типа (в которых оптимальное решение достигается на границе области определения целевой функции) часто встречаются в экономической теории при изучении ситуаций, отвечающих изменению параметров условий задачи, перемещающих внутренние точки к границе. Следовательно, нулевые значения компонент решения представляют для нас интерес. Экономическая интерпретация условий оптимальности при нулевых значениях переменных не представляет трудностей. Однако содержательная интерпретация в каждом частном случае зависит от самой задачи.

В случае, когда функция полезности зависит от n переменных и бюджетное ограничение линейно, условия оптимальности могут быть интерпетированы как требование, заключающееся в том, что отношение предельной полезности к цене будет одним и тем же для всех действительно потребляемых продуктов, и не больше (обычно меньше) для непотребляемых продуктов. Если же бюджетное ограничение не одно, интерпретация условий оптимальности может быть более сложной.

5.3. ОГРАНИЧЕНИЯ-НЕРАВЕНСТВА

Теперь мы в состоянии рассмотреть общую задачу условной оптимизации, содержащую ограничения произвольного вида:

$$\max f(x),$$

$$g^i(x) \leqq 0, \quad x \geqq 0.$$

Общая задача может быть сведена к случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе, в котором введены ограничения на неотрицательность, а функциональные ограничения оставлены в форме равенств. Это делается введением неотрицательных переменных z_i. При этом i-е ограничение-неравенство заменяется парой соотношений

$$g^i(x) + z_i = 0, \quad z_i \geqq 0.$$

В полученной задаче $n + m$ переменных; x и z соответственно n- и m-мерные векторы. Ограничения на неотрицательность наложены на все переменные.

Построим функцию Лагранжа

$$L(x, z, \lambda) = f(x) - \sum \lambda_i (g^i(x) + z_i) = \\ = f(x) - \sum \lambda_i g^i(x) - \sum \lambda_i z_i.$$

Условия оптимальности по x_j те же, что и прежде. Условия оптимальности по z_i имеют вид

$$\frac{\partial L(x, z, \lambda)}{\partial z_i} = -\lambda_i \leqq 0 \text{ и либо } \lambda_i = 0, \text{ либо } z_i = 0.$$

Эти условия не влияют непосредственно на выбор x. Их сущность полностью определяется эквивалентным утверждением

$$g^i(x) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \lambda \geqq 0, \quad \sum \lambda_i g^i(x) = 0.$$

Следовательно, если образовать функцию Лагранжа, не учитывающую неравенства в функциональных ограничениях, в виде

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum \lambda_i g^i(x)$$

и добавить при этом условия неотрицательности λ ($\lambda \geqq 0$), тогда все точки, являющиеся оптимальными относительно z в функции $L(x, z, \lambda)$, удовлетворяют условию

$$L(x, z, \lambda) = L(x, \lambda).$$

Рассмотрим $\partial L(x, \lambda)/\partial \lambda_i = -g^i(x)$. По условию $g^i(x) \leqq \leqq 0$, а из условий оптимальности по z применительно к $L(x, z, \lambda)$ имеем $\lambda \geqq 0$ и либо $g^i(x) = 0$, либо $\lambda_i = 0$. Отсюда следует

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} \geqq 0, \quad \text{либо } \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \text{либо } \lambda_i = 0$$

(либо оба одновременно).

Приведенные выше условия можно рассматривать как условия *минимума* $L(x, \lambda)$ относительно λ при заданном ограничении на неотрицательность λ ($\lambda \geqq 0$).

Решаем задачу на условный максимум $f(x)$, и хотя мы в состоянии исследовать $L(x, \lambda)$ на *максимум* по λ, мы теперь ищем *минимум* по λ выражения, аналогичного классической функции Лагранжа.

Что дало нам основание для таких рассуждений?

Прежде всего заметим, что в строго классическом случае имеем $g^i(x) = 0$ для всех i. Поэтому, если заменить оптимальную точку (x^*, λ^*) на (x^*, λ'), где λ' — произвольный m-мерный вектор, то

$$L(x^*, \lambda^*) = L(x^*, \lambda') = f(x^*).$$

Это значит, что на максимальное значение $L(x, \lambda)$ не влияют изменение λ на допустимом множестве. В строго классической задаче можно было бы исследовать $L(x, \lambda)$ на минимум по λ с таким же успехом, как и на максимум. Ничего бы при этом не изменилось. Нам, однако, удобнее рассматривать задачу на максимум.

Далее, заметим, что в исследуемом случае в любой оптимальной точке $L(x, \lambda)$, независимо от того, рассматривается ли максимум или минимум по λ, имеет место либо $\lambda_i = 0$, либо $g^i(x) = 0$. Следовательно, и в задаче на максимум, и в задаче на минимум по λ в любой оптимальной точке $L(x, \lambda) = f(x)$. Это соотношение определяется, таким образом, функциями ограничений, а не целевой функцией.

Рассмотрим влияние малых вариаций λ относительно оптимального значения λ^*, учитывая при этом неотрицательность значений λ. Пусть λ_i^* положительно, тогда $g^i(x^*) = 0$. Следовательно, $L(x^*, \lambda^*)$ не меняется, как и в классическом случае. Если же $\lambda_i^* = 0$, может случиться, что $g^i(x^*) < 0$. Из-за неотрицательности λ единственная возможная вариация λ относительно λ^* есть некоторая положительная величина ε. В этом случае член $-\lambda_i g^i(x^*)$ в выражении для $L(x^*, \lambda)$ имеет положительный знак, и $L(x^*, \lambda) > L(x^*, \lambda^*)$. Таким образом, в оптимальной точке $L(x, \lambda)$ достигает минимума по λ. Свойство минимума выявляется только тогда, когда по крайней мере одно ограничение неэффективно.

Подытожим свойства оптимальной точки x^*, λ^* для общей задачи оптимизации:

$$\max f(x),$$

$$g^i(x) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x \geqq 0.$$

$$1)\ f_j - \sum_i \lambda_i g_j^i \leqq 0; \quad \text{либо } f_j - \sum_i \lambda_i g_j^i = 0,$$
$$\text{либо } x_j = 0;$$
$$2)\ \lambda \geqq 0, \quad g^i \leqq 0; \quad \text{либо } g^i = 0,$$
$$\text{либо } \lambda_i = 0\ ^{*)}.$$

В экономическом анализе мы часто не пытаемся выяснить, является ли некоторая точка оптимальной, а только интересуемся свойствами точки, про которую известно, что она оптимальна. В таких случаях условия (2) устанавливают, что можно игнорировать ограничения, неэффективные в оптимальной точке.

Если рассматривается задача минимизации, то знак неравенств в (1) нужно поменять на обратный.

5.4. СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Рассмотренные выше оптимальные условия для общей задачи максимизации обычно называются условиями Куна — Таккера **). Обычно они выражаются в терминах функции Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum \lambda_i g^i(x)$$

и записываются в векторной форме при помощи введенных ранее обозначений. В этих обозначениях условия оптимальности имеют вид:

$$1)\ \hat{L}_x \leqq 0, \quad \hat{L}'_x x = 0, \quad x \geqq 0;$$

$$2)\ \hat{L}_\lambda \geqq 0, \quad \lambda \hat{L}_\lambda = 0, \quad \lambda \geqq 0.$$

В первоначальной формулировке Куна и Таккера и в большинстве изложений теории Куна — Таккера ограничения приводятся в форме $g^i \geqq 0$, а функция Лагранжа —

*) Здесь термин «либо. . .либо» используется в том смысле, что могут выполняться и оба равенства.

**) Впервые условия, которые содержат несколько больше, чем приведено здесь, были даны Куном и Таккером [1]. Более полное изложение этого вопроса приведено у Хэдли [3].

См. также Эрроу, Гурвиц и Удзава, гл. 3 (*Прим. перев.*)

в виде $L(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g^i(x)$. Обратные знаки в ограничениях и перед λ взаимно уравновешивают друг друга. Поэтому форма условий оптимальности не меняется.

Мы уже заметили, что $L(x, \lambda)$ — функция от двух наборов переменных — имеет в оптимальной точке максимум по x и минимум по λ. Точка, в которой функция достигает максимума по одним переменным и минимума по другим, называется *седловой точкой*. Возникновение этого термина объясняется видом графика функции Лагранжа в трехмерном пространстве.

Решение общей задачи оптимизации может поэтому рассматриваться как нахождение седловой точки функции Лагранжа, или точки, *максиминимизирующей* или *минимаксимизирующей* функцию Лагранжа. Последняя терминология следует из того, что мы находим максимум по x и минимум по λ. В § 5.6 будет показано, что если x^*, λ^* — оптимальная точка L, то

$$L(x^*, \lambda^*) = \max_x \min_\lambda L(x, \lambda) = \min_\lambda \max_x L(x, \lambda).$$

Теперь мы в состоянии строго установить связь между множителями Лагранжа и двойственными переменными задачи линейного программирования. Мы уже упоминали об этой связи в гл. 4.

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования и двойственную к ней

$$\begin{array}{ll} \max cx, & \min yb, \\ Ax \leqq b, \quad x \geqq 0; & yA \geqq c, \quad y \geqq 0. \end{array}$$

Функция Лагранжа для прямой задачи имеет вид

$$L(x, \lambda) = cx - \lambda Ax + \lambda b.$$

Имеем $\hat{L}_x = c - \lambda A$, $\hat{L}_\lambda = -Ax + b$, и условия Куна — Таккера записываются в виде:

1) $\lambda A \geqq c, \quad (c - \lambda A)\, x = 0, \quad x \geqq 0;$
2) $Ax \leqq b, \quad y\,(b - Ax) = 0, \quad \lambda \geqq 0.$

Пусть $\lambda = y$. Тогда (1)—(2) будут представлять ограничения и условия равновесия для прямой и двойственной задач. Если мы построим функцию Лагранжа для двойственной задачи, получим, что оптимальные значения обеих функций Лагранжа равны между собой: $cx^* = y^*b$. Это равенство соответствует теореме двойственности линейного программирования.

Таким образом, множители Лагранжа в общей задаче оптимизации играют роль двойственных переменных в линейном программировании и сводятся к ним, если общая задача оптимизации линейна.

В экономических задачах можно поэтому интерпретировать множители Лагранжа так же, как и двойственные переменные (обычно как неявные или условные оценки).

Ясно, что условия Куна — Таккера являются обобщением условий оптимальности каждого специального типа задач оптимизации. Теоретически можно было бы исходить из этих более общих условий при рассмотрении частных случаев — линейного программирования и строгих классических задач на условный оптимум.

5.5. ДВОЙСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Рассмотрим общую задачу максимизации, для которой известно решение x^*. Требуется найти оптимальные значения двойственных переменных λ. Такой тип задач играет важную роль в экономическом анализе, где предполагается, что отдельные составляющие экономической системы (обычно фирма или потребитель) уже определили координаты своего оптимума тем или иным способом (возможно, ошибочно). Интересно знать, какова природа двойственных переменных, связанных с оптимумом и обычно рассматриваемых как некоторые условные оценки.

Поскольку оптимальное значение x^* задано, величины $f(x^*)$, $g^i(x^*)$ и их производные могут рассматриваться как константы. Для упрощения записи обозначим через $A = [a_{ij}]$ матрицу из $[g^i_j]$, через c — вектор $[f_j]$, а через b — вектор $[-g^i]$. Матрица A — порядка $m \times n$, c — вектор-столбец порядка n, а b — вектор-строка порядка m.

Если рассматривается задача в строго классической форме, где все ограничения — равенства и отсутствуют требования неотрицательности x (но не λ), условия оптимальности по x запишутся в виде

$$c - \lambda A = 0.$$

Приведенное соотношение представляет собой систему уравнений относительно λ. В этой системе n уравнений и только m переменных λ. Однако природа оптимального решения гарантирует, что только m уравнений линейно независимы. В качестве базиса A_B можно взять любые m строк матрицы A. Обозначим соответствующие элементы c через c_B. Тогда λ определяется из системы

$$\lambda = A_B^{-1} c_B.$$

В общей задаче максимизации условия оптимальности представляют собой неравенства. Взяв нужную для определения λ часть условий Куна — Таккера, получим

$$\lambda A \geqq c, \quad \lambda \geqq 0.$$

Приведенные неравенства похожи на ограничения в задаче линейного программирования. Подберем подходящую целевую функцию. В нашем случае $L(x, \lambda)$, которая достигает минимума по λ в точке x^*, λ^*, линейна относительно λ с коэффициентами $(-g^i)$. Величина $f(x^*)$ является константой и при оптимизации может быть отброшена. Следовательно, минимизация $L(x^*, \lambda)$ по λ эквивалентна минимизации λb, где b определено раньше.

Таким образом, мы установили, что в общей задаче максимизации оптимальные значения λ при заданном x^* определяются из следующей задачи линейного программирования:

$$\min \lambda b,$$

$$\lambda A \geqq c, \quad \lambda \geqq 0,$$

где $a_{ij} = g_j^i(x^*)$, $\quad b_i = -g^i(x^*)$, $\quad c_j = f_j(x^*)$.

В гл. 4 было показано, что в строгом классическом случае множители Лагранжа удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*,$$

где $V^* = f(x^*)$, $b_i = g^i(x^*)$. Это привело к интерпретации оптимальной величины i-го множителя как предельного значения ослабления i-го ограничения.

Можно ли в общем случае дать множителям ту же интерпретацию? Оказывается, можно, но с большими изменениями.

Если, как и в классическом случае, положить $g^i(x^*) = b_i$, то нетрудно установить следующее утверждение. Если $b_i < 0$, т. е. ограничение неэффективно, то малое ослабление не влияет на оптимальные значения x и поэтому не влияет и на $f(x^*)$. Следовательно, будем иметь $\partial V^*/\partial b_i = 0$, если $b_i < 0$. Однако из условий Куна — Таккера следует, что $\lambda_i^* = 0$, если $b_i < 0$. Таким образом, при неэффективности ограничений в общем случае справедливы те же соотношения, что и в классическом случае.

При малых вариациях в окрестности оптимума неэффективные ограничения остаются неэффективными и могут быть отброшены. Следовательно, можно рассматривать задачу только с ограничениями-равенствами. Если же все прямые ограничения на x неэффективны, то анализ проводится точно так же, как в классическом случае.

Именно требование неотрицательности x, а не неравенства в функциональных ограничениях, доставляет беспокойство. Игнорируя неэффективные функциональные ограничения и проводя анализ, аналогичный анализу в классическом случае, получим, как и раньше (см. гл. 4, § 4.3), соотношение

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i^* + \sum_j \left(f_j - \sum_{k \in S} \lambda_k^* g_j^k\right) \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i},$$

где S — множество индексов эффективных ограничений, и все производные взяты в оптимальной точке.

В классическом случае из-за условий оптимальности выражение в скобках обращается в нуль, и равенство $\frac{\partial V^*}{\partial b_i}$ и λ_i^* установлено. В рассматриваемом случае то же самое выполняется, если x^* строго положительный вектор.

Если же $x_j^* = 0$ для некоторого j, выражение в скобках может быть отрицательным, и условия Куна — Таккера удовлетворяются. Рассмотрим положительное изменение b_i. Из требования неотрицательности x следует, что $\partial x_j^*/\partial b_i$ неотрицательно, если $x_j^* = 0$.

Следовательно,

$$\left(f_j - \sum_{k \in S} \lambda_k g_j^k\right) \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} \leqq 0.$$

Поэтому в общем случае имеем

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} \leqq \lambda_i \quad \text{и либо} \quad \frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i, \quad \text{либо} \quad x_j^* = 0$$

для некоторого j;

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = 0, \quad \text{если} \quad b_i < 0.$$

Экономическая интерпретация совершенно ясна. Множитель λ_i представляет предельную величину изменения i-го ограничения (0, если ограничение неэффективно) при условии, что прямые ограничения не эффективны в x^*. Если же существует эффективное прямое ограничение в x^*, оно ограничивает возможность изменения x^* и стремится уменьшить величину ослабления функционального ограничения.

Требование неотрицательности λ не усложняет ситуацию. Ослабление ограничений не может уменьшить оптимальное значение V, так что $\partial V^*/\partial b_i$ неотрицательно.

5.6. ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ *)

В § 5.4 утверждалось, что в задаче, имеющей локальный условный максимум, функция Лагранжа удовлетворяет условию

$$\max_x \min_\lambda L(x, \lambda) = \min_\lambda \max_x L(x, \lambda) = L(x^*, \lambda^*),$$

где x^*, λ^* — седловая точка $L(x, \lambda)$.

В этом параграфе будут приведены два результата, важные для теории оптимизации. Прежде всего будет показано, что minimax $F(x, y)$ = maximin $F(x, y)$ тогда и только тогда, когда $F(x, y)$ имеет седловую точку. Затем будут приведены условия, гарантирующие существование седловой точки у функции $F(x, y)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $F(x, y)$, определенную на компактах X и Y. Можно утверждать следующее:

Теорема I

$\min_y \max_x F(x, y) \geqq \max_x \min_y F(x, y)$. *Равенство выполняется тогда и только тогда, когда* $F(x, y)$ *имеет седловую точку* (x^*, y^*). *В этом случае*

$$\max_x \min_y F(x, y) = \min_y \max_x F(x, y) = F(x^*, y^*) \text{ **)}.$$

---

*) В этом параграфе изложен более современный, чем в предыдущем, материал. Здесь требуется использование теоремы Какутани о неподвижной точке. Математические основы можно найти в § Д8.7 и Д9.

**) Эта теорема лежит в основе теории игр, она связана с теоремой Фон Неймана (1928 г.) Приведенное здесь доказательство заимствовано у Гейла [1].

Прежде всего заметим, что по определению $\max_x F(x, y) \geqq F(x, y)$ для всех x и любого y, независимо от того, имеет $F(x, y)$ седловую точку или нет. Тогда

$$\min_y [\max_x F(x, y)] \geqq \min_y F(x, y)$$

для всех x. Таким образом, первая часть теоремы доказана. Это предложение ($\operatorname{minimax} F \geqq \operatorname{maximin} F$) может рассматриваться как основная лемма. Аналогия этой леммы с основной леммой линейного программирования очевидна.

Предположим, что x^*, y^* — седловая точка функции $F(x, y)$. Обозначим $s = F(x^*, y^*)$. По определению седловой точки имеем $F(x^*, y) \geqq s$ для всех y; следовательно,

$$\min_y F(x^*, y) \geqq s,$$

и

$$\max_x \min_y F(x, y) \geqq \min_y F(x^*, y) \geqq s.$$

Аналогичным образом, исходя из неравенства $F(x, y^*) \leqq s$ для всех x, получаем

$$\min_y \max_x F(x, y) \leqq s.$$

Отсюда

$$\min_y \max_x F(x, y) \leqq s \leqq \max_x \min_y F(x, y).$$

Сравнивая полученное соотношение с неравенством, составляющим содержание основной леммы, получим

$$\max_x \min_y F(x, y) = \min_y \max_x F(x, y) = s = F(x^*, y^*).$$

Следовательно, существования седловой точки достаточно для выполнения утверждения теоремы.

Докажем необходимость. Выберем x^* таким образом, что

$$\min_y F(x^*, y) = \max_x \min_y F(x, y) = s_1,$$

а y^* — так, что

$$\max_x F(x, y^*) = \min_y \max_x F(x, y) = s_2.$$

Поскольку $s_1 = s_2 = s$, то

$$F(x, y^*) \leqq s \leqq F(x^*, y).$$

Следовательно, $s = F(x^*, y^*)$ определяет седловую точку. Доказательство теоремы завершено.

Теперь можно доказать следующую теорему существования.

Теорема II

Пусть компакты X и Y выпуклы. Кроме того, пусть функция $F(x, y)$ выпукла по y для всех $x \in X$ и вогнута по x для всех $y \in Y$. Тогда $F(x, y)$ имеет седловую точку *).

Определим следующие множества:

$$Y(x) = \{y \mid F(x, y) = \min_{y \in Y} F(x, y) \text{ для } x \in X\};$$

$$X(y) = \{x \mid F(x, y) = \max_{x \in X} F(x, y) \text{ для } y \in Y\}.$$

Поскольку $F(x, y)$ выпукла по y и вогнута по x, множества $Y(x)$ и $X(y)$ — выпуклые компакты. Из свойств непрерывности оптимальных решений (дополнение 9, § Д9.4) следует, что отображения $x \to Y(x)$ и $y \to X(y)$ полунепрерывны сверху. Следовательно, отображение $(x \times y) \to [Y(x) \times X(y)]$ является полунепрерывным сверху отображением $X \times Y$ в собственное компактное выпуклое подмножество. Условия теоремы Какутани о неподвижной точке (§ Д9.5) выполнены. Из теоремы следует, что существуют векторы x^* и y^*, такие, что $x^* \in X(y^*)$, а $y^* \in Y(x^*)$. То есть, x^* максимизирует $F(x, y^*)$, а y^* минимизирует $F(x^*, y)$, так что

$$F(x, y^*) \leqq F(x^*, y^*) \leqq F(x^*, y).$$

Это и доказывает теорему.

5.7. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Можно использовать теоремы предыдущего параграфа для установления условий существования оптимальных решений. Уже было показано, что в общей задаче оптими-

---

*) Приведенное здесь доказательство принадлежит Какутани. См. Какутани или изложение этих вопросов у Карлина [1], гл. 1. Существует много вариаций минимаксной задачи и различные доказательства основных теорем. Доказательство теоремы II, не использующее теорему о неподвижной точке, приведено у Карлина [1].

зации существует оптимальное решение, если функция Лагранжа имеет седловую точку. Теперь установим достаточные условия существования седловой точки.

Рассмотрим функцию Лагранжа, записанную в форме

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i [-g^i(x)],$$

с ограничениями $x \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$, $g^i(x) \leqq 0$.

Функция $L(x, \lambda)$ линейна по λ. Это значит, что она может рассматриваться и как выпуклая по λ. Функция Лагранжа $L(x, \lambda)$, как функция от x, является положительной линейной комбинацией функций $f(x)$ и $[-g^i(x)]$. Функция $L(x, \lambda)$, конечно, будет вогнутой по x, если определяющие ее функции вогнуты. Однако $-g^i(x)$ вогнута, если $g^i(x)$ выпукла. Следовательно, $L(x, \lambda)$ вогнута по x, если $f(x)$ вогнутая, а все $g^i(x)$ выпуклые функции.

Рассмотрим теперь множества, которым принадлежат x и λ. Единственное ограничение на λ — требование неотрицательности. Следовательно, вектор λ определен на выпуклом множестве (неотрицательный ортант). Если $g^i(x)$ — выпуклая функция, то множество $\{x \mid g^i(x) \leqq 0\}$ выпукло (см. дополнение 8, § Д8.6). Допустимое множество является пересечением выпуклых множеств и поэтому выпукло.

Таким образом, мы показали, что векторы x и λ определены на выпуклых множествах. Необходимо, чтобы эти множества были компактами. Вид ограничений гарантирует, что множества замкнуты. Остается показать их ограниченность. Поскольку мы разыскиваем минимум λ, а λ ограничены снизу требованием неотрицательности ($\lambda \geqq 0$), можно выбрать произвольную верхнюю грань, достаточно большую, чтобы не повлиять при этом на оптимальное решение. Труднее обстоит дело с требованиями к допустимому множеству для x. Нельзя избежать добавления специального предположения, что допустимое множество ограничено.

Таким образом, если $f(x)$ вогнутая функция, каждая $g^i(x)$ — выпуклая функция, а допустимое множество ограничено (и не пусто), то функция Лагранжа удовлетворяет условиям теоремы II предыдущего параграфа. Следовательно, функция Лагранжа обладает седловой точкой, а общая задача оптимизации имеет решение. Более того, условия глобального оптимума (см. гл. 2, § 2.7) удовлетворяются при тех же условиях выпуклости — вогнутости.

Теорема существования. *Общая задача максимизации* $\max f(x) : g^i(x) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ x \geqq 0$ *всегда имеет решение, если:*

а) $f(x)$ *вогнутая, а все* $g^i(x)$ *выпуклые функции и*

б) *допустимое множество* $K = \{x \mid g^i(x) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, n;\ x \geqq 0\}$ — *ограничено и не пусто.*

При выполнении этих условий функция Лагранжа $L(x, \lambda) = f(x) - \Sigma\lambda_i g^i(x)$ *обладает седловой точкой* (x^*, λ^*), *где* x^* — *оптимальная точка задачи максимизации, а* $\lambda^* \geqq 0$. *Кроме того, значения* x^*, λ^* *удовлетворяют условиям Куна — Таккера* (см. § 5.4), *достаточным для глобального оптимума. Если* $f(x)$ *строго вогнута, точка* x^* — *единственна.*

По тем же соображениям, которые указывались в § 2.6, теорема может быть обобщена, чтобы охватить случай, когда $f(x)$ и $g^i(x)$ — положительные монотонные преобразования вогнутой и выпуклых функций соответственно.

Заметим, что задача линейного программирования удовлетворяет этим условиям выпуклости — вогнутости. Если прямая задача имеет оптимальное решение, ее допустимое множество должно быть не пустым и может рассматриваться ограниченным. Поскольку в этом случае функция Лагранжа должна иметь седловую точку, а λ^* в функции Лагранжа совпадает с оптимальным решением y^* двойственной задачи, можно закончить доказательство теоремы существования решения задачи линейного программирования (см. гл. 3, § 3.3), утверждая, что *если прямая задача имеет решение, то и двойственная также имеет решение* *).

Обычно условия теоремы существования требуют, чтобы функции $g^i(x)$ были вогнуты, потому что ограничения имеют вид $g^i(x) \geqq 0$, а в функции Лагранжа они умножаются на λ_i и прибавляются к целевой функции $f(x)$. Эти условия эквивалентны приведенным выше.

Условия теоремы являются довольно жесткими, требуя выпуклости каждой функции ограничений и вогнутости целевой функции. Как указывалось в гл. 4 (§ 4.4), условия второго порядка оперировали вогнуто-выпуклыми функциями. Однако классические условия не гарантируют глобальный оптимум.

---

*) Доказательство теоремы существования может быть завершено без непосредственного использования теоремы о минимаксе. Можно использовать лемму Фаркаша. В доказательстве Гейла [1] (теорема 3.1) используются результаты, полученные в Д 3.6, Д 3.7.

Часто можно выбрать лучший в некотором смысле из двух методов. Если число ограничений меньше числа переменных и ограничения на неотрицательность x не эффективны в оптимуме, можно ожидать, что все функциональные ограничения будут эффективными. Таким образом, можно ввести неравенства в функциональные ограничения и использовать условия глобального оптимума для общего случая, а условия Куна — Таккера сведутся к обычным условиям первого порядка классической задачи. Таким образом, можно показать, например, что решение классической задачи на потребление $\min px$ при условии, что $u(x) = u^0$, дает глобальный оптимум, если $x \gg 0$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Более полное обсуждение условий Куна — Таккера есть у Хэдли [3], гл. 6. Современное изложение вопроса см. Карлин [1], гл. 7.

Обсуждение связей между линейным программированием и теорией игр представлено достаточно широко. См., например, Дорфман, Самуэльсон и Солоу, Гейл [1], Аллен [2], Карлин [1] *).

Упражнения

1. В упражнениях (1) и (4) гл. 4 сделайте ограничения неравенствами вида $x_1 + x_2 \leqq 1$ и введите требование на неотрицательность переменных. Затем исследуйте задачи при помощи методов настоящей главы.

При каких значениях b выполняются условия глобального оптимума?

Исследуйте связь между условиями глобального оптимума и условиями второго порядка.

2. В упражнении (5) гл. 4 исследуйте изменение решения при замене ограничения $h(x) = 0$ на $h(x) \leqq 0$ и введении дополнительного ограничения $x \geqq 0$.

3. Обсудите природу оптимального решения для разных значений a в задаче:

$$\max [10-(x_1-2)^2-(x_2-2)^2],$$

$$x_1^2+x_2^2 \leqq 1,$$

$$x_1+x_2 \leqq a, \quad x_1, x_2 \geqq 0.$$

4. Найдите максимум функции $(ax_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$ при выполнении ограничений упражнения (3) гл. 3. Как изменяется оптимальная точка при изменении a? (Предполагается, что $a \geqq 0$.)

---

*) См. также, например, Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. (*Прим. перев.*)

5. Рассмотрим задачу с двумя продуктами и двумя факторами:

$$\max (p_1x_1 + p_2x_2),$$

$x_1 = f^1(v_{11}, v_{21})$, $x_2 = f^2(v_{12}, v_{22})$,
$v_{11} + v_{12} = v_1$ (постоянная),
$v_{21} + v_{22} = v_2$ (постоянная),
в которой предполагается наличие внутреннего равновесия (f^1 и f^2 — производственные функции).

Предположим, что $f^1(v_{11}, v_{21}) = c$ (или $f^2(v_{12}, v_{22}) = c$) определяет семейство параллельных прямых. Пусть x_1, $x_2 \geqq 0$. Исследовать природу граничных оптимумов.

Установить связь между условиями оптимальности и условиями максимизации дохода в конкурентной экономике.

ЧАСТЬ II

СТАТИЧЕСКИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

6. МОДЕЛИ ТИПА «ЗАТРАТЫ — ВЫПУСК»

Эта глава предполагает знакомство со свойствами квадратных матриц (в частности, полуположительных матриц) и их характеристических корней (Д5 и Д7.1 — Д7.3). Параграф 6.7 (теорема о замещении) требует, кроме того, сведений из теории оптимизации. Читатели, которые хотят пропустить вопросы, использующие теорию оптимизации, могут прочитать главу без предварительного изучения дополнений Д5 и Д7 и затем сразу перейти к гл. 7.

6.1. МОДЕЛЬ «ЗАТРАТЫ — ВЫПУСК» *)

Рассмотрим простую линейную модель производства с фиксированными коэффициентами, содержащую несколько производственных (технологических) процессов, каждый из которых производит только один продукт. Для производства единицы некоторого, скажем, j-го продукта требуется затратить фиксированное количество a_{ij} i-го продукта. Так как модель линейна, то для производства j-го продукта в количестве x_j потребуется $a_{ij}x_j$ i-го продукта. Поскольку коэффициенты a_{ij} фиксированы, не существует взаимозаменяемости между затрачиваемыми продуктами, т. е. для производства x_j потребуется $a_{ij}x_j$ i-го продукта и $a_{kj}x_j$ k-го.

Существенно заметить, что в этой модели по крайней мере некоторые из затрачиваемых в системе продуктов являются выпусками производственных процессов этой же системы.

*) Статические модели рассматриваются у Аллена [2] и Баумоля [2]. Более подробный анализ можно найти в работе Дорфмана, Самуэльсона и Солоу. Различные модификации этих моделей приводятся у Гейла [1] и Карлина [1].

Такая модель называется моделью «*затраты — выпуск*», коэффициенты a_{ij} — *коэффициентами затрат*, матрица $[a_{ij}]$ — *матрицей затрат*.

Если множество продуктов, которые хоть раз выпускались, совпадает с множеством продуктов, которые использовались в технологических процессах, и если не существует источника затрат, кроме текущей продукции, а выпускаемая продукция используется только в качестве затрат технологических процессов, то такая модель называется *замкнутой*. В противном случае мы имеем *открытую* модель. Модель «затраты — выпуск» обычно называется *моделью Леонтьева*. Леонтьев своими работами по анализу американской экономики впервые привлек внимание к моделям такого рода *).

6.2. ЗАМКНУТЫЕ МОДЕЛИ

В модели, рассмотренной в предыдущем параграфе, множество затрат совпадает со множеством выпусков. Поэтому можно составить из коэффициентов затрат квадратную матрицу $\bar{A}$. Очевидно, что коэффициенты затрат неотрицательны. Кроме того, выпуск каждого продукта требует затрат по крайней мере одного продукта, и затрата каждого продукта обусловливает выпуск по крайней мере одного продукта. Таким образом, $\bar{A}$ — *полуположительная матрица* **). Этот факт является решающим для анализа модели.

Диагональные элементы a_{ii} матрицы $\bar{A}$ требуют особого рассмотрения. Коэффициент a_{ii} представляет собой количество i-го продукта, используемое при производстве единицы этого продукта. Например, при производстве электроэнергии необходимо использовать электроэнергию для запуска генератора, подачи топлива и т. д. Если вычесть использованную таким образом энергию из всей произведенной, получим чистый выпуск электроэнергии. Будем считать, что $a_{ii} = 0$ для всех i.

---

*) Первая статья Леонтьева появилась в 1936 г. См. Леонтьев [1].

**) В литературе на русском языке не употребляется термин «полуположительная матрица». Автор пользуется им на протяжении всей книги. Определение см. в дополнении Д7. (*Прим. перев.*)

Пусть x — вектор выпуска системы. Набор компонент вектора x характеризует объемы выпускаемых продуктов. Тогда $\sum_j a_{ij}x_j$ определяет количество i-го продукта, необходимое при производстве этого набора. Таким образом, $y = \bar{A}x$ представляет собой вектор затрат. Поскольку в замкнутой модели вектор выпуска x является единственным источником затрат, система не может функционировать и производить x, если не выполняется неравенство $y \leqq x$. Производственные процессы предполагаются необратимыми, так что x — неотрицательный вектор.

Будем называть модель *продуктивной**), если существует некоторый вектор x, такой, что

$$\bar{A}x \leqq x, \quad x \geqq 0.$$

Решение этой системы неравенств, если оно существует, называется *продуктивным решением*.

Выделим из числа продуктивных решений некоторое решение, которое будем называть равновесным. Здесь мы рассмотрим наиболее сильный тип равновесия — *внутреннее равновесие*. Определим внутреннее равновесие соотношениями

$$\bar{A}x = x, \quad x \gg 0.$$

Вектор x, удовлетворяющий этим соотношениям, называется *равновесным*.

При внутреннем равновесии каждый продукт производится, причем выпуск продукта в точности равен спросу на него.

Для существования равновесного вектора x необходимо, чтобы матрица $\bar{A}$ имела хотя бы один характеристический корень, равный единице. Это следует из определения характеристических корней матриц. Собственный вектор, соответствующий характеристическому корню, равному единице, будет равновесным, и если он строго больше нуля, то равновесие — внутреннее.

---

*) В переводной литературе (см., например, Гейл [1]) модель, удовлетворяющая приведенному ниже условию, называется полупродуктивной. Продуктивной же называют модель, если существует такой $x \geqq 0$, что $\bar{A}x \ll x$. У Гейла показано, что достаточно рассматривать продуктивную (не по Ланкастеру) модель. В этой книге будем, естественно, придерживаться терминологии Ланкастера. (*Прим. перев.*)

Пусть теперь $\bar{A}$ — полуположительная матрица. Предположим также, что она *неразложима*. Тогда для последующего анализа можно использовать результаты § Д7.3 математического дополнения. Наибольший по модулю характеристический корень λ^*, как известно (утверждение (а.1)), действительное и положительное число. Если при этом $\lambda^* = 1$, то соответствующий собственный вектор x^* строго положителен (утверждение (в. 2)), и x^* обеспечивает внутреннее равновесие. Но x^* также и единственный неотрицательный вектор, удовлетворяющий неравенству $\bar{A}x \leqq x$ (утверждение (ж)), так что он является единственным продуктивным решением. Таким образом, можно сформулировать сильный результат, если покажем, что $\lambda^* = 1$.

Если матрица $\bar{A}$ неразложима и наибольший по модулю характеристический корень равен единице, то замкнутая модель имеет единственный *) *вектор внутреннего равновесия, который является, кроме того, единственным продуктивным решением.*

Ясно, что если $\lambda^* > 1$, то модель не продуктивна. Если $\lambda^* < 1$, то модель продуктивна, но не обладает внутренним равновесием.

Возникает вопрос: существует ли продуктивное решение, которое удовлетворяло бы некоторому другому приемлемому определению равновесия?

Если $\lambda^* < 1$, то $\bar{A}x^* = \lambda^* x^* \ll x^*$, т. е. выпуск x^* строго превышает затраты. Ясно, что такую ситуацию нецелесообразно рассматривать в качестве равновесной. Неравенство $\bar{A}x \geqq \lambda^* x$ не имеет неотрицательных решений, отличных от x^*. Следовательно, не существует такого вектора выпуска x, при котором ни один из продуктов не был бы произведен в избытке (более, чем его необходимо для производства). Далее, не существует и такого вектора x, который позволил бы устранить избыток даже одного продукта, так как решение системы $\bar{A}x \leqq x$, обращающее по крайней мере одно неравенство в равенство, существует, только если $\lambda^* = 1$ (см. утверждение (ж)). Таким образом, мы должны сделать следующий вывод: если $\lambda^* < 1$, модель не имеет равновесия ни в каком приемлемом смысле.

---

*) Под единственностью здесь подразумевается единственность с точностью до скалярного множителя (т. е. единственность луча).

Если $\bar{A}$ — действительная числовая матрица, то непосредственным вычислением можно проверить, равняется ли λ^* единице. Здесь нас интересует главным образом качественный анализ экономических моделей. Тем не менее хотелось бы найти некоторые экономически осмысленные условия, являющиеся гарантией того, что $\lambda^* = 1$. Следующее условие удовлетворяет этому требованию:

Пусть существует некоторое множество полуположительных цен, дающих нулевую прибыль по крайней мере в одной отрасли, а во всех остальных одновременно ***либо*** *неположительную,* ***либо*** *неотрицательную прибыль. Тогда матрица модели имеет наибольший по модулю характеристический корень, равный единице* *).

Если p_i — *цена* i-го продукта, то $p_i a_{ij}$ — стоимость i-го продукта, затраченного на выпуск единицы j-го продукта, а $\sum\limits_i p_i a_{ij}$ — суммарные затраты на выпуск единицы j-го продукта. Другими словами, $\sum\limits_i p_i a_{ij}$ представляет собой издержки производства на выпуск единицы j-го продукта.

Прибыль от выпуска единицы продукта j-й отрасли равна $p_j - \sum\limits_i p_i a_{ij}$, так что приведенное выше условие состоит в том, что существует ненулевой вектор p ($\geqq 0$), такой, что либо $p\bar{A} \leqq p$, причем по крайней мере одно из неравенств обращается в равенство, либо $p\bar{A} \geqq p$, и по крайней мере одно из неравенств системы удовлетворяется как строгое равенство.

Рассмотрим первую из приведенных систем неравенств. Транспонируя ее, получим $\bar{A}'p' \leqq p'$. По крайней мере, одно из неравенств системы удовлетворяется как равенство. Если $\bar{A}$ — полуположительная неразложимая матрица, то и $\bar{A}'$ обладает теми же свойствами и теми же характеристическими корнями. Из математического дополнения Д7 следует, что в приведенном выше неравенстве $\lambda^* = 1$ (утверждение (ж)). Такой же вывод можно сделать при рассмотрении второй системы неравенств.

Из приведенных рассуждений вытекают два следствия:

а) *если существует неотрицательный вектор цен, дающий потери во всех отраслях, то модель не продуктивна*;

*) Это условие слабее, чем обычное требование существования строго положительного вектора цен, дающего нулевую прибыль во всех отраслях.

б) если существует неотрицательный вектор цен, дающий прибыль во всех отраслях, то модель продуктивна, но не обладает равновесным состоянием.

Поясним следствие а). Существует такой неотрицательный вектор p, что $pA \gg p$. Так как p *строго* меньше, чем pA, можной найти такое $k > 1$, что $pA \geqq kp$ и по крайней мере одно неравенство обращается в равенство.

По тем же причинам, что и прежде, можно заключить, что $\lambda^* = k > 1$ и модель не продуктивна. Аналогичным образом убеждаемся в справедливости следствия б). Сначала показывается, что $\lambda^* < 1$, и затем используются полученные ранее результаты для этого случая. Заметим, что введение цен придает особый смысл отсутствию равновесия, так как в этой ситуации все отрасли получают прибыль, несмотря на излишки всех продуктов.

6.3. ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

В этом параграфе мы будем рассматривать *открытую модель Леонтьева*. Эта модель «затраты — выпуск» определяется производственным сектором, внешним ресурсом *) и спросом, отличным от потребностей технологических процессов. Производственный сектор выпускает n продуктов, которые частично расходуются внутри сектора. Внешний ресурс обычно отождествляют с трудом.

Рассмотрим только производственный сектор, его матрица затрат порядка $n \times n$ полуположительна. Будем считать ее неразложимой. Обозначим эту матрицу через A, чтобы отличать ее от матрицы $\bar{A}$, введенной в предыдущем параграфе **).

Пренебрежем на время внешним ресурсом. Пусть x — вектор выпуска системы. Тогда

$$x - Ax = (I - A)\,x$$

— вектор *чистого выпуска*, т. е. набор объемов продуктов, остающихся для распределения вне производственного сектора.

*) Внешний ресурс в отечественной и переводной литературе обычно называют первичным продуктом или производственным фактором. (*Прим. перев.*)

**) В некоторых статьях матрицу затрат обозначают через a, матрицу $I - a$ — через A и называют ее технологической матрицей.

Основная задача анализа открытой модели состоит в следующем: может ли экономика поставить произвольный с точностью до скалярного множителя набор чистой продукции, называемый *конечным спросом* или *ассортиментным набором продуктов*.

Обозначим конечный спрос через вектор-столбец c. Тогда основная задача может быть сформулирована следующим образом. Существует ли вектор x такой, что $y = c$, т. е. такой, что

$$(I - A)\,x = c, \quad x \geqq 0$$

для любого $c \geqq 0$.

Если $I - A$ — невырожденная матрица, то x всегда можно представить в виде

$$x = (I - A)^{-1}c,$$

но это представление не гарантирует, что $x \geqq 0$. Если, тем не менее, мы смогли бы показать, что $(I - A)^{-1}$ (называемая иногда обратной леонтьевской матрицей) — положительная матрица, тогда $(I - A)^{-1}c$ — неотрицательный вектор для всех неотрицательных c, и задача была бы решена.

Рассмотрим роль внешнего ресурса в открытой модели. Обозначим объем внешнего ресурса, требуемый для выпуска единицы j-й отрасли, через a_{0j}, а вектор с компонентами a_{0j} — через a_0. Модель, учитывающая внешний ресурс, должна удовлетворять следующему добавочному условию:

$$a_0 x \leqq l_0,$$

где l_0 — величина, ограничивающая допустимое потребление внешнего ресурса. Очевидно, что для любого x можно найти скалярный множитель k, такой, что kx будет удовлетворять этому условию.

Исследовать открытую модель Леонтьева — значит выяснить, может ли конечный спрос быть удовлетворен *в любых пропорциях*. Если это выполнимо, то масштаб всегда может быть выбран так, чтобы дополнительное условие, подобное приведенному выше, удовлетворялось. В процессе дальнейшего обсуждения будем полагать, что соотношение компонент вектора c может быть произвольным, но масштаб выбран так, что дополнительное условие выполняется.

Прежде чем перейти к основной задаче, следует выяснить условия, обеспечивающие положительность матрицы

$(I - A)^{-1}$. Эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы конечный спрос удовлетворялся в любых пропорциях.

В § Д7.3 (утверждение (г2)) показано, что достаточным условием является то, что наибольший по модулю характеристический корень λ^* матрицы A меньше единицы. Непосредственным вычислением можно установить, справедливо ли это для заданной матрицы затрат. Мы, однако, сформулируем два экономически осмысленных условия, каждое из которых обеспечивает требуемый результат:

а) *пусть некоторый ненулевой конечный спрос может быть удовлетворен по всем продуктам. Тогда конечный спрос может быть удовлетворен в любых пропорциях;*

б) *пусть существует некоторое множество положительных цен, при которых каждая отрасль может покрыть издержки производства и по крайней мере для одной отрасли получить положительную прибыль. Тогда конечный спрос может быть удовлетворен в любых пропорциях.*

Если условие а) выполняется, то $(I - A)\, x \geqq 0$ со строгим неравенством для некоторого i и $x \gg 0$, т. е. $Ax \leqslant x$ со строгим неравенством по крайней мере для одного i и $x \gg 0$. Запишем выпуски в виде диагональной матрицы X. Тогда вектор выпуска $x = X\,[1]$, где $[1]$ — вектор-столбец с единичными компонентами.

Можно переписать приведенную выше систему неравенств в виде $AX\,[1] \leqq X\,[1]$ со знаком $<$ для некоторого i. Умножая обе части неравенства слева на X^{-1} (так как $x \gg 0$, X — невырожденная матрица), получаем $X^{-1}AX\,[1] \leqq [1]$ со знаком $<$ для некоторого i. Но $X^{-1}AX\,[1]$ — вектор, составленный из сумм по элементам строки матрицы $X^{-1}AX$, которая имеет те же самые характеристические корни, что и A. Каждая из этих сумм не превышает единицы, и по крайней мере одна из них строго меньше единицы. Если s и S — наименьшая и наибольшая из сумм, то $s < 1$ и $S \leqq 1$. Тогда $\lambda^* < 1$ (это следует из утверждения (е), § Д7.3), что и следовало доказать.

Если же выполняется условие б), то $pA \leqq p$ со знаком $<$ для некоторого j; $p \gg 0$, и доказательство проводится аналогичным образом.

Рассмотренные допущения являются, по-видимому, более слабыми и менее ограничительными, чем употребляемые обычно, и гарантируют решение задачи для открытой модели.

6.4. ПРЯМЫЕ И КОСВЕННЫЕ ЗАТРАТЫ

Коэффициент a_{ij} представляет собой количество i-го продукта, требуемого для выпуска единицы j-го в том случае, когда в системе производится только j-й продукт, а все затрачиваемые для его производства продукты доставляются извне. Естественно считать, что a_{ij} представляет *прямую потребность* в i-м продукте для j-й отрасли.

Если же j-я отрасль рассматривается как часть сложной системы, тогда единица выпуска j-й отрасли требует использования кроме i-го продукта и других продуктов, выпускаемых системой. Чтобы произвести эти продукты, соответствующие отрасли требуют, в свою очередь, использования i-го продукта. Более того, эти отрасли, вообще говоря, используют j-й продукт, так что j-я отрасль должна обеспечить работу отраслей, которые в свою очередь снабжают j-ю отрасль. Потребность в i-м продукте, которая возникает таким образом, составляет *косвенную* (или *дополнительную*) *потребность* в i-м продукте для j-й отрасли.

Суммарная потребность в i-м продукте для выпуска единицы j-го слагается из прямой и косвенной потребностей.

Суммарную потребность j-й отрасли во всех продуктах можно вычислить следующим образом. Предположим, что модель неразложима и продуктивна, и любой ассортиментный набор может быть произведен. Для ассортиментного набора c имеем $x = (I - A)^{-1}c$.

В последующем анализе обратная матрица $(I - A)^{-1}$ будет встречаться много раз. Поэтому целесообразно ввести обозначение $A^* = (I - A)^{-1}$. Тогда $x = A^*c$.

Рассмотрим ассортиментный набор продуктов c', в котором $c'_j = 1$, $c'_i = 0$, $i \neq j$.

Решение $x' = A^*c'$ системы определяет уровни, на которых должны работать все отрасли, чтобы произвести набор c'. В рассматриваемом случае чистый выпуск всего производственного сектора — единица j-го продукта. Выпуск любого другого i-го продукта обеспечивает только нужды j-й отрасли. Таким образом, x'_i определяет суммарную потребность в i-м продукте для выпуска единицы j-го продукта.

В произведении A^*c' все компоненты c', отличные от c'_j, равны нулю, так что существенен только j-й столбец матрицы A^*. Обозначим этот столбец через A^*_j. Тогда $x' = A^*_j$ (так как $c'_j = 1$).

Таким образом, различные потребности в затратах могут вычисляться, исходя из матриц A и A^*:

a_{ij} — *прямая потребность в i-м продукте для j-й отрасли;*

a^*_{ij} — *суммарная потребность в i-м продукте для j-й отрасли;*

$a^*_{ij} - a_{ij}$ — *косвенная потребность в i-м продукте для j-й отрасли.*

Теперь можно сформулировать и затем доказать важную теорему.

В неразложимой продуктивной системе для каждой отрасли суммарная потребность в каждом затрачиваемом продукте превосходит прямую потребность.

Для доказательства теоремы заметим, что если A неразложима и продуктивна ($\lambda^* < 1$), то $A^* = (I - A)^{-1}$ строго положительна (утверждение (г2), § Д7.3). Представим матрицу A^* в виде ряда (это возможно, так как все характеристические корни матрицы A по модулю меньше единицы):

$$A^* = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

Рассмотрим этот ряд. Если A — полуположительная и неразложимая матрица, то и A^2 обладает этими свойствами. Поэтому для любых i, j и для некоторого натурального r в матрице A^{2r} существует положительный элемент в позиции (i, j) (утверждение (и), § Д7.3). Следовательно, строго положительный характер A^* не зависит от A. Поэтому матрица

$$A^* - A = I + A^2 + A^3 + \dots \gg 0$$

также строго положительна.

Таким образом, $a^*_{ij} > a_{ij}$ для всех i, j, и теорема доказана. Заметим, что этот результат полностью основывается на неразложимости A. Наиболее интересным здесь является то, что $a^*_{jj} > 0$, несмотря на то, что мы принимаем $a_{jj} = 0$. Это происходит потому, что выпускаемый в j-й отрасли продукт требуется затратить в отраслях, обеспечивающих производство j-го продукта исходными материалами.

Простой численный пример. Различные соображения, которые могут возникнуть относительно открытой модели Леонтьева, можно проиллюстрировать на простом численном примере.

Пусть матрица затрат A равна

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристические корни матрицы A равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, так что $\lambda^* = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Соответствующий собственный вектор x^* пропорционален вектору $(1, 2^2/_3)$. Другой собственный вектор $(1, -2^2/_3)$.

Технологическая матрица $I - A$ записывается в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу

$$A^* = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Матрица A^* строго положительна, и $A^* \gg A$, так что суммарная потребность в затратах для всех отраслей больше прямой потребности.

Будем в дальнейшем использовать этот пример, чтобы иллюстрировать другие особенности модели «затраты — выпуск».

6.5. КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ ТРУДА В МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Важное следствие из приведенного анализа возникает при применении понятия прямой и косвенной потребности к внешнему ресурсу, который обычно отождествляется с трудом.

Пусть a_0 — вектор коэффициентов затрат труда (не являющийся частью основной матрицы затрат A). Тогда a_{0j}, очевидно, *коэффициент прямых затрат труда* в j-й отрасли. *Коэффициент суммарных затрат труда* вычисляется так же, как и в предыдущем параграфе. Весь чистый выпуск системы предполагается равным единице j-го продукта. Если x' — вектор валового выпуска, соответствующий этому режиму системы, то, как и прежде, $x' = A_j^*$, и суммарная потребность в труде, которую обозначим через a_{0j}^*, задается соотношением $a_{0j}^* = a_0 x' = a_0 A_j^*$, или, что то же самое,

$$a_0 A_j^* = \sum_i a_{0i} a_{ij}^*.$$

Связь последней суммы с a_{0j} не очевидна. Рассмотрим еще раз разложение A^* в ряд

$$A^* = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$$

Диагональный элемент матрицы A^* равен 1 плюс сумма соответствующих диагональных элементов матриц A^r, $r = 1, 2, \ldots$ Диагональные элементы A^r, конечно, неотрицательны, а для некоторого r положительны (утверждение (и), § Д7.3). Поэтому диагональные элементы матрицы A^* больше единицы.

В разложении $a_0 A_j^*$ один из членов равен $a_{0j} a_{jj}^*$, а остаток, конечно, неотрицательный. Кроме того, $a_{jj}^* > 1$. Поэтому при условии, что a_0 содержит по крайней мере один ненулевой элемент, имеем $\sum\limits_i a_{0i} a_{ij}^* > a_{0j}$.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

В неразложимой системе суммарная потребность в труде во всех отраслях больше, чем прямая потребность. Это относится и к отрасли, которая является единственным непосредственным потребителем труда. Если по крайней мере одна отрасль использует труд непосредственно, то для отраслей, не использующих труд непосредственно, он требуется косвенно.

Важным свойством коэффициентов a_{0j}^* является их аддитивность. Фактическая потребность в труде для произвольного ассортиментного набора продуктов может быть вычислена умножением коэффициента суммарных затрат на объем каждого продукта в ассортиментном наборе и последующим суммированием по продуктам.

Пусть c — произвольный ассортиментный набор. Тогда суммарная трудоемкость производства этого набора равна

$$a_0 A^* c = \sum_j a_0 A_j^* c_j = \sum_j a_{0j}^* c_j,$$

что и доказывает сформулированное свойство коэффициентов a_{0j}^*.

Можно сравнить трудоемкость производства двух ассортиментных наборов, вычисляя суммарную потребность в труде каждого из них. Если оба набора «эквивалентны» в некотором смысле, то будем считать тот, который требует большего количества труда, более *интенсивным по труду*.

Обычно в экономике два набора считают эквивалентными, если они имеют одну и ту же стоимость (ценность).

Зададим цены продуктов и два произвольных ассортиментных набора. Всегда можно найти такой скаляр, на который следует умножить объемы продуктов, чтобы стоимости обоих наборов в принятых ценах совпали. Если на тот же скаляр умножить суммарную потребность в труде, можно определить относительную интенсивность труда данного набора по сравнению с модифицированным набором.

Интересные расчеты такого рода были проведены Леонтьевым для модели с двумя наборами продуктов. Один набор представлял товары в пропорциях импорта США, другой — в пропорциях экспорта. В расчетах были использованы данные модели «затраты — выпуск» по штатам. Леонтьев получил неожиданные выводы: экспортируемый набор продуктов имеет бóльшую интенсивность труда, чем импортируемый. Эти результаты известны как парадокс Леонтьева.

Относительный коэффициент интенсивности устанавливается точно только при использовании коэффициентов суммарных потребностей. Прямые потребности (обычные коэффициенты затрат) могут дать совершенно другие результаты. Рассмотрим два продукта: j-й и k-й. Может случиться, что для некоторого скаляра μ $a_{0j} > \mu a_{0k}$, но $a^*_{0j} < \mu a^*_{0k}$. Поэтому, если бы отношение цен этих двух продуктов равнялось μ, получилось бы, что продукт с большей интенсивностью по труду, вычисленной по суммарной потребности в труде, имеет меньшую интенсивность в смысле прямой потребности.

6.6. ТРУДОВАЯ ТЕОРИЯ СТОИМОСТИ

В открытой модели необходимо различать два вида ресурсов. Первый вид ресурсов выпускается производственным сектором. Это так называемые *промежуточные продукты*. Кроме того, существуют ресурсы, которые не производятся внутри системы. Эти ресурсы называются *первичными продуктами* (*факторами*).

Типичная открытая модель Леонтьева содержит только один первичный продукт, отождествляемый с трудом. Как и в других экономических моделях (Рикардо, Маркс), в которых труд является единственным первичным фактором, можно ожидать, что модель Леонтьева содержит в неявном виде трудовую теорию стоимости *). Это действительно так. Однако содержащаяся здесь теория более сложна, чем в простейших моделях. Это, вероятно, лучше всего выражается в следующем положении:

Модель Леонтьева содержит в неявном виде трудовую теорию стоимости в том смысле, что множество цен, пропорциональных коэффициентам суммарной потребности в труде, является множеством цен равновесия для всех векторов конечного спроса.

Под множеством равновесных цен здесь подразумевается такой набор цен, при котором прибыль во всех отраслях равна нулю в том случае, когда уровень заработной платы позволяет приобрести всю чистую продукцию экономики.

Пусть p — вектор цен, пропорциональный вектору суммарных потребностей в труде, т. е. $p = ka_0^*$. Рассмотрим произвольный вектор конечного спроса c. Стоимость этого набора равна pc. Пусть L — суммарное количество труда, используемое для того, чтобы произвести этот набор продуктов. Тогда $L = a_0^*c$. Но если заработная плата позволяет приобрести этот набор продуктов, то

$$wL = wa_0^*c = pc = ka_0^*c,$$

так что $w = k$.

Прибыль j-й отрасли при выпуске единицы продукта π_j равна

$$\pi_j = p_j - \sum_i p_i a_{ij} - wa_{0j}.$$

Вектор прибыли всех отраслей π равен

$$\pi = p(I - A) - ka_0 \text{ (здесь } w = k).$$

Но $p = ka_0^* = ka_0A^* = ka_0(I - A)^{-1}$, так что

$$\pi = ka_0(I - A)^{-1}(I - A) - ka_0 = 0.$$

*) Оставим этот вывод на совести автора. Как известно, трудовая теория стоимости неизмеримо более сложна и содержательна и приводит к ряду качественных выводов, не вытекающих из рассматриваемых здесь моделей. (*Прим. перев.*)

Таким образом, $\pi_j = 0$ для всех j. Этот вывод совершенно не зависит от конечного спроса c. Утверждение, таким образом, доказано.

Из сказанного следует, что все наборы продуктов с единичной стоимостью требуют одинаковой интенсивности труда. Кроме того, поскольку прямые затраты труда изменяются от отрасли к отрасли, полученные результаты придают большое значение тому факту, что коэффициенты прямых затрат труда не представляют должным образом относительные интенсивности труда.

Численный пример. Вернемся к численному примеру, рассмотренному выше.

Пусть вектор прямых затрат труда равен $a_0 = (1,\ 2)$. Непосредственное вычисление дает

$$a_0 A^* = [1\ \ 2]\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = [5\quad 12]$$

При векторе цен (5,12) чистая стоимость выпуска произвольного ассортиментного набора продуктов $(c_1,\ c_2)$ равна $5c_1 + 12c_2$. Эта величина при $w = 1$ как раз совпадает с суммой, которой оплачен труд, необходимый для выпуска этого набора. Легко вычислить, что в первой отрасли издержки при выпуске единицы продукта равны $5\left(= 12a_{21} + a_{01} = 12 \times \frac{1}{3} + 1\right)$, во второй отрасли они равны 12. Следовательно, прибыль в каждой отрасли равна нулю.

6.7. ТЕОРЕМА О ЗАМЕЩЕНИИ

Этот параграф требует знакомства с теорией линейного программирования.

В модели Леонтьева каждый продукт производится при помощи единственного производственного процесса, или технологического способа (процесса). Существует только один способ производства j-го продукта, и он представляется множеством коэффициентов, составляющих j-й столбец матрицы затрат.

Из анализа открытой модели видно, что, если система продуктивна (т. е. она может произвести по крайней мере один ассортиментный набор продуктов), то она может произвести любой ассортиментный набор, используя то же самое множество производственных процессов. Пусть все или некоторые продукты можно произвести при помощи различных технологических способов. Возникает вопрос, возможно ли, чтобы процессы, «наилучшие» в некотором смысле для производства одного ассортиментного набора продуктов, были «наилучшими» для другого.

С первого взгляда может показаться вполне правдоподобным, что технологические процессы, выбранные для одного ассортиментного набора, могут оказаться неподходящими для других наборов. Действительно, в некоторых моделях это так. Для леонтьевской модели *с одним ограниченным ресурсом* Самуэльсон *) показал, что независимо от того, как меняется конечный спрос, целесообразно использовать для производства каждого продукта только один технологический процесс.

Этот результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема о замещении. *В открытой модели Леонтьева с единственным ограниченным внешним ресурсом (первичным продуктом) множество технологических процессов, оптимальное при производстве одного из ассортиментных наборов продуктов, является оптимальным при производстве любого другого. Процесс считается оптимальным, если он требует минимальных затрат ограниченного внешнего ресурса.*

Приведенное ниже доказательство теоремы использует идеи линейного программирования и отличается от доказательства Самуэльсона **).

Технология системы задается различными технологическими процессами, каждый из которых производит *единственный продукт*. Каждый технологический процесс определяется n коэффициентами затрат и продуктом, который производится им.

Каждый продукт может выпускаться несколькими технологическими процессами.

В дальнейшем мы не будем предполагать взаимно однозначного соответствия между технологическими процессами и продуктами. В связи с этим целесообразно модифицировать модель.

Раньше технологический процесс определялся только столбцом коэффициентов затрат. Теперь будем характеризо-

*) См. Самуэльсон [5], а также Эрроу.

**) Самуэльсон ссылается на гл. 9 книги Гейла [1], в которой используются идеи Данцига.

вать технологический процесс столбцом, элементы которого, отвечающие затрачиваемым продуктам, равны коэффициентам затрат со знаком минус, а элементы, соответствующие выпускаемым продуктам, равны единице.

Обозначим матрицу, составленную из этих столбцов, через $\hat{A}$. Строки матрицы $\hat{A}$ соответствуют продуктам, столбцы — технологическим процессам. Элемент $\hat{a}_{ij}$ равен единице, если i-й продукт является выпуском j-го технологического процесса, или коэффициенту затрат со знаком минус, если i-й продукт затрачивается в j-м процессе. Каждая строка и каждый столбец будут содержать по крайней мере одну единицу (каждый продукт выпускается по крайней мере одним процессом, и каждый процесс что-нибудь производит).

Если бы мы построили таким образом обычную модель «затраты — выпуск», то полученная матрица $\hat{A}$ была бы технологической матрицей $I - A$. В данном случае матрица $\hat{A}$ прямоугольная, порядка $n \times m$, с числом технологических процессов m, большим числа продуктов n.

Пусть уровни (интенсивности) технологических процессов задаются вектором y (размерности m). Тогда $\sum\limits_j \hat{a}_{ij} y_j$ определяет чистый выпуск i-го продукта, причем для каждого i по крайней мере одно из $\hat{a}_{ij}$ равно единице и по крайней мере одно отрицательное. Вектор $\hat{A}y$ определяет чистый выпуск системы.

Заданный ассортиментный набор продуктов c может быть произведен при уровнях технологических процессов, задаваемых вектором y, который определяется соотношениями

$$\hat{A}y = c; \quad y \geqq 0.$$

Это система из n уравнений с m неотрицательными компонентами. Здесь $m > n$, поэтому система имеет, вообще говоря, множество решений. Среди них выберем в соответствии с критерием оптимальности то, которое минимизирует использование ограниченного первичного продукта.

Пусть $\hat{a}_{0j}$ — коэффициент прямых затрат труда для j-го процесса и $\hat{a}_0$ — m-мерный вектор коэффициентов прямых затрат труда. Определение уровней технологических процессов, обеспечивающих производство заданного ассортиментного набора продуктов c при минимальных затратах труда, эквивалентно решению следующей задачи линейного программирования:

$$\min \hat{a}_0 y,$$

$$\hat{A}y = c, \quad y \geqq 0.$$

Из теории линейного программирования известно, что оптимальное решение (которое для простоты анализа будем полагать единственным, хотя это не существенно для обсуждения) будет *базисным*, т. е. будет содержать не более чем n ненулевых компонент вектора y.

Если матрица $\hat{A}$ неразложима, то при любом заданном ассортиментном наборе все продукты должны производиться в некоторых объемах. Поскольку каждый технологический процесс производит только один продукт, оптимальное решение будет содержать точно n процессов, действующих на ненулевых уровнях.

Столбцы $\hat{A}$, соответствующие ненулевому уровню, представляют собой систему из n независимых векторов. Они образуют подматрицу $n \times n$ технологической матрицы $\hat{A}$. Эта подматрица (будем обозначать ее $\hat{A}_B$) определяет базис матрицы $\hat{A}$.

Базис $\hat{A}_B$, конечно, обычная технологическая матрица модели «затраты — выпуск». Таким образом, если мы хотим рассматривать экономику, производящую ассортиментный набор продуктов c, достаточно рассмотреть обычную систему «затраты — выпуск».

Заменим теперь ассортиментный набор c на c'. Изменится ли при этом оптимальный базис?

Основная теорема линейного программирования (§ 3.6) гарантирует, что базис, являющийся оптимальным для задачи с ограничениями $\hat{A}y = c$, $y \geqq 0$, останется оптимальным и для задачи с ограничениями $\hat{A}y = c'$, $y \geqq 0$, в том случае, *если он еще остается допустимым*.

Из теории моделей «затраты — выпуск» известно, что если мы можем произвести ассортиментный набор c при базисе $\hat{A}_B$, то можно произвести и любой другой набор, включая c', при том же самом базисе. Произвести ассортиментный набор (в смысле модели «затраты — выпуск») — значит найти неотрицательные y, удовлетворяющие заданной системе уравнений. Поэтому базис $\hat{A}_B$ останется допустимым в смысле теории линейного программирования. Следовательно, базис $\hat{A}_B$, допустимый для c, допустим и поэтому оптимален и для c'.

Таким образом, теорема доказана.

Мы пришли к выводу, что конечный спрос не влияет на выбор оптимального множества технологических процессов. Доказанная теорема оправдывает предположение Леонтьева о единственном технологическом процессе, выпускающем каждый продукт.

Утверждение теоремы о замещении существенно зависит от включения в модель только одного *ограниченного* первичного продукта. Интересно было бы рассмотреть аналогичную задачу применительно к экономике с ограниченным капиталом и неограниченными трудовыми ресурсами (как в моделях Льюиса и других моделях слабо развитой экономики). В этом случае целесообразно минимизировать использование капитала. Если и труд, и капитал ограничены, то можно ожидать, что оптимальные системы производственных процессов меняются с изменением ассортиментных наборов.

Приведем одно *следствие* из теоремы о замещении.

Рассмотрим все системы «затраты — выпуск», которые могут быть получены из заданного множества технологических процессов. Каждая система «затраты — выпуск» содержит только один технологический процесс, производящий каждый из n продуктов. Если имеется k_i способов произвести i-й продукт, тогда существует $\prod_i k_i$ таких систем «затраты — выпуск». По теореме о замещении только одна из этих систем является оптимальной.

Каждой системе «затраты — выпуск» поставлен в соответствие вектор коэффициентов суммарных затрат труда. Утверждается, что каждый коэффициент суммарных затрат труда оптимальной системы не превосходит соответствующего коэффициента суммарных затрат труда любой другой системы.

Пусть a_0^* и a_0' — векторы суммарных затрат труда оптимальной и некоторой другой системы соответственно. Затраты труда, необходимые для производства произвольного ассортиментного набора продуктов c, равны a_0^*c в оптимальной системе и $a_0'c$ в другой. Так как a_0^* соответствует оптимальной системе, то $a_0^*c \leqq a_0'c$ — для всех $c \geqq 0$. Поэтому

$$a_0^* \leqq a_0'.$$

Следствие доказано.

6.8. МАТРИЧНЫЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ *)

В этом параграфе будут рассмотрены многосекторные модели типа «доход — потребление» с постоянной склонностью к расходам. Свойства этих моделей с аналитической точки зрения аналогичны свойствам моделей «затраты — выпуск».

В типичной модели такого типа при производстве j-м сектором y_j затрачивается $a_{ij}y_j$ i-го продукта. Поэтому i-я отрасль получает соответствующую часть дохода j-го сектора. Будем здесь вести рассмотрение в стоимостных терминах.

Коэффициент a_{ij} определяет склонность j-го сектора тратить свой доход на i-й. Матрица A, составленная из коэффициентов a_{ij}, называется *матрицей склонностей к затратам*.

Доход каждого данного сектора складывается из индуцированного и автономного дохода. Индуцированный доход определяется затратами других секторов в данном секторе. Все остальные источники дохода отрасли составляют ее автономный доход.

Начнем рассмотрение с некоторой начальной ситуации и исследуем, что будет, если в доходах секторов, определяемых вектором выпуска $y(0)$, будет возрастать только автономный доход. Выпуск $y(0)$ порождает первый цикл затрат $y(1)$. Следовательно, доход от $y(1)$ задается соотношением

$$y(1) = Ay(0).$$

Выпуск $y(1)$ в свою очередь индуцирует доход

$$y(2) = Ay(1) = A^2y(0)$$

и так далее.

Если начальное возрастание автономного дохода поддерживается, то в конце концов доходы секторов будут определяться вектором $y(\infty)$, задаваемым формулой

$$y(\infty) = y(0) + y(1) + y(2) + \ldots =$$
$$= (I + A + A^2 + \ldots)\, y(0).$$

*) См. Чипман [1], Метцлер, Гудвин.

Матричный ряд $I + A + A^2 + \ldots$ сходится к $(I - A)^{-1}$, если все характеристические корни по модулю меньше единицы. Поскольку A — полуположительная матрица (неразложимость предполагается), то достаточно показать, что наибольший по модулю характеристический корень λ^* меньше единицы. Из утверждения (е), § Д7.3 следует, что наибольший по модулю характеристический корень меньше единицы для неразложимой матрицы в том случае, если каждая из сумм коэффициентов по столбцам матрицы не превосходит единицы, и по крайней мере одна из них строго меньше единицы. Таким образом, матричный ряд сходится, если ни один сектор не требует больше, чем получает за произведенный продукт ($\sum_i a_{ij} \leqq 1$, для всех j), и, более того, существует некоторая «утечка дохода», т. е. затраты по крайней мере одного сектора меньше его дохода ($\sum_i a_{ij} < 1$ по крайней мере для одного j).

Если указанный выше ряд сходится, то

$$y(\infty) = (I - A)^{-1} y(0).$$

Здесь *матричный мультипликатор* $(I - A)^{-1}$ аналогичен обычному скалярному мультипликатору.

Теперь можно проанализировать образование прямого и косвенного дохода таким же образом, как в модели «затраты — выпуск» анализировались прямая и косвенная потребности. Если обозначить матрицу $(I - A)^{-1}$, как и прежде, через A^*, тогда a^*_{ij} дает результирующее возрастание дохода i-го сектора при единичном увеличении автономного дохода j-го сектора.

Модели такого типа могут быть важны при выборе управления затратами, так как коэффициенты a^*_{ij} — результирующие затраты в j-м секторе — могут существенно отличаться от a_{ij} — мгновенных затрат.

В некоторых контекстах секторы — это страны, коэффициенты a_{ij} — склонности к импорту из i-й страны в j-ю. Общий же анализ проводится по той же схеме.

Анализ модели несущественно изменится, если матрица склонностей A разложима. В этом случае для сходимости к матричному мультипликатору должна быть «утечка» в *каждой* подсистеме, которая ничего не тратит на другие подсистемы.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Читатели, интересующиеся приложениями методов анализа моделей типа «затраты — выпуск», могут познакомиться со статьями Леонтьева [3]. Читателям, заинтересованным в теоретических аспектах вопроса, целесообразно изучить гл. 9 и 10 книги Дорфмана, Самуэльсона и Солоу и гл. 8 и 9 работы Гейла [1].

Гейл подошел к этой проблеме с несколько другой точки зрения. Обсуждение некоторых сторон модели Леонтьева дано также в гл. 8 у Карлина [1]. Наиболее современный анализ моделей «затраты — выпуск», отличающийся от других работ, приводится в первой главе книги Моришимы [1].

Упражнения 1. Рассмотрим экономику с матрицей затрат

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и вектором прямых потребностей в труде [2, 1]. Вычислить:

а) косвенную потребность во всех продуктах, включая труд, для чистого выпуска единицы каждого продукта;

б) нормализованный равновесный вектор цен;

в) заработную плату, соответствующую ценам п. б;

г) суммарный выпуск каждой отрасли и суммарную потребность в труде для производства ассортиментного набора продуктов

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

д) соответствующие величины для производства c', полученного перестановкой составляющих c:

$$c' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Пусть экономика может производить три продукта. Первые два могут производиться только одним способом с векторами затрат

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

соответственно. Для третьего существуют два возможных технологических процесса с векторами затрат

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Потребность в труде равна 1 и 2 для первого и второго продуктов и 1 для обоих процессов, производящих третий продукт.

Используя теорию линейного программирования или следствие из § 6.7, найти оптимальный технологический процесс для третьей отрасли. Проверьте результат, убедившись, что суммарная потребность в труде для произвольного вектора конечного спроса будет наименьшей при оптимальной системе.

7. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

Для понимания этой главы большое значение имеет теория линейного программирования (см. гл. 3).

Кроме математической подготовки, требуемой для свободного обращения с методами линейного программирования, предполагается знакомство с конусами (математическое дополнение § Д4.5—Д4.7).

7.1. АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ *)

Модели «затраты — выпуск», которые обсуждались в предыдущей главе, характеризуются существованием только одного способа или процесса для производства каждого продукта. Кроме того, при анализе этих моделей предполагается, что каждый производственный процесс выпускает только один продукт.

Отбросим теперь оба эти ограничения и рассмотрим более общую модель, в которой каждый продукт может выпускаться многими производственными процессами, и один и тот же производственный процесс может обеспечить выпуск нескольких продуктов. Возможность выбора производственного процесса для выпуска данной продукции допускает замещение (взаимозаменяемость) в процессе производства, а возможность разных выпусков для отдельных производственных процессов заставляет учитывать совместное производство. В дальнейшем будет показано, что полученная при этом модель имеет самый общий вид.

---

*) Классические положения анализа производственных процессов содержатся в работе Купманса [3]. Превосходное рассмотрение этого предмета на более элементарном уровне приведено в его первой статье (Купманс [2]).

Анализ производственных процессов развивался бок о бок с линейным программированием, однако более или менее независимо от него. Первоначальные доказательства фундаментальных теорем были даны в терминах свойств конечных (многогранных) конусов. В этой главе приводятся доказательства, использующие теорию линейного программирования. На анализе производственных процессов основано содержание следующих четырех глав.

Отдельный производственный процесс может выпускать несколько продуктов. Однако замещение выпускаемых продуктов возможно лишь в том случае, если существуют и другие процессы с теми же самыми выпусками.

Неоклассическая теория производства почти всегда имела дело с замещением (взаимозаменяемостью) первичных продуктов и очень мало — с взаимодополняемостью, которая также является характеристикой сырья и промежуточных продуктов.

Модель «затраты — выпуск» главным образом имеет дело с дополнительными затратами, особенно для промежуточных продуктов. Общая линейная модель перебрасывает мост между неоклассическим анализом строгой заменимости и строгой дополнительностью моделей «затраты — выпуск».

Существенной особенностью общей линейной модели является существование *конечного* (тем не менее большого) числа базисных продуктивных технологических процессов, каждый из которых характеризуется фиксированными коэффициентами, определяющими затраты и выпуски продуктов при единичной интенсивности (уровне) процесса.

Производственные процессы обладают, кроме того, следующими свойствами:

1. Производственные процессы линейны.

Это значит, что если заданный производственный процесс, действующий на единичном уровне (с единичной интенсивностью), выпускает b_i единиц i-го продукта и затрачивает a_r единиц r-го, тогда этот производственный процесс может действовать на любом уровне μ ($\mu \geqq 0$) и будет при этом производить μb_i единиц i-го продукта, используя μa_r единиц r-го.

2. Можно рассматривать производственный процесс, представляющий собой линейную комбинацию данных производственных процессов. Пусть процессы j и k на единичном уровне производят b_{ij} и b_{ik} единиц i-го продукта, используя при этом a_{rj} и a_{rk} единиц r-го соответственно. Совместное действие этих процессов на уровнях μ_j и μ_k будет характеризоваться суммами $\mu_j b_{ij} + \mu_k b_{ik}$ и $\mu_j a_{rj} + \mu_k a_{rk}$.

Если i-й продукт выпускался j-м и потреблялся k-м производственным процессом, то величина $\mu_j b_{ij} - \mu_k a_{ik}$ определит чистый выпуск, если она положительна, и чистые затраты, если она отрицательна.

Из первого свойства производственных процессов следует, что доходы пропорциональны интенсивностям процессов. Второе свойство основано на автономности производственных процессов. Действие одного процесса не зависит от действия других процессов.

В моделях «затраты — выпуск» существует взаимнооднозначное соответствие между производственными процессами и выпускаемыми продуктами. Это соответствие определяет производственный процесс (j-й процесс производит j-й продукт) и единичный уровень процесса (процесс, действующий на единичном уровне, производит единицу j-го продукта). Такое отождествление нельзя провести в общей линейной модели, где нет взаимно однозначного соответствия между производственными процессами и выпускаемыми продуктами. Здесь производственные процессы определяются фиксированными коэффициентами затрат и выпуска.

Пусть в системе обращаются n продуктов. Каждому производственному процессу можно поставить в соответствие два неотрицательных n-мерных вектора: вектор выпуска b^j и вектор затрат a^j. Компонента b_{ij} вектора b^j положительна, если i-й продукт выпускается, и равна нулю в противном случае. Компонента a_{ij} вектора a^j положительна, если i-й продукт затрачивается, и равна нулю в противном случае. Продукт, который затрачивается и выпускается в одном и том же процессе, выступает либо как чистый выпуск, либо как чистые затраты.

Пусть экономическая система содержит m технологических процессов. Соберем все векторы b^j в *матрицу выпуска* B порядка $n \times m$, а векторы a^j — в *матрицу затрат* A того же порядка. В модели «затраты — выпуск» матрица затрат имеет тот же вид, что и здесь, только она квадратная, а матрицей выпуска является единичная матрица I.

Матрица $(B - A)$ — *технологическая матрица* (аналогично технологической матрице $(I - A)$ модели «затраты — выпуск»). Эта матрица содержит на (i, j)-м месте b_{ij}, если i-й продукт выпускается j-м производственным процессом, $-a_{ij}$, если i-й продукт затрачивается в j-м процессе, и 0, если i-й продукт не затрачивается и не выпускается j-м процессом.

Пусть различные технологические процессы используются на уровнях, заданных m-мерным вектором y (вектор интенсивностей). Тогда чистый выпуск системы задается вектором x, где

$$x = (B - A)\,y.$$

Вектор y обязательно неотрицателен, а к вектору x это требование не предъявляется. Фиксированная компонента вектора x может иметь любой знак, причем в системе, действующей на уровне y:

а) i-й продукт является *конечным*, если $x_i > 0$;

б) i-й продукт является *промежуточным*, если $x_i = 0$;

в) i-й продукт является *первичным* продуктом системы, если $x_i < 0$.

Можно классифицировать продукты по их отношению к вектору уровней производственных процессов y. В некоторых моделях анализа производственных процессов продукты классифицируются только как конечные, промежуточные или первичные. Такая классификация не вызывается существом дела. Один и тот же продукт в экономических системах с одинаковой технологией может при разных условиях быть отнесен к первичным, промежуточным или конечным продуктам.

Анализ производственных процессов сводится к изучению свойств множества векторов выпуска x и множества векторов уровней производственных процессов y при заданных предположениях о технологических матрицах и других ограничениях, которые могут встретиться в типичной экономической системе.

7.2. МНОЖЕСТВО ВЫПУСКА

Множество выпуска есть совокупность всех векторов чистого выпуска x, которые могут быть произведены при данной технологии без наложения каких-либо ограничений на ресурсы. Иногда таким образом определенное множество называется *множеством производственных возможностей*, *достижимым множеством*, или *отображенным множеством*.

Поскольку производственные процессы могут использоваться на любых неотрицательных уровнях y, множество выпуска X формально определяется как

$$X = \{x \mid x = (B - A)\, y; \quad y \geqq 0\}$$

и является отображением при помощи линейного преобразования $x = (B - A)\, y$ всего положительного ортанта.

Из линейной природы преобразования немедленно вытекают следующие два свойства множества X:

а) X — *замкнутое выпуклое множество.*

Положительный ортант $y \geqq 0$ (включающий границу) является замкнутым выпуклым множеством. Это свойство сохраняется при линейном преобразовании.

б) X — *выпуклый многогранный конус.*

Замкнутое и выпуклое множество X содержит kx для всех $k \geqq 0$, если оно содержит x. Поэтому множество X —

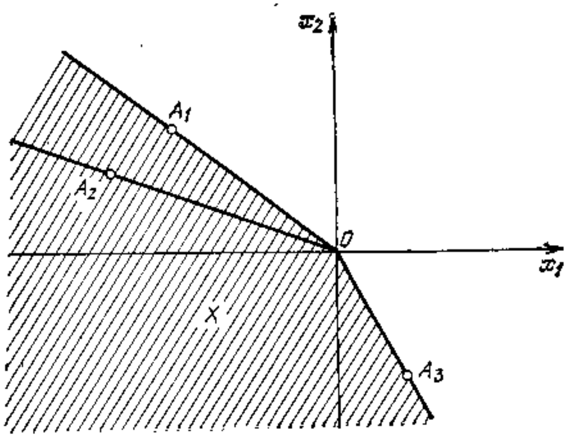


Рис. 7.1. Множество выпуска.

конус. Этот конус многогранный, так как число производственных процессов конечно.

Рис. 7.1 иллюстрирует двухпродуктовое множество выпуска с тремя производственными процессами, единичные уровни которых представлены точками A_1, A_2, A_3. Процессы A_1, A_2 затрачивают x_1 и выпускают x_2, процесс же A_3, наоборот, затрачивает x_2, а выпускает x_1. Из линейности отображения следует, что все точки на лучах OA_1, OA_2, OA_3, продолженных бесконечно за A_1, A_2, A_3, являются точками множества X. Так как множество X выпукло, все точки на отрезках, соединяющих любую пару точек на этих лучах, также принадлежат X. Таким образом, X заполняет пространство между лучами OA_1 и OA_3. Это заштрихованная область на рисунке. Все точки области могут действительно достигаться при использовании только производственных процессов A_1 и A_3. Процесс A_2, как мы увидим в следующем параграфе, не эффективен.

Хотя множество, изображенное на рис. 7.1, типично (типично в той мере, в какой оно может быть изображено на плоскости), это не единственный тип множеств, который удовлетворяет свойствам а) и б). Обычно для того, чтобы исключить другие возможности, делают три следующих специальных предположения о природе производства:

Специальное предположение I

Невозможно произвести положительное количество некоторого продукта, не затратив (не произведя отрицательное количество) по крайней мере один какой-либо иной продукт.

Формально, если Ω — замкнутый положительный ортант, то $X \cap \Omega = 0$. Таким образом, начало координат — единственная точка положительного ортанта, содержащаяся в множестве выпуска *).

Специальное предположение II

Процессы производства необратимы, т. е. если x — допустимый вектор выпуска, то $(-x)$ недопустим.

Формально $X \cap (-X) = 0$. Начало координат — единственная общая точка у множеств X и $(-X)$.

Специальное предположение III

Убыточное производство всегда возможно. Если $x \in X$ и $x' \leqq x$, то $x' \in X$.

Иногда это положение заменяется предположением о существовании свободных производственных процессов для каждого продукта, т. е. процессов, содержащих (-1) на j-м месте и нули на других. Убыточное производство формально достигается комбинацией свободных и обычных процессов. Следствием этих предположений является то, что $-\Omega \subset X$, так что допускается возможность потратить любой набор продуктов.

Экономический смысл и целесообразность предположения I очевидны. Два последних предположения требуют некоторого объяснения.

Необратимость (предположение II) является основой экономической теории производства в отличие от технологической теории производства. Рассмотрим некоторый химический процесс, являющийся обратимым в химическом

*) Купманс придает этому постулату более образную формулировку: «Не существует страны изобилия и праздности (Cockaigne)».

(в технологическом) смысле. С экономической точки зрения этот процесс требует затрат, отличных от вещества и энергии (наиболее яркий пример — труд), которые не могут быть возвращены при обратимости химического процесса. На самом деле обратимость химического процесса потребует *бо́льших* затрат труда. Кроме того, если процесс производства длится некоторое время, то выпускаемый продукт появляется позже, чем затрачиваемый, и продукты с различным временем производства считаются различными. В этом случае необратимость производственного процесса ясна. Тем не менее мы не будем придавать особое значение этой аргументации, так как теория производства — в основном статическая теория.

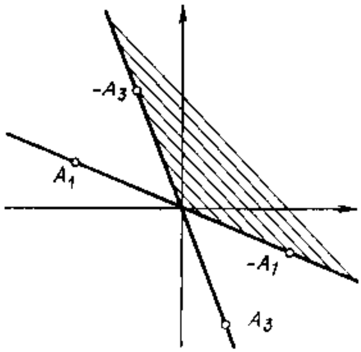


Рис. 7.2. Необратимость

Существует взаимосвязь между предположениями I и II, которая усиливает роль предположения II.

Пусть производственные процессы на рис. 7.1 обратимы. Тогда процессы $-A_1$ и $-A_3$ возможны. В этом случае, как показано на рис. 7.2, линейные комбинации $-A_1$ и $-A_3$ определяют точки в положительном ортанте. Это противоречит предположению I.

Предположение III о возможности убыточного производства (или свободного перераспределения), вероятно, покажется читателю приемлемым, но бесполезным. Это предположение первоначально было сформулировано для того, чтобы математически расширить множество выпуска.

Рассмотренные предположения о природе множества выпуска исключают из их числа некоторые множества, хотя они и являются выпуклыми многогранными конусами. Это показано на рис. 7.3. Множество на рис. 7.3, *а* исключено по предположению II, на рис. 7.3, *б*—по предположению I. (Действительно, множество на рис. *б* может быть расширено по предположению III до всего пространства, как на рис. *в*). Таким образом, только множества типа *г*, *д* и *е* являются допустимыми.

Условия на множества выпуска, наложенные предположениями I—III, могут быть формализованы и приводят к важному свойству множества X.

Поскольку выполняется предположение II (необратимость), X не может содержать полную гиперплоскость. Гипер-

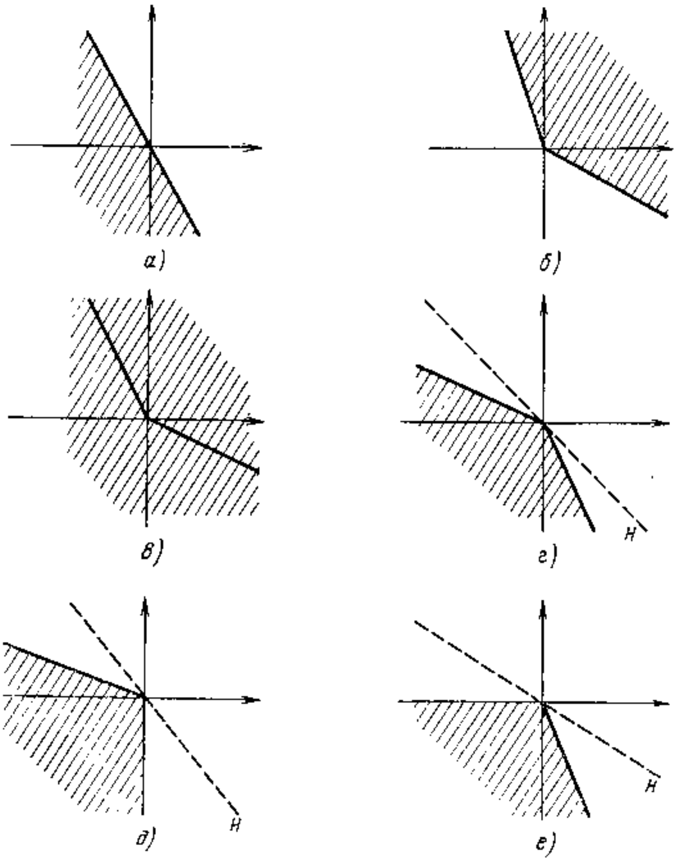


Рис. 7.3. К вопросу о допустимых множествах

плоскость делит пространство продуктов на два полупространства так, что множество X должно быть «меньше» полупространства. Следовательно, можно найти такую гиперплоскость, что X лежит целиком внутри одного из определенных ею полупространств. По тем же причинам множество $-X$ (которое можно получить поворотом X вокруг начала координат) содержится в другом полупространстве. Так как X и $-X$ пересекаются только в нуле, то существует гиперплоскость H (не обязательно единственная), такая, что X лежит в одном полупространстве, а $-X$ в другом. Эта *разделяющая* X и $-X$ *гиперплоскость*, очевидно, проходит через начало координат *).

Уравнение гиперплоскости, проходящей через начало координат, $cy = 0$. Положительный ортант Ω содержится в $-X$ (так как $-\Omega$ содержится в X по предположению III). Кроме того, $-X$ содержится в одном из полупространств, определяемых при помощи H. Поэтому гиперплоскость H не может проходить через Ω. Таким образом, уравнение $cy = 0$ не должно иметь неотрицательных решений. Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда все компоненты вектора c положительны. Таким образом, $c \gg 0$. (Вектор c является *нормалью* к гиперплоскости H.)

Два полупространства $cx \geqq 0$ и $cx \leqq 0$ определяются гиперплоскостью $cy = 0$. Первое, очевидно, содержит Ω и не содержит X. Таким образом, получено важное свойство ограниченности сверху множества X, вытекающее из предположений I—III. Это свойство выражено в четырех разных, но эквивалентных формах:

а) *существует строго положительный вектор c, такой, что $cx \leqq 0$ для всех $x \in X$;*

б) *существует множество $H = \{y \mid cy = 0\}$, такое, что для каждого $x \in X$, $x \leqq y$ для некоторого $y \in H$;*

в) *множество выпуска X лежит целиком внутри полупространства, лежащего с отрицательной стороны (т. е. содержащей $-\Omega$) от гиперплоскости, которая проходит через начало координат и имеет строго положительную нормаль;*

г) *множество $S(x^*) = \{x \mid x \geqq x^*, \ x \in X\}$ ограничено или пусто для всех x^*.*

Первые три утверждения уже были доказаны. Для доказательства утверждения г) заметим, что множество, определенное ограничениями $x \geqq x^*$, $cx \leqq 0$, пустое либо замкнутое ограниченное выпуклое множество для всех $c \gg 0$.

Из а) следует, что $S(x^*)$ целиком содержится в множестве $x \geqq x^*$, $cx \leqq 0$ при любом x^* и некотором c, так что

*) Этот результат легко получить из предположения II и следствия 4 теоремы Минковского (см. § Д4.3).

$S(x^*)$ ограничено. Этот результат легко проиллюстрировать в R^2, выбирая произвольный x^* на диаграммах (*г*), (*д*) и (*е*), приведенных на рис. 7.3.

7.3. ЭФФЕКТИВНОЕ ПРОИЗВОДСТВО

Наиболее важными понятиями, связанными с множеством выпуска, являются эффективность, эффективное производство и эффективные производственные процессы.

Определим эффективность стандартным образом.

Вектор чистого выпуска эффективен тогда и только тогда, когда не существует другого вектора, которому соответствует большее количество какого-либо из конечных продуктов без того, чтобы по крайней мере один конечный продукт производился бы в меньшем количестве, или же по крайней мере один продукт затрачивался бы в большем количестве. Здесь чистые промежуточные продукты считаются затратами на нулевом уровне.

Чистые затраты представлены компонентами вектора x с отрицательным знаком. Соотношение $x'_j > x_j$ обозначает, что x' обладает *бóльшим* количеством j-го продукта, если он выпускается, или использует *меньшее* количество j-го продукта, если он затрачивается. Таким образом, можно сформулировать определение эффективности более формально, не делая различия между затратами и выпусками.

Вектор $x^* \in X$ — эффективен тогда и только тогда, когда для любого продукта k и для любого другого вектора $x \in X$ из неравенства $x_k > x_k^*$ вытекает, что $x_j < x_j^*$ для некоторого $j \neq k$.

Если x^* эффективен, то из сказанного выше следует, что $x_k^* \geqq x_k$ для всех выпусков x, для которых $x_j^* \leqq x_j$ при всех $j \neq k$. Таким образом, x_k^* является максимумом для компоненты x_k по всем векторам из X, у которых $x_j \geqq x_j^*$ для всех $j \neq k$.

Свойство ограниченности множества X, доказанное в предыдущем параграфе, гарантирует существование этого максимума при условии, что X удовлетворяет трем специальным предположениям § 7.2.

Можно сформулировать критерий эффективности как задачу максимизации и использовать теорию линейного программирования для получения важной теоремы, связанной с эффективным производством.

Теорема об эффективности. *Каждая эффективная точка множества выпуска может быть достигнута при использовании не больше чем n различных производственных процессов. Каждой эффективной точке соответствуют положительные условные оценки, такие, что использованным производственным процессам соответствуют нулевые доходы, а всем другим — убытки* *).

Обозначим технологическую матрицу $(B - A)$ через T. Тогда $x = Ty$. Рассмотрим подматрицу матрицы T, полученную при вычеркивании k-й строки (k выбрано произвольно). Обозначим эту подматрицу через $\hat{T}$, а вектор, полученный при вычеркивании k-й компоненты вектора x — через $\hat{x}$. Наконец, обозначим через $\hat{l}$ k-ю строку, которая была вычеркнута из матрицы $\hat{T}$.

Для любого вектора уровней производственных процессов y величина $\hat{l}y$ определяет чистый выпуск x_k k-го продукта. Вектор чистого выпуска для любых других продуктов задается соотношением $\hat{x} = \hat{T}y$. Если x^* (с элементами $\hat{x}_j^*$; $j \neq k$) — эффективная точка множества X, то $x_k^* = \hat{l}y$ для некоторого y, который должен быть оптимальным решением задачи линейного программирования

$$\max \hat{l}y,$$

$$-\hat{T}y \leqq -\hat{x}^*, \quad y \geqq 0.$$

Задача, двойственная к ней, имеет вид

$$\min(-\mu x^*),$$

$$-\mu\hat{T} \geqq \hat{l}, \quad \mu \geqq 0 \text{ **)}.$$

Дальнейшие рассуждения следуют из теории линейного программирования. Поскольку прямая задача имеет решение ($\hat{x}_k = \hat{l}y$ ограничено сверху), то базисное решение содержит не более n ненулевых компонент. Это доказывает первую часть теоремы.

---

*) При некоторых специфических особенностях матриц отдельные условные оценки могут быть нулевыми.

**) Основные ограничения выводятся из определения эффективности, требующего, чтобы $\hat{x}^* \leqq \hat{x}$. Это дает $\hat{T}y \geqq \hat{x}^*$. Для того чтобы привести задачу к стандартной форме, следует последнее неравенство переписать в виде $-\hat{T}y \leqq -\hat{x}^*$.

Из теоремы о равновесии линейного программирования следует, что либо $y_j^* = 0$, либо j-е ограничение в двойственной задаче на оптимальном решении обращается в равенство. Если $\hat{T}_j$ — j-й столбец матрицы $\hat{T}$, то $y_j^* > 0$ и $\mu^*\hat{T}_j + \hat{l}_j = 0$ или $\mu^*\hat{T}_j + \hat{l}_j < 0$ и $y_j^* = 0$.

Так как постоянный вектор ограничений прямой задачи x^*, а оптимальное значение линейной формы задачи равно x_k^*, то все ограничения этой задачи эффективны в оптимальной точке ($\hat{T}y^* = \hat{x}^*$). Поэтому обычно все компоненты μ^* бывают положительными *).

Далее пусть p — вектор цен. Тогда $\sum_{i \neq k} p_i\hat{T}_{ij} + p_k\hat{l}_k$ есть доход, полученный при использовании j-го производственного процесса на единичном уровне. Таким образом, если взять вектор цен p^*, такой, что $p_i^* = \mu_i^*$, $i \neq k$, $p_k^* = 1$, то p^* задает множество условных оценок, которые дают нулевую прибыль для используемых процессов и убытки для других. Такие оценки существуют для любого эффективного вектора x и могут быть вычислены при помощи задач приведенного выше вида.

Следует заметить, что для любого эффективного вектора x такая задача может быть поставлена для каждого продукта (k — произвольно). Таким образом, для каждой эффективной точки существует n таких задач. Для каждой из них можно получить двойственные векторы μ. Любой из этих векторов μ определяет условные оценки, удовлетворяющие теореме об эффективности. Теорема об эффективности ничего не говорит об *единственности* условных оценок. Фактически каждой эффективной точке может быть поставлено в соответствие множество условных оценок и, наоборот, каждому вектору условных оценок соответствует множество эффективных точек.

Как уже было сказано, производственные процессы, не используемые для достижения эффективной точки, приводят к убыткам. Отсюда вытекает следующий результат:

Теорема о децентрализации. *Пусть множество выпуска удовлетворяет условиям § 7.2. Тогда эффективное производство может быть достигнуто при децентра-*

---

*) Чтобы получить этот вывод, естественней было бы предыдущий абзац о II теореме двойственности записать в терминах двойственной пары ограничений $\mu^* = 0$ и $-\hat{T}y^* < -\hat{x}^*$ или $\mu^* > 0$ и $-\hat{T}y^* = -\hat{x}^*$ (*Прим. перев.*)

лизованном управлении, если существуют подходящие условные оценки и механизм управления технологическими процессами исключает использование убыточных процессов.

Условные оценки (полученные из подходящей задачи) могут быть получены при централизованном управлении. Они должны быть одинаковыми для всех производителей и единственными ценами, на которых основывается принятие решений. На этом этапе нельзя безусловно отождествлять эти условные оценки с действительными рыночными ценами.

7.4. ПОТРЕБЛЕНИЕ КАК ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ПРОЦЕСС *)

В другой своей работе автор предложил новый подход к теории поведения потребителя. В этом подходе непосредственными объектами потребительского предпочтения и полезности являются не продукты как таковые, а *характеристики* или свойства продуктов.

В простейшем варианте теории предполагается, что каждый продукт обладает измеримыми характеристиками, и численные значения характеристик прямо пропорциональны объему продуктов. Кроме того, предполагается, что характеристики линейной комбинации продуктов являются линейными комбинациями характеристик отдельно взятых продуктов. Эта связь между продуктами и их характеристиками полагается объективной и одинаковой для всех потребителей.

Таким образом, каждому (j-му) продукту поставлен в соответствие *вектор характеристик* b^j, такой, что b_{ij} — численное значение i-й характеристики, отвечающей единице j-го продукта. Вектор b^j обладает такими же аналитическими свойствами, что и вектор уровней производственных процессов в теории производства. Соберем все векторы b^j в матрицу B и назовем ее *технологической матрицей потребления*. Если число различных характеристик равно r, а число различных продуктов n, то B — матрица порядка $r \times n$. В принципе соотношение между r и n может быть любым, но обычно предполагается, что $r < n$.

---

*) Этот параграф является развитием идей, предложенных Ланкастером в [3] и [4].

Обозначив вектор характеристик через z, а вектор продуктов через x, получим следующее соотношение:

$$z = Bx.$$

В простейшей модели мы предполагаем, что характеристики связаны с продуктами таким образом, что B — полуположительная матрица. Матрица B аналогична матрице выпуска в модели производства. Основное различие между предлагаемой моделью потребления и типичной моделью производства состоит в том, что здесь типичный процесс характеризуется единственным затрачиваемым продуктом (самим продуктом) и несколькими совместными выпусками (характеристиками продукта). В модели производства, наоборот, типичный производственный процесс обычно характеризуется единственным выпуском и несколькими затрачиваемыми продуктами.

В частном случае, когда технологическая матрица потребления квадратная и может быть приведена к диагональной форме, получаем традиционную теорию потребления. В этом специальном случае каждый продукт связан с одной характеристикой, единственной для этого продукта.

В типичной ситуации потребительского выбора можно считать, что потребитель ведет себя так, чтобы максимизировать функцию полезности при соблюдении бюджетного ограничения. В предлагаемой модели (при фиксированных векторе цен p, доходе k и технологической матрице потребления B) оптимальное поведение потребителя может быть описано решением следующей нелинейной задачи *):

$$\max u(z),$$
$$z = Bx, \quad px \leqq k, \quad x \geqq 0.$$

Перепишем задачу в эквивалентном виде:

$$\max u(Bx),$$
$$px \leqq k, \quad x \geqq 0.$$

Эта модель может быть исследована при помощи методов гл. 5. Поскольку каждый потребитель имеет свою функцию полезности, то для каждого из них может быть записана такая задача.

*) Этот параграф может рассматриваться в качестве иллюстрации использования теории линейного программирования в нелинейных задачах.

Целесообразно применить анализ производственных процессов для того, чтобы исследовать множество векторов характеристик, достижимое при заданном бюджетном ограничении. Выбор этого метода определяется объективной и универсальной природой технологии потребления.

Все потребители имеют дело с одними и теми же ценами. Поэтому множество достижимых характеристик определяется как

$$Z = \{z \mid z = Bx, \quad px \leqq k, \quad x \geqq 0\}.$$

Это множество, очевидно, является замкнутым, ограниченным и выпуклым, причем оно было бы одинаковым для всех потребителей, если бы не скаляр k, представляющий величину дохода потребителя. Таким образом, можно исследовать свойства потребительского выбора, которые являются общими для всех потребителей.

Множество Z принадлежит положительному ортанту, так как в рассматриваемом случае матрица B предполагается полуположительной, а x — неотрицательный вектор. Предположим, что $\partial u/\partial z_i > 0$ для всех потребителей и всех характеристик (это также специальное предположение простой модели). Это значит, что ни один потребитель не выбирает $z \in Z$, если существует некоторый другой $z' \in Z$ такой, что $z' \geqq z$. Таким образом, введено понятие *эффективного потребления*, аналогичное понятию эффективного производства.

Из приведенных соображений следует, что потребительский выбор имеет две фазы: *эффективный выбор*, осуществляемый одинаковым образом всеми потребителями, и *персональный выбор* каждого потребителя. В первой фазе выбирается подмножество эффективных точек в множестве Z. Во второй фазе каждый потребитель выбирает наиболее предпочтительную для него точку в эффективном подмножестве множества Z.

Общий характер множества Z, эффективности и персонального выбора иллюстрируется рис. 7.4. На рисунке рассматриваются две характеристики z_1, z_2 и пять продуктов. Характеристики соответствуют таким объемам продуктов, которые можно приобрести, затратив весь бюджет на набор продуктов, определяемый точками G_1 — G_5. Множество Z — заштрихованная область (заметим, что в этом случае множество Z не содержит осей), а эффективные точки лежат на ломаной $G_1G_2G_3G_4$. В установленных ценах продукт G_5 не будет покупаться ни одним потребителем. Персональный выбор иллюстрируется на этом рисунке кривыми, соответствующими трем различным потребителям, выбирающим наборы A, B, C.

Ясно, что набор продуктов, определяющий эффективную точку z^*, является решением задачи линейного программирования:

$$\min p^*x,$$
$$Bx = z^*, \quad x \geqq 0,$$

в которой норма вектора z^* выбрана так, чтобы для оптимального x^* имело место равенство $p^*x^* = k$. (Предполагается, что $r < n$, так что ограничения могут удовлетворяться как равенства.)

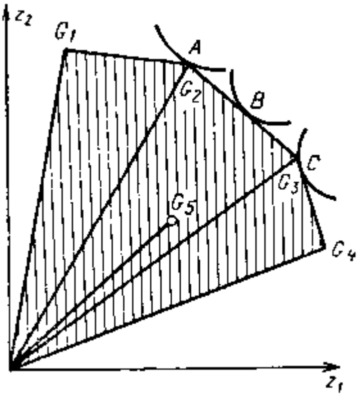


Рис. 7.4. Эффективный и персональный выбор.

Общая теория линейного программирования позволяет обосновать следующее утверждение. *Любой эффективный вектор характеристик достигается при потреблении не более r различных продуктов, где r — число различных характеристик.*

Рассмотрим теперь влияние перехода от вектора цен p^* к p^{**} на выбор множества эффективных точек и соответствующих комбинаций продуктов. Если при этом точка z^* остается эффективной, то новая совокупность продуктов будет оптимальным решением задачи

$$\min p^{**}x,$$
$$Bx = z^*, \quad x \geqq 0.$$

Так как ограничения новой задачи те же, что и старой, то из основной леммы линейного программирования имеем

$$p^{**}x^* \geqq p^{**}x^{**},$$
$$p^*x^{**} \geqq p^*x^*,$$

где x^{**} — решение задачи с вектором цен p^{**}.

Если заменить z^* в задаче с вектором цен p^* на λz^*, то соответствующим решением задачи будет λx^*. Выберем λ так, чтобы $\lambda p^{**}x^* = p^{**}x^{**}$. Первое из приведенных неравенств показывает, что $\lambda \leqq 1$. Из второго неравенства следует, что $p^*x^{**} \geqq \lambda p^* x^*$. Знак неравенства не изменяется, так как $\lambda \leqq 1$.

Введем следующие обозначения *): $x = \lambda x^*$, $x' = x^{**}$, $p = p^*$, $p' = p^{**}$. В этих обозначениях приведенные соотношения перепишутся в виде

$$p'x' = p'x,$$

$$px' \geqq px.$$

Последнее неравенство выполняется как равенство только при $x' = x$.

Таким образом, оптимальные наборы продуктов x и x' сразу же могут быть выделены как наборы, удовлетворяющие *аксиоме выявленного предпочтения* Самуэльсона **). Если поменять знак во втором неравенстве и сложить его с первым, получим так называемый *эффект общего замещения*:

$$(p' - p)\ (x' - x) \leqq 0.$$

Если же меняется цена только j-го продукта, то имеет место так называемый *эффект частного замещения*:

$$\Delta p_j \cdot \Delta x_j \leqq 0.$$

Оба неравенства выполняются для изменений цен, скомпенсированных так, что первоначальный набор продуктов может быть куплен при новом доходе в новых ценах.

Приведенный эффект замещения имеет место без изменений в соотношениях характеристик продуктов (пропорции заданы вектором z^*) и является свойством всех эффективных точек множества Z. Определенное таким образом замещение называется *эффективным замещением*. Эффективное замещение обусловлено изменением пропорций продуктов, используемых для получения данных характеристик,

---

*) Запись x' здесь не обозначает транспонирование x.

**) Подробно аксиомы выявленного предпочтения исследованы Хендерсоном и Квандтом, см. также Самуэльсон [1]. Приведенное выше соотношение определяет так называемую слабую аксиому.

На русском языке аксиомы выявленного предпочтения изложены, например, в работе Карлина [1]. (*Прим. перев.*)

как реакцией на изменение относительных цен продуктов. Поэтому оно является *объективным* и *универсальным*.

Кроме эффективного замещения (эффект которого — с необходимостью нулевой в традиционном случае, когда исключен выбор характеристик), существует еще и эффект *персонального* (или *личного*) *замещения*, обусловленный выпуклостью функций индивидуальных предпочтений. Чтобы установить этот эффект, рассмотрим задачу, двойственную к исследуемой выше задаче:

$$\max wz^*,$$
$$wB \leqq p^*.$$

По теореме двойственности для оптимального значения w^* имеем

$$w^*z^* = p^*x^* = k.$$

Таким образом, можно рассматривать потребителя, максимизирующего $u(z)$ при условии, что $w^*z \leqq k$. Условные оценки w^* являются подходящими для всех потребителей, оптимальный выбор которых использует один и тот же базис матрицы B.

Представляет интерес анализ потребительского выбора при отсутствии эффективного замещения, т. е. в ситуации, когда потребитель ограничен одним и тем же базисом. Пусть $\hat{B}$ — базис для некоторого первоначального выбора z, с бюджетным ограничением, зависящим от p. Подходящие условные оценки характеристик задаются соотношением $\hat{w}\hat{B} = p$, где $\hat{w}$ — подвектор *ненулевого* вектора условных оценок.

Заменим теперь вектор цен p на p'. При этом базис $\hat{B}$ остается тем же. Потребитель столкнулся с *псевдоусловными оценками* (мы используем этот термин, чтобы оставить привычный термин для оптимальной ситуации) $\hat{w}'$. Пусть доход потребителя таков, что он может купить первичный вектор характеристик z, не меняя базиса. Если предпочтение потребителя удовлетворяет обычному предположению выпуклости, будем иметь замещение для характеристик

$$(\hat{w}' - \hat{w})(z' - z) \leqq 0,$$

где z' — вектор вновь выбранных характеристик.

Поскольку $\hat{B}$—невырожденная квадратная матрица, мы имеем $\hat{w} = p\hat{B}^{-1}$, $\hat{w}' = p'\hat{B}^{-1}$ и, кроме того, $z = \hat{B}x$, $z' = \hat{B}x'$.

Подставляя значения z, z' и $\hat{w}$, $\hat{w}'$ в предыдущее неравенство, получим

$$(\hat{w}' - \hat{w})(z' - z) = (p' - p)\hat{B}^{-1}\hat{B}(x' - x) = (p' - p)(x' - x),$$

так что

$$(p' - p)\ (x' - x) \leqq 0.$$

Таким образом, выпуклость предпочтений подразумевает замещение продуктов даже тогда, когда эффективное замещение не имеет места.

Наконец, необходимо показать, что, если разрешено полное регулирование, то потребитель сможет купить начальный вектор характеристик в новых условных оценках после того, как его доход обеспечит возможность приобретения начального набора продуктов в новых ценах на продукты.

Заменим вектор цен p на p', и пусть доход устанавливается так, что $p'x = p'x'$, где x — начальный набор продуктов, а $p'x$—новый (установленный) доход. Пусть w, z—старые, а w', z'—новые условные оценки и характеристики соответственно. Кроме того, допустим, что разрешено полное регулирование.

Использование теоремы двойственности и основной леммы в соответствующих задачах дает

$$w'z' = w'Bx' = p'x',$$
$$w'z = w'Bx \leqq p'x.$$

Но $p'x' = p'x$, так что

$$w'z' \geqq w'z$$

и установленный доход является более чем достаточным, чтобы позволить покупку первоначальных характеристик в новых условных оценках.

Таким образом, мы показали существование двух эффектов замещения, независимых и действующих в одном и том же направлении: объективное и универсальное эффективное замещение и персональное (личное) замещение.

Для некомпенсированных изменений цен имеют место эффективная прибыль и персональная (личная) прибыль.

Простейшая модель, которая была здесь построена и изучена, может быть обобщена введением отрицательных (нежелательных) характеристик и введением продажи персональных (личных) услуг (различных видов труда), связанных с отрицательными характеристиками. Модель может также быть обобщена введением процессов, требующих совместных затрат различных продуктов (взаимодополняемость в потреблении). В более общей модели мы отделяем процессы (y) от продуктов и характеристик и получаем технологию, состоящую из двух частей: $z = By$; $x = Ay$, где A — матрица затрат продуктов. Аналогия с общей моделью производства очевидна.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Геометрический подход к анализу производственных процессов приведен в работах Купманса [2] и [3]. Эти вопросы исследованы также и в работе Купманса [1] и у Моргенштерна. Аллен [2] также рассматривает анализ производственных процессов. Подробные консультации по теории потребления приводятся в работах Ланкастера [3] и [4].

Материал этой главы будет непосредственно или косвенно использоваться в гл. 8—11.

Упражнения

1. Пусть система использует r первичных продуктов, которые не производятся в системе. Показать, что эффективная точка требует использования не более r производственных процессов. Сравните этот результат с теоремой о замещении для модели Леонтьева (см. § 6.7).

2. Для системы, содержащей n продуктов, грань производственного конуса представляет собой неотрицательную линейную комбинацию не более чем n производственных процессов. Докажите, что если грань содержит внутреннюю эффективную точку (внутренняя точка задается строго положительной линейной комбинацией процессов, определяющих грань), то все точки на грани — эффективные.

3. Доказать, что эффективная грань такова, что соотношения

$$pF = 0,$$
$$pT \leqq 0$$

(где T — технологическая матрица; F — подматрица T, определяющая грань) справедливы для некоторого $p \gg 0$.

4. Показать, что нормаль (из начала координат) к эффективной грани есть строго положительный вектор.

8. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

Эту главу можно читать после гл. 4 (главным образом, после § 4.5 и 4.6) и гл. 7. Изложение материала главы предполагает знакомство с теорией квадратичных форм (дополнение Д6) и с однородными функциями (Д8, § Д8.6).

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Глава посвящена анализу нелинейных моделей спроса и нелинейных моделей производства. Здесь приведены примеры использования неоклассических и установившихся теоретических методов исследования в теории спроса и в теории производства. Это сделано для того, чтобы читатель мог сравнить достоинства и недостатки тех или иных методов.

Неоклассический анализ спроса приведен в § 8.2. Неоклассическая поверхность эффективного выпуска, предмет исследования § 8.4—8.6, требует более глубокого анализа и знания свойств квадратичных форм. Простые установившиеся теоретические подходы к теории спроса и производства, рассматриваемые в § 8.3 и 8.7, не представляют трудности для усвоения. Параграф 8.7 использует методы анализа производственных процессов, приведенные в § 7.1—7.4.

8.2. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СПРОСА*)

Неоклассическая теория спроса, ведущая начало от известной статьи Слуцкого **), обязана своим развитием и популяризацией (если это слово можно считать приемлемым), главным образом, работе Хикса.

Неоклассическая теория спроса содержит три основных положения:

---

*) Анализ спроса в этом параграфе приводится в стандартной форме. Аналогичное изложение можно найти в работе Хикса, Мозака и Самуэльсона [1] или Слуцкого [1].

**) См. Слуцкий. Теорема о составном продукте принадлежит Хиксу и не встречалась в работах Слуцкого.

а) *уравнение Слуцкого*, устанавливающее влияние некомпенсированного изменения одной цены на спрос на каждый продукт в рассматриваемой системе;

б) доказательство инвариантности уравнения Слуцкого по отношению к изменению индекса полезности;

в) *теорему о составном продукте*, устанавливающую возможность рассмотрения одного продукта вместо группы продуктов, относительные цены которых не меняются.

В процессе анализа предполагается, что каждый потребитель обладает непрерывной, дважды дифференцируемой (класс C^2) функцией полезности $u(x)$, определенной на n-мерном пространстве продуктов. Кроме того, потребитель ограничен в своих действиях заданными ценами и фиксированным доходом M. Предполагается, что n продуктов модели исчерпывают для потребителя всю информацию и все возможности. Поэтому он тратит весь свой доход только на эти продукты.

Поведение потребителя определяется следующей классической задачей оптимизации:

$$\max u(x),$$
$$px = M.$$

Используя метод Лагранжа, получаем условия первого порядка:

$$\begin{aligned} px - M &= 0, \\ u_i - \lambda p_i &= 0, \end{aligned} \qquad (8.2.1)$$

где $u_i = \partial u / \partial x_i$.

Предполагается, что решение задачи и свойства функции u таковы, что максимум достигается в точке $x \gg 0$. Тогда детерминантные условия, полученные в § 4.5, для соответствующих условий второго порядка удовлетворяются *).

Рассмотрим влияние небольшого изменения цены одного продукта, пусть p_n, на оптимальное поведение потребителя. При изменении цены p_n условия оптимальности удовлетворяются. Продифференцируем условие первого порядка (8.2.1) по p_n. Получим

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j (\partial x_j / \partial p_n) = -\lambda x_n,$$

*) Эти условия неудачно были названы Хиксом и некоторыми другими исследователями «условиями устойчивости».

$$-p_i(\partial\lambda/\partial p_n)+\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(\partial x_j/\partial p_n)=$$

$$=\begin{cases} 0, & i=1,\ \ldots,\ n-1, \\ \lambda, & i=n. \end{cases} \qquad (8.2.2)$$

Подставим в (8.2.2) $u_i=\lambda p_i$ из (8.2.1) и запишем результат в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & u_1 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\partial\lambda/\partial p_n) \\ (\partial x_1/\partial p_n) \\ \cdots \\ \cdots \\ (\partial x_n/\partial p_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda x_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}. \qquad (8.2.3)$$

Матрицей этой системы уравнений является окаймленная матрица Гессе функции u. Обозначим ее символом $\hat{U}$. Решим систему относительно $\partial x_r/\partial p_n$. В соответствии с правилом Крамера (см. дополнение Д5, § Д5.2) решение находится делением определителя матрицы, полученной заменой в $\hat{U}$ $(r+1)$-го столбца вектором свободных членов, на определитель $\hat{U}$. Вектор свободных членов содержит только две ненулевые компоненты: первую и последнюю. Поэтому имеем

$$\partial x_r/\partial p_n=\frac{1}{\det\hat{U}}(-\lambda x_n U_r+\lambda U_{rn}), \qquad (8.2.4)$$

где U_r—алгебраическое дополнение к элементу u_r в определителе $\hat{U}$; U_{rn} — алгебраическое дополнение к элементу u_{rn} в определителе $\hat{U}$ *).

Вернемся теперь к условию первого порядка (8.2.1) и исследуем влияние изменения M при неизменных ценах. Продифференцировав эти уравнения по M, получим

$$\lambda\sum_{j=1}^{n} p_j(\partial x_j/\partial M)=\lambda,$$

$$-p_i(\partial\lambda/\partial M)+\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(\partial x_j/\partial M)=0, \quad i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (8.2.5)$$

---

*) Подчеркнем, что U_r и U_{rn} — алгебраические дополнения к элементам u_r и u_{rn}, а не к элементам, стоящим в позициях $(1, r)$ и (n, r).

Если произвести те же преобразования, что и выше, то увидим, что система в матричной форме примет такой же вид, как и в (8.2.3), но вектор свободных членов будет иметь только один ненулевой элемент λ. Это — первая компонента вектора свободных членов. Решая систему относительно $\partial x_r/\partial M$ по правилу Крамера, получим простой результат

$$\partial x_r/\partial M = \lambda U_r/\det \hat{U}. \tag{8.2.6}$$

Обозначим $K_{rn} = \lambda U_{rn}/(\det \hat{U})$ и подставим значение K_{rn} из (8.2.6) в (8.2.4). Получим *уравнение Слуцкого*:

$$\partial x_r/\partial p_n = -x_n\,(\partial x_r/\partial M) + K_{rn}. \tag{8.2.7}$$

Первый член $-x_n\,(\partial x_r/\partial M)$, определяющий влияние дохода, будем называть *индексом дохода*, член K_{rn} часто называют *индексом Слуцкого*.

Можно было бы установить различные свойства K_{rn}, например $K_{rn} = K_{nr}$ (из-за симметричности матрицы $\hat{U}$). Однако интерес представляет только случай $r = n$.

Член $K_{nn} = \lambda U_{nn}/(\det \hat{U})$ определяет *чистый эффект замещения* (см. § 4.6), т. е. определяет изменение x_n, являющееся результатом вариации p_n при условии, что доход поддерживается на таком уровне, что $u\,(x)$ остается неизменной. Величина K_{nn} отрицательна, если $u\,(x)$ обладает предполагаемыми (указанными выше) свойствами.

Таким образом, можно связать эффект некомпенсированного изменения цен с *влиянием дохода* и *влиянием замещения*. Подчеркнем это, переписав уравнение спроса (8.2.7) в виде

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial p_n}\right)_{M=M_0} = -x_n\left(\frac{\partial x_n}{\partial M}\right)_{p=p_0} + \left(\frac{\partial x_n}{\partial p_n}\right)_{u=u_0}. \tag{8.2.8}$$

Покажем теперь, что проведенный выше анализ инвариантен по отношению к изменению индекса полезности *).

Заменим индекс u индексом $v\,(u)$, таким, что $v'(= dv/du) > 0$. Имеем

$$v_i = v'u_i,$$
$$v_{ij} = v'u_{ij} + v''u_iu_j.$$

---

*) Заметим, что речь идет об изменении индекса полезности, а не функции полезности. Здесь имеется в виду то, что вместо $u\,(x)$ можно рассматривать любую функцию полезности вида $\varphi\,(u)$, где φ — монотонно возрастающее преобразование. (*Прим. перев.*)

Пусть $\hat{V}$ — окаймленная матрица Гессе функции v, соответствующая $\hat{U}$. Первый столбец $\hat{V}$ равен $v'\hat{U}^1$, где $\hat{U}^1$ — первый столбец $\hat{U}$. Столбец $(j+1)$ матрицы $\hat{V}$ равен

$$\hat{V}^{j+1} = \begin{bmatrix} v'u_j \\ v'u_{1j} + v''u_j u_1 \\ \cdots\cdots \\ v'u_{nj} + v''u_j u_n \end{bmatrix} = v' \begin{bmatrix} u_j \\ u_{1j} \\ \cdot \\ u_{nj} \end{bmatrix} + v''u_j \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} =$$

$$= v'\hat{U}^{j+1} + v''u_j\hat{U}^1.$$

Тогда

$$\det \hat{V} = (v')^{n+1} \det \hat{U}.$$

По тем же причинам алгебраические дополнения V_r, V_{rn} равны

$$V_r = (v')^n\, U_r, \quad V_{rn} = (v')^n\, U_{rn}.$$

Рассмотрим для нового индекса полезности условия первого порядка, с которыми связан множитель Лагранжа μ, вообще говоря, отличный от λ. Имеем

$$v_i = \mu p_i.$$

Из условия первого порядка для начального индекса полезности имеем $(1/\lambda)\, u_i = p_i$ и, кроме того, $v_i = v'u_i$, так что $\mu = v'\lambda$.

Используя всю эту информацию, приходим к выводу, что

$$\lambda U_r/(\det \hat{U}) = \mu V_r/(\det \hat{V}),$$

$$\lambda U_{rn}/(\det \hat{U}) = \mu V_{rn}/(\det \hat{V}).$$

Таким образом, уравнение Слуцкого является инвариантным относительно изменения индекса полезности.

Теорема о составном продукте может быть доказана с помощью уже рассмотренных методов. Однако при этом потребуются некоторые специальные свойства определителей. Эта теорема доказывается проще с помощью *теоремы об обобщенном замещении*, приведенной в следующем параграфе.

Нетрудно обобщить анализ, чтобы охватить ситуацию, в которой потребитель обладает некоторым начальным вектором продуктов x^0, а не фиксированным денежным доходом.

Спрос фирмы на продукты, необходимые для производства, задается неоклассической производственной функцией в такой же аналитической форме, как и спрос потребителя. Помимо функции полезности $u(x)$ задается еще и производственная функция $x = f(v)$, где v — вектор затрат. Предполагается, что при заданных ценах на факторы фирма максимизирует выпуск, который может быть получен при любых заданных затратах на факторы. Если теперь заменить окаймленную матрицу Гессе $\hat{U}$ окаймленной матрицей Гессе $\hat{F}$ производственной функции f и продукты на факторы, то приведенный выше анализ спроса можно распространить на анализ производства.

8.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ЗАМЕЩЕНИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ ВЫПУКЛОСТЬ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Свойства выпуклых множеств дают более эффективный способ интерпретации неотрицательности эффекта чистого замещения в неоклассической теории спроса, чем приведенный в гл. 4 (§ 4.6). Этот способ проще и приводит к более изящному доказательству утверждения об обобщенном эффекте замещения, чем классические методы.

Предположим, что функция полезности удовлетворяет следующему условию строгой выпуклости:

Множество $S = \{x \mid u(x) \geqq u^0\}$ *строго выпукло* *).

Это предположение, конечно, не является более сильным, чем неоклассическое предположение о свойствах $u(x)$. Фактически оно даже слабее, так как в нем не требуется непрерывности производных.

Предполагается, что при заданных ценах p^* потребитель выбирает вектор продуктов x^*, при котором функция полезности остается на уровне $u(x^*) = u^0$. Пусть теперь вектор цен стал равным p^{**}. Доход потребителя поддерживается таким, чтобы при новом выборе x^{**} функция полезности достигала начального уровня u^0. Векторы x^* и x^{**} выбираются таким образом, чтобы минимизировать p^*x, $p^{**}x$ соответственно при $x \in S$. Обозначим p^*x^* через M^*, а $p^{**}x^{**}$ через M^{**}.

*) Это эквивалентно предположению о том, что $u(x)$ является строго квазивогнутой функцией (терминология § Д8.5).

Рассмотрим гиперплоскость H, определенную уравнением $p^*x = M^*$. Она разделяет пространство продуктов на два полупространства:

$$H^+ = \{x \mid p^*x \geqq M^*\}, \qquad H^- = \{x \mid p^*x \leqq M^*\}.$$

В множестве S не существует точек, которые являлись бы внутренними для H^-. Иначе можно было бы найти такое $m < M^*$, что пересечение S с множеством $\{x \mid p^*x \leqq m\}$ было бы непустым. А это противоречит тому, что

$$M^* = \min_{x \in S} p^*x.$$

Таким образом, все точки множества S, принадлежащие H^-, лежат на гиперплоскости H. Следовательно, S полностью лежит в H^+. То есть H является опорной гиперплоскостью к строго выпуклому множеству S в точке x^*.

Поскольку $x^{**} \in S$, то $x^{**} \in H^+$, и либо $x^{**} = x^*$, либо x^{**} является внутренней точкой множества H^+. Таким образом,

$$\text{либо } x^{**} = x^*, \text{ либо } p^*x^{**} > M^* = p^*x^*.$$

Аналогичным образом можно провести анализ и для гиперплоскости

$$H' = \{x \mid p^{**}x = M^{**}\},$$

которая должна быть опорной гиперплоскостью к S в точке x^{**}. Мы придем к выводу, что S лежит внутри положительного полупространства. Следовательно,

$$\text{либо } x^{**} = x^*, \text{ либо } p^{**}x^* > M^{**} = p^{**}x^{**}.$$

Строго выпуклое множество может иметь, вообще говоря, более чем одну опорную гиперплоскость, проходящую через данную точку (например, H и H'), так что случай $x^* = x^{**}$ не может быть сразу исключен. Будем предполагать, что случай $H = H'$ (который может встретиться только при пропорциональном изменении всех цен) исключен. Такое предположение не является более жестким, чем требование непрерывности первых производных u.

Запишем два неравенства:

$$p^{**}x^{**} - p^{**}x^* < 0,$$
$$-p^*x^{**} + p^*x^* < 0.$$

Складывая эти неравенства, получим утверждение теоремы об обобщенном замещении

$$(p^{**} - p^*)\ (x^{**} - x^*) < 0.$$

Если меняется цена только j-го продукта, имеем частный эффект замещения

$$\Delta p_j^* \cdot \Delta x_j^* < 0.$$

Эффект обобщенного замещения можно использовать для доказательства теоремы о составном продукте, которая была сформулирована в предыдущем параграфе.

Определим некоторый составной продукт G следующим образом:

$$G = \hat{w}\hat{x},$$

где $\hat{w}$, $\hat{x}$ — r-мерные векторы ($r < n$). Предполагается, что цены r продуктов, определяющих составной продукт G, меняются пропорционально компонентам весового вектора $\hat{w}$. Это значит, что имеют место равенства $\hat{p}^* = P_G^*\hat{w}$, $\hat{p}^{**} = P_G^{**}\hat{w}$, где скаляр P_G можно рассматривать как цену составного продукта G.

Пусть цена составного продукта меняется, в то время как цены всех продуктов, не входящих в составной продукт, остаются неизменными. Тогда компоненты вектора $(p^{**} - p^*)$ из теоремы об обобщенном замещении, которые не соответствуют продуктам, входящим в G, равны нулю. Таким образом,

$$(p^{**} - p^*)(x^{**} - x^*) = (P_G^{**} - P_G^*)\hat{w}(\hat{x}^{**} - \hat{x}^*) = \Delta P_G \Delta G.$$

Следовательно, эффект замещения для составного продукта такой же, как и для любого отдельно взятого продукта.

Теорема о составном продукте оправдывает сведение моделей, содержащих n продуктов, к моделям из двух или трех составных продуктов.

8.4. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЭФФЕКТИВНОГО ВЫПУСКА *) (NEOCLASSICAL TRANSFORMATION SURFACE)

Неоклассическая поверхность эффективного выпуска, т. е. множество всех эффективных комбинаций из n продуктов, которые можно произвести при фиксированных суммарных объемах каждого из m факторов и однородной нели-

*) По-видимому, форма изложения материала § 8.4—8.6 оригинальна, хотя приведенные результаты хорошо известны для случая двух продуктов и двух факторов.

нейной, неоклассической производственной функции, является важным понятием в экономике благосостояния, теории торговли и других аспектах экономической теории. Форма этой поверхности, в частности ее выпуклость кверху, имеет большое значение. В экономике благосостояния возникают осложнения при невыпуклой поверхности эффективного выпуска. В этом случае появляются сомнения в эффективности системы цен, и это ведет к необычной форме равновесия.

В этом параграфе мы исследуем свойства поверхности эффективного выпуска и установим условия, подчеркивающие роль ее выпуклости. Этот случай будем называть «регулярным». В первую очередь нас интересует случай строгой выпуклости.

Пусть экономическая система содержит n продуктов и m первичных факторов. Выпуск каждого продукта задается неоклассической производственной функцией вида

$$x_j = f^j(v_1^j, v_2^j, \ldots, v_m^j),$$

где v_r^j — количество r-го фактора, используемое для производства j-го продукта. Предполагается, что каждому продукту соответствует своя производственная функция f^j. В системе не рассматриваются промежуточные продукты, так что продукты и факторы полностью разделены.

Обычное предположение о функциях f^j состоит в том, что каждой из них соответствуют свои минимальные издержки для любого уровня производства при заданных ценах на факторы. Как указывалось в § 8.2, вывод соответствующих условий аналитически подобен выводу условий, гарантирующих наличие у каждого потребителя своего минимума издержек при достижении заданного уровня полезности. Эти условия формулируются в терминах свойств определителей $\hat{F}^j$ окаймленных матриц Гессе функций f^j.

Очевидно, что при заданном объеме каждого из m факторов эффективный вектор выпуска x (точка на поверхности эффективного выпуска) будет максимизировать линейную форму px для некоторого подходящего $p \geqq 0$ при выполнении ограничений на предложение факторов.

Таким образом, любая точка поверхности эффективного выпуска задается решением классической задачи оптимизации:

$$\max \{\sum_j p_j x_j = \sum_j p_j f^j(v^j)\},$$
$$\sum_j v^j = V,$$

где $v^j = (v_1^j, \ldots, v_m^j)$, а вектор V определяет наличие факторов. Система имеет $m \times n$ переменных v_r^j. Предполагается, что можно найти положительные оптимальные векторы. Поэтому нет нужды рассматривать ограничение на неотрицательность переменных. Если будет необходимо, мы ограничимся анализом той части поверхности эффективного выпуска, для которой сформулированное выше условие выполняется.

Функция Лагранжа задачи записывается в виде

$$L(v^1, \ldots, v^n, \mu) = \sum_j p_j f^j - \sum_r \mu_r \left(\sum_j v_r^j - V_r\right).$$

Условия первого порядка определяются соотношениями

$$\begin{aligned} &\partial L/\partial \mu_r = \sum_j v_r^j - V_r = 0, \quad r = 1, \ldots, m, \\ &\partial L/\partial v_r^j = p_j f_r^j - \mu_r = 0, \quad j = 1, \ldots, n; \quad r = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Величины μ_r представляют собой условные оценки факторов. Если действительные цены на факторы пропорциональны оценкам, то приведенные выше условия являются обычными предельными условиями для оптимального производства.

Здесь нас в основном интересуют условия второго порядка. Условия выпуклости кверху поверхности эффективного выпуска эквивалентны условиям существования строгого максимума в задаче оптимизации.

В настоящем исследовании нецелесообразно ограничиться воспроизведением стандартных условий второго порядка, достаточных для максимума целевой функции. Можно получить существенно больше информации, рассматривая условия второго порядка как требование неотрицательности квадратичной формы, отвечающей матрице из вторых частных производных L по v, для соответствующим образом ограниченных вариаций.

Имеем:

$$\begin{aligned} &\partial^2 L/\partial v_r^j\, \partial v_s^k = 0, \quad j \neq k, \text{ для всех } r, s; \\ &\partial^2 L/\partial v_r^j\, \partial v_s^j = p_j f_{rs}^j. \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Упорядочим переменные так, чтобы все v_r^1 предшествовали v_r^2 и т. д. Легко видеть, что матрица A, составленная из производных второго порядка, имеет блочно-диагональную структуру:

$$A=\begin{bmatrix} p_1F^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2F^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_nF^n \end{bmatrix}.$$

Здесь F^j — неокаймленная матрица Гессе функции f^j. Обозначим через y^j вектор дифференциалов $(dv_1^j, \ldots, dv_m^j)$, а через y — вектор $(y^1, \ldots, y^n)$. Тогда интересующая нас квадратичная форма примет вид

$$y'Ay=\sum_j p_j(y^j)'F^jy^j. \qquad (8.4.3)$$

При этом должны выполняться ограничения

$$\sum_j dv_r^j=0, \quad r=1, \ldots, m,$$

которые можно записать в виде

$$\sum_j y^j=[0] \text{ (это векторное уравнение)}$$

или, что то же самое,

$$[I : I : \ldots : I]\, y = 0,$$

где матрица в левой части уравнения составлена из n единичных матриц порядка m, расположенных одна за другой.

Таким образом, поверхность эффективного выпуска выпукла кверху в точке, соответствующей ценам p, если

$$y'Ay<0 \text{ для } [I : I : \ldots : I]\, y = 0,$$

т. е. если

$$\sum_j p_j(y^j)'F^jy^j<0 \quad \text{для} \quad \sum_j y^j=0. \qquad (8.4.4)$$

Очевидно, для этого достаточно, чтобы выражения $(y^j)'F^jy^j$ были бы отрицательными для всех j и всех y^j, удовлетворяющих ограничениям. Ограничения в большой системе не затрагивают сильно каждую отдельную отрасль. Поэтому следующая формулировка не будет слишком жесткой.

Условие I для регулярной поверхности эффективного выпуска. *Для регулярности поверхности эффективного выпуска достаточно, но не необходи-*

мо, чтобы матрица Гессе каждой производственной функции была отрицательно определена.

Величина $y'Ay$ должна быть отрицательной для любого вектора y, обладающего по крайней мере несколькими ненулевыми компонентами и удовлетворяющего ограничениям. Рассмотрим ситуацию, при которой y^j приравниваются нулю. Очевидно, что из-за ограничений только $(n-2)$ вектора y^j можно приравнять нулю. Пусть все векторы, кроме y^j и y^k, нулевые. Из ограничений $y^k = -y^j$, и, следовательно, в этом частном случае

$$y'Ay = p_j (y^j)' F^j y^j + p_k (-y^j)' F^k (-y^j) = \\ = (y^j)' (p_j F^j + p_k F^k) y^j. \qquad (8.4.5)$$

Мы имеем (поскольку ограничения уже учтены):

Условие II для регулярной поверхности эффективного выпуска. *Для регулярности поверхности эффективного выпуска необходимо, но не достаточно, чтобы взвешенные суммы матриц Гессе любых двух производственных функций были бы отрицательно определены. Предполагается, что весами являются цены, подходящие для рассматриваемой точки на поверхности эффективного выпуска.*

Кроме всего прочего из этого условия следует, что не более чем одна производственная функция, может иметь положительно определенную матрицу Гессе. Если даже только одна отрасль обладает этим свойством, то существует некоторое соотношение цен, при котором сумма $p_j F^j + p_k F^k$ не является отрицательно определенной, и, следовательно, поверхность эффективного выпуска нигде не имеет регулярной кривизны.

Приведенные выше условия сформулированы в терминах неокаймленных матриц Гессе производственных функций. Обычно же эти условия связаны с окаймленными матрицами Гессе $\hat{F}^j$. Легко видеть, что стандартные условия второго порядка на производственную функцию являются необходимыми для соответствующих условий на неокаймленную матрицу Гессе. Мы получили стандартные условия, рассматривая обстоятельства, при которых $(y^j)' F^j y^j$ отрицательны для всех переменных, удовлетворяющих ограничению $\Sigma y_i^j = 0$. Приведенное условие должно также удовлетворяться для отрицательных $(y^j)' F^j y^j$ при y^j, не удовлетворяющих ограничению. Тем не менее это стандартное условие не является достаточным. Такое утверждение может быть проиллюстрировано на примере производственной функции двух факторов, матрица Гессе которой равна

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Условие отрицательной определенности F заключается в том, что $f_{11}, f_{22} < 0$ и $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$. Стандартные ограничения на функцию f для переменных, удовлетворяющих ограничениям, состоят в том, что выражение $(f_2)^2 f_{11} + (f_1)^2 f_{22} - 2f_1f_2f_{12}$ отрицательно. Большое положительное значение f_{12} удовлетворяет второму условию, но противоречит первому.

Значение квадратичной формы, соответствующей неокаймленной матрице Гессе, станет ясной из следующего параграфа.

8.5. ИЗМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ МАСШТАБА ПРОИЗВОДСТВА *)

Зададим производственную функцию $f(v)$ и некоторый начальный вектор затрат v^*. Сравнивая $f(tv^*)$ с $tf(v^*)$ для всех $t > 0$, получим следующие определения:

Говорят, что производственная функция указывает на убывание, постоянство или возрастание эффективности при изменении масштаба производства **) *для заданных пропорций затрат v^* в зависимости от того, является ли $f(tv^*)$ меньшим, равным или бо́льшим чем $tf(v^*)$ для всех $t > 1$, и является ли $f(tv^*)$ бо́льшим, равным или меньшим, чем $tf(v^*)$ для всех $t < 1$* ***).

Если соответствующее условие справедливо для всех v^*, то производственная функция указывает на убывание, постоянство или возрастание эффективности при изменении масштаба производства повсюду.

---

*) Этот параграф требует знакомства со свойствами однородных функций (§ Д8.6).

**) Под изменением масштаба производства подразумевается сбалансированное изменение всех затрат. (*Прим. перев.*)

***) Это значит, что имеет место убывание эффективности при изменении масштаба производства для любого вектора затрат, пропорционального заданному v^*, если $f(tv^*) < tf(v^*)$ для всех $t > 1$. и $f(tv^*) > tf(v^*)$ для всех $0 < t < 1$.

Используем однородные функции для изучения характера изменения эффективности при изменении масштаба производства. Функция $f(v)$ является однородной степени ρ, если $f(tv) = t^\rho f(v)$ для всех v. Очевидно, мы имеем убывание, постоянство и возрастание эффективности при изменении масштаба производства для однородной функции в зависимости от того, является ли ρ меньшим, равным или бо́льшим единицы.

Свойства однородных функций обсуждались в дополнении Д8 (§ Д8.6). Здесь будут использованы теорема Эйлера и доказанное в § Д8.6 утверждение, заключающееся в том, что для однородной степени ρ функции $f(v)$ имеет место равенство

$$(\rho-1) f_i = \sum_j f_{ij} v_j \quad \text{для всех } i,$$

или в векторно-матричной форме

$$(\rho - 1) \nabla f = v' F,$$

где ∇f — градиент функции f, а F (неокаймленная) матрица Гессе f.

Будем предполагать, что, как обычно, производственная функция квазивогнута, так что квадратичная форма $u'Fu < 0$ при малых изменениях u $(u \neq 0)$ на поверхности уровня $f(v) = c$, т. е. при вариациях, для которых $\nabla f \cdot v = 0$.

Любое произвольно малое изменение v на y может быть разложено на две составляющие:

а) малое изменение u на поверхности, удовлетворяющее упомянутому выше соотношению;

б) изменение вдоль вектора v (переход от v к $v + \lambda v$).

Таким образом, $y = u + \lambda v$. Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$\begin{aligned} y'Fy &= (u + \lambda v)' F (u + \lambda v) = \\ &= u'Fu + \lambda v'Fu + u'F\lambda v + \lambda v' F \lambda v = \\ &= u'Fu + 2\lambda v'Fu + \lambda^2 v'Fv = \\ &= u'Fu + v'F(\lambda^2 v + 2\lambda u). \end{aligned}$$

Используя приведенное ранее свойство однородных функций, получим

$$\begin{aligned} v'F(\lambda^2 v + 2\lambda u) &= (\rho - 1) \nabla f (\lambda^2 v + 2\lambda u) = \\ &= (\rho - 1) [\lambda^2 \nabla f \cdot v + 2\lambda \nabla f \cdot u]. \end{aligned}$$

По определению вариации u имеем $\nabla f \cdot u = 0$, а из теоремы Эйлера следует, что $\nabla f \cdot v = \rho f(v)$. Поэтому

$$y'Fy = u'Fu + \lambda^2 \rho (\rho - 1) f(v).$$

Согласно принятому допущению о производственной функции $u'Fu < 0$ при $u \neq 0$. Функция $f(v)$ положительна. Поэтому

$$\lambda^2 \rho (\rho - 1) f(v) \leqq 0$$

для $\rho \leqq 1$, причем строгое неравенство выполняется при $\rho < 1$. Таким образом, величина $y'Fy$ неположительна при всех u и λ. Если же $\rho = 1$, $y'Fy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $y = \lambda v$ ($u = 0$). Если $\rho < 1$, $y'Fy$ отрицательно при всех u и λ ($u \neq 0$, $\lambda \neq 0$).

Однако при подходящем выборе λ и u, удовлетворяющем условию $\nabla f \cdot u = 0$, произвольно малый вектор y может быть представлен в определенном ранее виде. Таким образом, F отрицательно полуопределенная матрица, если $\rho = 1$, и отрицательно определенная, если $\rho < 1$. Теперь можно сформулировать важный результат неоклассической теории производства.

Если $f(v)$ однородная степени ρ квазивогнутая производственная функция, то она имеет матрицу Гессе, которая: а) отрицательно полуопределена при $\rho = 1$ (постоянство эффективности при изменении масштаба производства); б) отрицательно определена при $\rho < 1$ (убывание эффективности при изменении масштаба производства).

Это значит, что производственная функция является *вогнутой* функцией, если она указывает на невозрастание эффективности при изменении масштаба производства, и *строго вогнутой*, если она указывает на убывание эффективности при изменении масштаба производства.

Используя условие I из § 8.4, получаем следующее утверждение:

Экономическая система, состоящая целиком из отраслей, производственные функции которых однородны, квазивогнуты и указывают на убывание эффективности при изменении масштаба производства, имеет регулярную (строго выпуклую кверху поверхность эффективного выпуска.

При использовании неоклассических производственных функций чаще всего рассматривается случай постоянства эффективности при изменении масштаба производства. Однако мы до сих пор еще не установили условия, обеспечивающие в этом случае существование регулярной поверхности эффективного выпуска. Специальные дополнительные условия, гарантирующие строгую выпуклость кверху поверхности эффективного выпуска, будут приведены в следующем параграфе.

В случае, когда имеет место возрастание эффективности ($\rho > 1$), мало что может быть сказано о поверхности эффективного выпуска. Описание этой поверхности обычно достаточно сложно, хотя в некоторых областях эта поверхность может быть регулярной.

8.6. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ

В этом параграфе будут исследованы дополнительные предположения, которые вводятся в случае постоянства эффективности при изменении масштаба производства, чтобы гарантировать строгую выпуклость кверху поверхности эффективного выпуска.

В предыдущем параграфе показано, что при постоянстве эффективности матрицы Гессе однородных квазивогнутых производственных функций отрицательно полуопределены, и выражение $y'Fy$ обращается в нуль только при $y = \lambda v$, где v — точка, в которой оценивается матрица Гессе.

Таким образом, на основании утверждения (8.4.3) квадратичная форма, соответствующая поверхности эффективного выпуска, отрицательно полуопределена или отрицательно определена. Если можно исключить случай $y'Fy = 0$ для любого способа приравнивания компонент y^j_r нулю при этом ограничении, то поверхность эффективного выпуска будет строго выпуклой кверху.

Далее, существуют два способа положить y^j_r равным нулю.

Пусть $y^j_r = 0$, а $y^j_s \neq 0$. Тогда из свойств F^j следует, что $(y^j)'F^j y^j < 0$. Если положить $y^j_r = 0$ для всех r, то матрица Гессе F^j не будет оказывать влияния на общий результат. Это может быть сделано самое большее для $n - 2$ отраслей (вследствие ограничений), и для этих отраслей должно выполняться условие II, § 8.4.

Таким образом, осталось найти условия, при которых будет выполняться условие II, т. е. взвешенная сумма матриц Гессе любых двух производственных функций $p_j F^j + p_k F^k$

будет отрицательно определенной. Поскольку F^j и F^k отрицательно полуопределены, необходимо показать, что $u' (p_j F^j + p_k F^k) u \neq 0$ для любого u. Тогда $u' (p_j F^j + p_k F^k) u < 0$ для всех u.

Так как $u'F^j u$, $u'F^k u \leqq 0$ для всех u, то $u' (p_j F^j + p_k F^k) \times u = 0$ только, если $u'F^j u = u'F^k u = 0$. Цены произвольные, но неотрицательные.

При обсуждении случая постоянства эффективности в § 8.5 было выяснено, что $u'F^j u = 0$ только, если $u = v$, т. е. если распределение факторов (пропорции) соответствуют точке, в которой оценивается матрица Гессе.

Таким образом, необходимое условие состоит в том, что $v^j \neq \gamma v^k$ для точки на поверхности эффективного выпуска с компонентами x_j и x_k.

Из условий первого порядка (8.4.1) известно, что если x_j и x_k — компоненты точки на поверхности эффективного выпуска, то

$$p_j f_r^j = \mu_r = p_k f_r^k, \quad r = 1, \ldots, m,$$

где μ_r — условная оценка r-го фактора.

Если две производственные функции таковы, что $v^j = \gamma v^k$ для $f_r^j (v^j) = \beta f_r^k (v^k)$, $r = 1, \ldots, m$, т. е. если при пропорциональности предельных векторов производительности векторы затрат пропорциональны (или, что то же самое, когда обе функции оптимизируются при одинаковых условных оценках), то говорят, что эти производственные функции имеют один и тот же *относительный коэффициент интенсивности*. Таким образом, приведенное выше условие удовлетворяется, если ни одна пара отраслей j и k не имеет одинаковый относительный коэффициент интенсивности. Итак, в случае постоянства эффективности имеет место следующее утверждение относительно поверхности эффективного выпуска.

Для того чтобы поверхность эффективного выпуска была регулярной (строго выпуклой) в экономической системе, состоящей из отраслей с постоянными эффективностями при изменении масштаба производства, достаточно, чтобы: а) *каждая производственная функция была квазивогнута* и б) *не существовало двух производственных функций с одинаковым относительным коэффициентом интенсивности.*

Приведенная формулировка представляет интерес для теории международной торговли, где она является крайне необходимой в задачах выравнивания цены фактора.

8.7. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА *)

При использовании теоретико-множественных методов можно исследовать теорию производства на более общем уровне, чем это делалось в § 8.4—8.6. Применение этих методов позволяет значительно проще доказать слабые результаты, причем доказательства проводятся на более общем уровне, чем при использовании обычного аппарата. Сильные результаты, подобные условиям строгой выпуклости поверхности эффективного выпуска в случае постоянства эффективности при изменении масштаба производства, менее приспособлены к анализу и изложению, использующим методы настоящего параграфа.

Будем исходить из картины производства, которая получается при анализе производственных процессов. В отличие от неоклассической теории производства, так же как это делалось при анализе производственных процессов, мы не будем разделять производственные ингредиенты на продукты и факторы. Однако будем предполагать, что некоторые ингредиенты могут либо только затрачиваться, либо только выпускаться.

Обозначим n-мерный вектор продуктов через y. Компонента y_i положительна, если i-й продукт выпускается, и отрицательна, если он затрачивается. Здесь мы поменяли обозначения по сравнению с гл. 7. Там вектор продуктов обозначался через x, а вектор уровней производства — через y. В этом параграфе понятие уровней производства не используется. В следующей главе будем использовать вектор выпуска y и вектор спроса x.

При заданной технологии произвольный вектор y может быть допустимым или недопустимым (эквивалентно: достижимым или недостижимым). Вектор y является *допустимым*, если продукты в количествах, определяемых положительными компонентами вектора y, могут быть действительно произведены при затрате продуктов, определяемых отрицательными компонентами y.

Множество Y допустимых векторов y называется *множеством производственных возможностей*, или *множеством выпуска* (аналогично множеству производственных возможностей в модели анализа производственных процессов).

*) Этот параграф построен на материале гл. 7. Знание этого параграфа необходимо при изучении гл. 9.

Допустимый вектор y (т. е. $y \in Y$) называется *выпускаемой продукцией*, или *предложением*. Множество производственных возможностей задает все технологически допустимые комбинации «затраты — выпуск». Вектор выпускаемой продукции y аналогичен введенному ранее вектору, характеризующему производственный процесс, со следующими, однако, отличиями:

а) не предполагается, что если y — допустимый вектор, то и $ky \in Y$;

б) если y^j и y^k допустимые, не предполагается, что и $y^j + y^k \in Y$.

Соотношения а) и б) не позволяют описать производство, задавая только пропорции «затраты — выпуск» на единичном уровне и уровень производства. Кроме того, нельзя предполагать, что линейная комбинация векторов выпускаемой продукции дает допустимый вектор.

В линейном случае задавалось конечное число базисных процессов, и множество производственных возможностей «заполнялось» всеми их выпуклыми комбинациями. Здесь нельзя поступать таким образом: каждый $y \in Y$ должен быть задан, т. е. должно быть задано бесконечное число векторов y. Задав, например, неоклассическую производственную функцию $x_j = f^j(v)$, мы получили бы для каждого v различные векторы выпускаемой продукции $y = (0, 0, \ldots, f^j(v), \ldots, 0, v_1^j, \ldots, v_m^j)$. Практически обычно предполагается, что y может быть задан при помощи конечного числа функциональных соотношений, т. е. при помощи обобщенных производственных функций.

При анализе предполагается, что множество Y замкнуто. Кроме того, будем полагать, что множество Y удовлетворяет предположениям, приведенным в § 7.2 для линейного случая, а именно:

I. $Y \cap \Omega = 0$ (*невозможно произвести что-либо без затрат, однако можно ничего не производить, ничего не затрачивая*);

II. $Y \cap (-Y) = 0$ (*необратимость*);

III. *$y' \in Y$, если $y \in Y$ и $y' \leqq y$ (возможно убыточное производство)*.

Обычно предполагается также, что до тех пор, пока взаимодействие между процессами производства не является существенным фактором, выполняется

IV. $y^i + y^j \in Y$, если $y^i, y^j \in Y$ (*аддитивность*).

Изменение эффективности при изменении масштаба производства в общем случае может быть определено следующим образом.

Множество выпуска (множество производственных возможностей) Y указывает на слабо убывающие, постоянные или слабо возрастающие эффективности при изменении масштаба производства в зависимости от того, какое из ниже приведенных утверждений выполняется для неотрицательного t и для всех $y \in Y$:

$ty \in Y$ для $t < 1$, но $ty' \notin Y$ для некоторого $y' \in Y$ и *$t > 1$ (слабо убывающая эффективность);*

$ty \in Y$ для всех t (постоянная эффективность);

$ty \in Y$ для $t > 1$, но $ty' \notin Y$ для некоторого $y' \in Y$ и *$t < 1$ (слабо возрастающая эффективность).*

Теперь можно доказать утверждение, которое является более слабым, но более общим вариантом соотношения между изменением эффективности при изменении масштаба производства и выпуклостью поверхности эффективного выпуска, введенной в § 8.5, 8.6.

Если множество выпуска является аддитивным и указывает либо на слабое убывание, либо на постоянство эффективности при изменении масштаба производства, то оно выпукло.

Пусть $y^i \in Y$, $y^j \in Y$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $ty^i \in Y$ и $(1-t)\, y^j \in Y$ (из определения изменения эффективности при изменении масштаба производства или предположения I, если либо t, либо $1-t$ равны 0) и $ty^i + (1-t)\, y^j \in Y$ (аддитивность). Это и доказывает выпуклость множества Y.

При обсуждении общего равновесия в гл. 9 мы увидим, что выпуклость множества Y необходима, чтобы гарантировать существование равновесия в конкурентной экономике. Отсутствие аддитивности (взаимодействие между производственными процессами) и возрастание эффективности при изменении масштаба производства противоречат выпуклости множества выпуска.

Заметим, что доказанная ранее выпуклость является нестрогой выпуклостью *) (т. е. множество Y может иметь плоские границы).

---

*) Для получения условий на строгую выпуклость нельзя избежать детального неоклассического анализа, аналогичного анализу, приведенному в § 8.4—8.6, особенно в случае постоянства эффективности.

В некоторых случаях представляет интерес изучение Y_j — множества выпуска фирмы или отрасли, а не всей экономики. Обычно предполагается, что Y_j обладает свойствами множества Y, однако считается, что Y может иметь более сильные свойства, чем Y_j. Множество Y выпукло, если выпукло каждое Y_j. Однако множество Y может оставаться выпуклым, даже если некоторые Y_j не выпуклы. Например, можно иметь возрастание эффективности при производстве одного продукта, которое каким-то образом перекрывается убыванием эффективности при производстве других продуктов.

Представление неоклассической производственной функции в теоретико-множественных терминах требует явных и неявных предположений. Например, классическую производственную функцию Кобба — Дугласа

$$X = cL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

можно представить множеством выпуска

$$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid y_1 \leqslant c(-y_2)^{\alpha}(-y_3)^{1-\alpha};\ y_1,\ -y_2,\ -y_3 \geqslant 0\},$$

где $y_1 = X$, $y_2 = -L$, $y_3 = -K$. Множество Y формально удовлетворяет предположениям I, II и III.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для более глубокого анализа обобщенной теории производства (так же как и теории потребления) необходимо познакомиться с работой Дебре [1]. Примеры неоклассического анализа можно найти у Самуэльсона [1] или в его же сборнике статей [2].

Неоклассический анализ теории торговли представлен также у Самуэльсона [2] и Чипмэна [2].

9. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ

Эта глава требует знакомства со свойствами точечно-множественных отображений (дополнение Д9) и с содержанием предыдущих глав.

9.1. РАВНОВЕСИЕ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ *)

Понятие экономического равновесия, которое является содержательным, а не просто формальным, не вызывает особых трудностей при анализе полностью централизованной экономики. Если производство полностью управляемо и результирующий выпуск немедленно распределяется между потребителями без вмешательства какого-либо рынка и децентрализованных решений, то трудности возникают скорее в проблемах допустимости и оптимальности, чем в проблеме равновесия.

При анализе экономики с любой степенью децентрализации, особенно экономической системы, в которой обмен происходит через рынок, возникает вопрос — всегда ли для произвольных начальных условий существует подходящим образом определенное равновесие. Хотя проблема равновесия исследуется здесь для полностью децентрализованной конкурентной экономики, она представляет интерес также для частично централизованной экономики.

Понятие равновесия в децентрализованной экономике содержит два типа отношений между решениями. Во-первых, равновесие предполагает совместимость решений, принятых различными лицами. Во-вторых, равновесие должно сохранять смысл, который придают этому понятию при изучении устойчивости динамических систем.

Анализируя поведение децентрализованной экономики, мы считаем заданными правила, обязательные для принимающих решение, и предполагаем, что каждый из них действует в соответствии с подходящим правилом. В рассмот-

*) Более подробно о рыночном равновесии и особенно о равновесии конкурентных рынков см. Дорфман, Самуэльсон и Солоу (гл. 13) и более современные работы Дебре [1] и Карлин [1]. Другие ссылки приводятся в тексте главы.

ренных здесь моделях мы предполагаем, что не существует прямой связи между лицами, принимающими решение, так что результаты их индивидуальных действий при объективных и универсальных параметрах могут складываться. Основные проблемы равновесия связаны, таким образом, с рынком. При заданном векторе цен вычисляется суммарный спрос потребителей. Из полученной таким образом величины вычитается сумма текущего выпуска и наличного запаса предлагаемых продуктов. Результат определяет *избыточный спрос* на каждом рынке. В экономической теории анализ избыточного спроса представляется более удобным, чем обсуждение спроса и предложения каждого в отдельности.

Мы предполагаем, что потребление определяется только текущим производством, так что совместимость в состоянии равновесия может быть обеспечена лишь в том случае, если избыточный спрос в состоянии равновесия не будет положительным. С другой стороны, если избыточный спрос отрицателен при положительной цене (т. е. имеет место избыточное предложение), естественно принять предположение, что этот факт стимулирует понижение цены до тех пор, пока либо избыточный спрос, либо цена не обратится в нуль.

Пусть z_i — избыточный спрос на i-й продукт. Определим равновесие на i-м рынке системой соотношений

$$p_i z_i = 0, \quad z_i \leqq 0, \quad p_i \geqq 0.$$

Это определение подразумевает, что либо избыточный спрос нулевой, либо цена равна нулю. То есть любой продукт с избыточным предложением (отрицательный избыточный спрос) является свободным. Приведенное определение может быть непосредственно обобщено на все рынки. Пусть p, z — векторы цен и избыточного спроса. Будем говорить, что все рынки находятся в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда

$$pz = 0, \quad z \leqq 0, \quad p \geqq 0.$$

Будем считать, что экономика находится в состоянии равновесия, если условия рыночного равновесия удовлетворяются и все лица, принимающие решения, действуют в соответствии с подходящими правилами. (Такие правила для конкурентной экономики выбираются так, чтобы максимизировать полезность или доход при заданных ценах.)

В некоторых моделях (в том числе и в модели Эрроу — Дебре) условия рыночного равновесия сохраняются в классической форме $z = 0$. Вначале доказывается существование точки, удовлетворяющей определению равновесия, содержащему неравенства. Предположение о «свободном перераспределении» может быть использовано для того, чтобы аргументировать возможность (и естественность) перехода от $z_i < 0$ к $z_i = 0$. В экономическом анализе представляетс ι более естественным придерживаться определения равновесия, содержащего неравенства. Такое определение является необходимым, если не предполагается свободного перераспределения. Загрязненный воздух, очевидно, является продуктом отрицательного избыточного спроса и отсутствия свободного перераспределения.

Первоначальное изучение Вальрасом проблем общего равновесия было ограничено условием равновесия $z = 0$ и включало неявные ограничения на неотрицательность входящих в соотношение векторов спроса и предложения. Хотя Вальд изучал проблему общего равновесия еще в 1935 г. *), анализ общего равновесия в экономической теории был ограничен вплоть до пятидесятых годов оценкой и сравнением числа уравнений и неизвестных.

В этой главе мы исследуем существование равновесия в двух моделях рыночной экономики. Первая и простейшая модель — это модель Вальраса — Вальда. Модель предполагает простые условия производства и не рассматривает распределения доходов. Кроме того, в модели предполагается существование простых (удобных для анализа) агрегированных (совокупных) функций спроса. Вторая модель представляет собой слегка упрощенный вариант модели Эрроу — Дебре — Мак-Кензи, которая является естественной моделью экономики с полной конкуренцией.

Прежде чем перейти к исследованию этих моделей, рассмотрим некоторые различия между строгим подходом к проблеме равновесия и методом подсчета и сравнения числа уравнений и неизвестных. Кроме того, приведем некоторый математический аппарат, необходимый для последующего анализа.

Существование равновесия в экономике с неполной конкуренцией — до сих пор нерешенная задача из-за ее чрезмерной сложности**). Понятия и терминология, введенные

*) Английский перевод был опубликован в 1951 г. (W a l d).

**) Теоретико-игровые понятия позволили получить некоторые результаты для универсальной олигополии. См. Д е б р е и С к а р ф.

при анализе большинства традиционных моделей фирмы в условиях неполной конкуренции (в том числе и моделей экономики с монополиями), не могут быть приспособлены к структуре общего равновесия. Эти понятия и термины должны быть переосмыслены и переопределены. Модели с неполной конкуренцией в настоящей главе рассматриваться не будут.

9.2. ЗАКОН ВАЛЬРАСА И БЮДЖЕТНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

При методе «подсчета уравнений» компоненты спроса и предложения объединяются в n соотношений избыточного спроса. Каждое из соотношений зависит от всех n цен. Условия равновесия при этом имеют вид:

$$z_i = F^i(p) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь n соотношений и n переменных. С самого начала необходимо подчеркнуть, что выводы, основанные на таком подсчете, некорректны, поскольку функции, входящие в соотношения — однородные нулевой степени. Полагая, что F^i — однозначные функции (а не точечно-множественные отображения) и однородные, можно записать $F^i = f^i(r)$, где r есть $(n - 1)$-мерный вектор $(p_1/p_n, \ldots, p_{n-1}/p_n)$. Теперь имеем n соотношений и $(n - 1)$ независимых переменных; p_n — не определена. Таким образом, для того чтобы обосновать выводы, основанные на подсчете числа уравнений и неизвестных, необходимо показать, что только $(n - 1)$ соотношение из n должны быть независимыми.

Вальрас установил такую зависимость через бюджетные ограничения.

В экономике чистого обмена потребитель получает доход от продажи продуктов и полностью тратит свой доход на приобретение продуктов. Очевидно, что стоимость купленного должна равняться стоимости проданного для всех участников обмена. Поэтому для экономики в целом выполняется соотношение $pz = 0$. Это соотношение справедливо и для экономики, учитывающей производство, при условии, что весь доход производственного сектора распределяется между потребителями.

Соотношение $pz = 0$, конечно, является одним из условий равновесия.

Пусть соотношение $pz = 0$ справедливо всегда, даже в случае, когда не установлено общее рыночное равновесие. В таком случае соотношение $pz = 0$ называется законом Вальраса.

Смысл закона Вальраса заключается в том, что не все функции избыточного спроса $z_i = F^i(p)$ являются независимыми: всегда можно выразить избыточный спрос на какой-либо продукт, скажем z_n, через другие. Этот подтекст закона породил много бесполезных дискуссий, особенно в теории денег.

Закон Вальраса не является необходимым для того, чтобы можно было выразить z в терминах p, исключая точку равновесия, в которой условие равновесия дает $pz = 0$. Метод подсчета числа уравнений, конечно, не является достаточным, чтобы гарантировать существование равновесия при отсутствии ограничений на неотрицательность спроса и предложения.

Из закона Вальраса следуют важные выводы относительно поведения экономической системы в окрестности равновесия. Из него следует, что даже в тех случаях, когда рынки не находятся в состоянии равновесия, каждая экономическая единица действует таким образом, словно существующие цены совпадают с равновесными, и планирует покупки и продажи сбалансированно, даже если не все покупки и продажи могут быть произведены. Как мы увидим в гл. 12, закон Вальраса действует как закон сохранения и стремится стабилизировать рыночное поведение.

В анализе равновесия, приведенном в этой главе, не будем подсчитывать число уравнений и неизвестных и интересоваться, зависимы или нет функции избыточного спроса. Мы здесь не предполагаем, что избыточный спрос представляется однозначной функцией, так что вопрос о зависимости функций избыточного спроса теряет смысл.

Мы будем пользоваться бюджетным ограничением (в слабой форме) при установлении существования равновесия. Однако применение этого ограничения здесь коренным образом отличается от его использования в методе подсчета уравнений.

При доказательстве существования равновесия мы поступим следующим образом. Возьмем произвольное множество цен, затем рассмотрим множество векторов избыточного спроса, которые соответствовали бы поведению производителя и потребителя при этих ценах, как если бы они были равновесными. Способ, по которому мы строим множество векторов избыточного спроса, искусственен и выбран по формальным математическим соображениям. Способ не претендует на достаточную общность, позволяющую аналогичным образом анализировать любой процесс управления. Подобное построение, проведенное для всех возможных систем цен, позволяет получить отображение множества цен в множество векторов избыточного спроса. Это отображение является точечно-множественным. Чтобы показать, что по крайней мере один вектор цен отобразится в множество векторов избыточного спроса, среди которых будет вектор, удовлетворяющий условию рыночного равновесия, используется теорема о неподвижной точке. Поскольку отображение выбрано так, что условия равновесия для каждого лица, принимающего решение, всегда выполняются, доказывается существование по крайней мере одной точки равновесия всей экономики.

Рассмотрение избыточного спроса, удовлетворяющего бюджетному ограничению во всех системах цен, отнюдь не предполагает, что избыточный спрос фактически удовлетворяет закону Вальраса. Это полностью соответствует применяемому здесь методу, в котором фактическое поведение каждого индивидуума вне равновесия не удовлетворяет закону Вальраса. Обычно мы строим искусственное отображение, основанное на бюджетном ограничении, и доказываем существование равновесия; хотя действительные динамические процессы экономики могут не приводить к теоретически достижимой точке равновесия.

Наконец, следует подчеркнуть, что мы требуем выполнения только слабого бюджетного ограничения $pz \leqq 0$, в то время как закон Вальраса требует равенства, если зависимость функций избыточного спроса будет установлена.

9.3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗБЫТОЧНОМ СПРОСЕ *)

Доказательства существования равновесия, которые будут приведены в последующих параграфах, потребуют топологических методов аргументации. Для анализа обеих моделей, приведенных ниже, может быть использована одна

*) Аналогичная теорема была доказана несколько по-другому в работе Гейла [3]. Изложение теоремы также приведено у Дебре [1] и у Карлина [1].

Доказательство основано на теореме Какутани о неподвижной точке (§ Д9.5).

и та же схема рассуждений. Поэтому целесообразно собрать воедино общую часть аргументации и привести ее здесь. Тогда в дальнейшем можно будет обсуждать специфические свойства моделей.

У некоторых читателей может возникнуть желание принять эту теорему без доказательства и сразу же перейти к следующему параграфу. Хотя эта теорема математическая и нет нужды давать ей объяснение, мы используем ее только в связи с избыточным спросом. Этим и объясняется принятое здесь название теоремы.

Теорема об избыточном спросе. *Пусть каждому полуположительному вектору цен p поставлено в соответствие множество векторов избыточного спроса $Z(p)$. Без ограничения общности можно считать, что вектор p нормализован так, что $\Sigma p_j = 1$. Будем предполагать, что множества $Z(p)$ удовлетворяют некоторым формальным требованиям и отображение $p \to Z(p)$ обладает подходящими свойствами. Требования к $Z(p)$ и свойства отображения $p \to Z(p)$ будут уточнены ниже. Пусть, кроме того, для всех $z \in Z(p)$ выполняется слабое бюджетное ограничение $pz \leqq 0$.*

Тогда существует такой вектор цен p^*, что для некоторого $z \in Z(p^*)$ $z \leqq 0$.

Поскольку равенство $pz = 0$ включается в соотношение $pz \leqq 0$, то теорема характеризует существование равновесного вектора избыточного спроса, если выполняются условия теоремы. Оба доказательства существования равновесия, приведенные в этой главе, исходят из того, что условия теоремы об избыточном спросе могут выполняться, если индивидуумы действуют в соответствии с подходящими правилами.

Формально к множеству $Z(p)$ и отображению $p \to Z(p)$ предъявляются следующие требования.

Множество $Z(p)$ непусто и выпукло для всех p. Отображение $p \to Z(p)$ полунепрерывно сверху. Множества $Z(p)$ равностепенно ограничены.

Общий смысл теоремы может быть проиллюстрирован на примере с двумя рынками. Для всех p выполняется соотношение

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) \leqq 0.$$

Очевидно, что теорема справедлива, если z_1 и z_2 всюду неположительны. Предположим теперь, что $z_1(p) > 0$ для некоторого p ($p_1 \neq 0$). Тогда обязательно $z_2(p) < 0$. Будем менять цены так, чтобы $z_1(p)$ оставалось положительным и отношение p_1/p_2 неограниченно возрастало бы. В силу того, что по условию теоремы $Z(p)$ ограничено, соотношение $p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) \leqq 0$ может сохраняться для достаточно большого отношения p_1/p_2, если только $z_1(p)$ станет неположительным. Вопрос состоит в том, может ли $z_2(p)$ стать положительным. Это, естественно, возможно, но не раньше, чем $z_1(p)$ станет отрицательным. Таким образом, должно быть некоторое отношение p_1/p_2, для которого $z_1(p)$ и $z_2(p)$ будут неположительны, т. е. должен существовать нормализованный вектор цен $[p_1, p_2]$, для которого $z_1(p)$, $z_2(p)$ неположительны.

Формальное доказательство этой теоремы существенно труднее. Мы поступим следующим образом. Обозначим через P множество полуположительных нормализованных векторов цен. Это, очевидно, выпуклый компакт. Обозначим через Z множество всех $z(p)$ для всех $p \in P$ (Z — объединение множеств $Z(p)$). Если Z не является выпуклым множеством, заменим его любым выпуклым компактом Z', содержащим Z.

Определим множество $S(z)$ следующим образом:

$$S(z) = \{p \mid pz = \max_{z \in Z',\ p \in P} pz\}.$$

Выберем произвольный вектор избыточного спроса из множества всех векторов избыточного спроса при некоторых ценах и затем найдем вектор цен, при котором стоимость этого избыточного спроса максимальна. Важно заметить, что этот вектор цен не обязательно является именно тем p, который связан с z при помощи отображения $p \to Z(p)$.

Очевидно, $z \to S(z)$ есть отображение Z' в некоторое подмножество P. Поскольку Z' — выпуклое множество, то это отображение полунепрерывно сверху (см. свойства непрерывности оптимальных решений, § Д9.4). Множество $S(z)$ выпукло, так как оно является пересечением гиперплоскости $\{y \mid yz = \max pz\}$ и множества P.

Рассмотрим множество $P \times Z'$, т. е. множество пар, в каждой из которых первый элемент — нормализованный вектор цен, а второй — вектор избыточного спроса. Возьмем точку p, z из множества $P \times Z'$. Отображение $Z(p)$ ставит в соответствие вектору p множество векторов избыточного спроса. Отображение $S(z)$ приводит в соответствие вектору z множество цен. Другими словами, отображение

$p, z \to Z(p)$, $S(z)$ переводит точку из $P \times Z'$ в подмножество $P \times Z'$.

Уже показано, что отображение $z \to S(z)$ полунепрерывно сверху. По условию теоремы предполагается, что и $p \to Z(p)$ обладает тем же свойством. Таким образом, сложное отображение также полунепрерывно сверху. Показано, кроме того, что $S(z)$ — выпуклое множество. $Z(p)$ выпукло по предположению. Следовательно, $S(z) \times Z(p)$ выпукло.

Таким образом, имеем полунепрерывное сверху отображение (p, z) из $P \times Z'$ в выпуклое подмножество $Z(p)\,S(z)$ множества $P \times Z'$. Условия теоремы Какутани о неподвижной точке (§ Д9.5) выполнены. Теорема утверждает, что при таком отображении существует неподвижная точка p^*, z^*. Другими словами существует $p^* \in P$ и $z^* \in Z'$, для которых $p^* \in S(z^*)$ и $z^* \in Z(p^*)$.

Из построения $S(z)$ следует, что, если $p^* \in S(z^*)$, то для всех $p \in P$

$$pz^* \leqq p^*z^*.$$

Используя слабое бюджетное ограничение и то, что $z^* \in Z(p^*)$, получаем

$$p^*z^* \leqq 0.$$

Таким образом,

$$pz^* \leqq 0 \quad \text{для всех} \quad p \in P.$$

Очевидно, последнее неравенство выполнимо для всех $p \in P$ только в том случае, если $z^* \leqq 0$.

Это и доказывает теорему.

Заметим, что сильное бюджетное ограничение не усиливает теорему.

9.4. МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА — ВАЛЬДА

Это упрощенная модель конкурентной экономики, основанная на первоначальной линейной модели производства Вальраса. Модель аналогична той модели, на которой Вальд впервые изучал существование равновесия, хотя обратные функции спроса Вальда (цены в функции объемов продуктов) не используются *).

*) Первоначальную модель можно найти в работах В а л ь д а, затем у К у н а [2].

Эта модель почти полностью идентична модели, изучаемой Дорфманом, Самуэльсоном и Солоу *). Как модель конкурентной экономики эту схему быстро вытеснила модель Эрроу — Дебре — Мак-Кензи, которая рассматривается в следующем параграфе. Приведенная здесь модель проще модели Эрроу — Дебре — Мак-Кензи. Поэтому и доказательство существования равновесия здесь существенно легче (хотя упрощения оказываются меньшими чем можно было бы ожидать). Анализ этой более простой модели проводится, в основном, на эвристической основе с использованием свойства единственности, которое будет получено в дальнейшем.

Определим модель следующим образом.

Ограничения на ресурсы и технологию. Рассмотрим линейную модель производства с фиксированными технологическими коэффициентами, не имеющую совместных выпусков. Пусть, кроме того, существует только один способ производства каждого продукта. Предполагается, что в системе отсутствуют промежуточные продукты, так что производственные факторы и выпускаемые продукты разделены. Технология полностью определяется матрицей затрат A порядка $m \times n$ (m — число факторов, n — продуктов).

Предполагается, что выпуск каждого продукта требует затрат всех факторов ($A \gg 0$). Это ограничение может быть сделано менее строгим, но для упрощения рассуждений мы все же сохраним это допущение.

Суммарное предложение ресурсов в рассматриваемой экономической системе фиксировано. Поэтому, если y обозначает вектор выпуска, а v^0 — фиксированный вектор ресурсов, то можно сделать вывод, что ресурсы и технология подчинены производственному ограничению

$$Ay \leqq v^0, \quad y \geqq 0. \tag{1}$$

Для последующего анализа не требуется никакая специальная теория поведения производителя.

Потребители. Предполагается, что поведение потребителей полностью определяется при помощи агрегированных функций спроса следующего вида:

$$x_j = \Phi^j(p, w), \quad x_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где p — вектор цен на продукты, а w — на факторы.

*) Дорфман, Самуэльсон и Солоу (гл. 13).

Предполагается, что агрегированные функции спроса непрерывны, однозначны и однородны степени нуль по векторам (p, w).

Потребитель получает доход в результате продажи факторов, которые являются его собственностью. Предполагается, что все имеющиеся в наличии факторы принадлежат потребителям. Кроме того, потребитель тратит весь свой доход (ненасыщение). Поэтому имеет место бюджетное ограничение

$$px = wv^0. \tag{3}$$

Рыночное равновесие. Существует два вида рынков: рынки продуктов и рынки факторов. Определим вектор избыточного спроса на продукты $z = x - y$ и вектор избыточного спроса на факторы $u = Ay - v^0$. Условия рыночного равновесия запишутся в виде:

$$pz = 0, \quad p \geqq 0, \quad z \leqq 0; \tag{4}$$

$$wu = 0, \quad w \geqq 0. \tag{5}$$

(Условие $u \leqq 0$ уже обеспечено соотношением (1)).

Равновесие экономической системы задается векторами p^*, w^*, y^*, x^*, z^*, u^*, которые удовлетворяют соотношениям (1)—(5).

Для доказательства существования равновесия необходимо убедиться в справедливости следующего утверждения.

Если p^* — равновесный вектор цен на продукты, тогда равновесный вектор выпуска y^* и равновесный вектор цен на факторы w^* являются оптимальными решениями задачи

$$\max p^*y: \quad Ay \leqq v^0, \quad y \geqq 0,$$

и двойственной к ней C

$$\min w^*v^0: \quad wA \geqq p^*, \quad w \geqq 0.$$

Заметим, что из (1) следует, что y^* — допустимый вектор прямой задачи. Однако w^*, вообще говоря, не является допустимым вектором двойственной задачи. Тем не менее, так как $A \gg 0$, при достаточно большом λ вектор λw^* оказывается допустимым вектором двойственной задачи.

Поскольку y^* и λw^* допустимы соответственно в прямой и двойственной задачах, то по основной лемме линейного программирования имеем

$$p^*y^* \leqq \lambda w^* A y^* \leqq \lambda w^* v^0. \tag{9.4.1}$$

Но из условия рыночного равновесия (4)

$$p^*z^* = 0,$$

т. е.

$$p^*x^* = p^*y^*.$$

Из бюджетного ограничения (3) имеем

$$p^*x^* = w^*v^0.$$

Следовательно, $p^*y^* = w^*v^0$ и $\lambda = 1$ в (9.4.1). Таким образом, w^* является оптимальным решением двойственной задачи (теорема двойственности).

Теперь мы знаем, что, если p^* — равновесный вектор цен, то равновесные значения y^* и w^* являются оптимальными в соответствующих задачах. Таким образом, при исследовании равновесных векторов можно ограничиться оптимальными векторами задачи.

Кроме того, известно, что если w^* — оптимальный вектор, соответствующий p^*, то kw^* — оптимальный вектор, соответствующий kp^*. Поскольку kp^* задает вектор (kp^*, kw^*) и все соотношения равновесия однородны степени нуль, то можно нормализовать вектор p так, чтобы $\Sigma p_j = 1$. Обозначим

$$P = \{p \mid p \geqq 0, \quad \sum p_j = 1\}.$$

Выберем некоторый $p \in P$. Рассмотренные задачи линейного программирования определяют при данном p решения $y(p)$ и $w(p)$. Решения задач могут не быть единственными. Поэтому будем для данного p рассматривать множества оптимальных векторов $Y(p)$ и $W(p)$. В соответствии с теоремой двойственности имеем $py = wv^0$ для всех $y \in Y(p)$ и всех $w \in W(p)$. Запишем это соотношение символически в виде

$$p \cdot Y(p) = W(p) \cdot v^0$$

и будем всюду использовать эквивалентные обозначения для аналогичных формулировок.

Поскольку p определяет $W(p)$, а x — функция только от p и w, то p задает некоторое $x(p)$. Хотя функция спроса однозначна, необходимо учитывать, что $W(p)$ может для каждого p принимать множество значений. Таким образом, p порождает множество $W(p)$, а оно, в свою очередь,—

множество $x(p)$. Обозначим полученное таким образом множество через $X(p)$.

Образуем теперь множество векторов избыточного спроса $Z(p)$, соответствующее вектору p:

$$Z(p) = X(p) - Y(p).$$

Множество $Z(p)$ состоит из всех векторов, которые получаются, если из любого $x(p) \in X(p)$ вычесть любой $y(p)$ из $Y(p)$.

Бюджетное ограничение выполняется для всех $x \in X$ и $p \cdot Y(p) = W(p) \cdot v^0$. Поэтому

$$\begin{aligned} p \cdot Z(p) &= p \cdot X(p) - p \cdot Y(p) = \\ &= W(p) \cdot v^0 - W(p) \cdot v^0 = 0. \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

Отображения $p \to Y(p)$, $p \to W(p)$ полунепрерывны сверху (свойства непрерывности оптимальных решений, § Д9.4), а функции $w(p) \to x_j(p)$ непрерывны (как функции спроса). Поэтому отображение $p \to X(p)$ полунепрерывно сверху. Отсюда следует, что отображение $p \to Z(p)$ полунепрерывно сверху. Кроме того, $p \cdot Z(p) = 0$. Отсюда выпуклость $Z(p)$.

Таким образом, p и $Z(p)$ удовлетворяют всем условиям теоремы об избыточном спросе. Из этой теоремы следует, что существует вектор $p^* \in P$, для которого можно найти $z^* \in Z(p^*)$, такой, что $z^* \leqq 0$.

Возьмем этот вектор p^* и соответствующий ему z^*. Решим для выбранного вектора p^* задачу линейного программирования. Используя функцию спроса, получим множества $W(p^*)$, $Y(p^*)$, $X(p^*)$. Выберем из этих множеств точки w^*, y^*, x^*, которые определяют вектор z^*. Тогда p^*, z^*, w^*, y^*, x^* обеспечивают равновесие в системе.

Чтобы показать это, заметим, что эти векторы обладают следующими свойствами:

1) p^*, w^*, y^* удовлетворяют ограничениям задач линейного программирования;

2) вектор x^* определяется векторами p^* и w^*;

3) эти векторы были построены в процессе решения задачи линейного программирования;

4) как было показано,

$$p^* z^* = 0, \quad \text{а} \ z^* \leqq 0.$$

Последнее свойство (5) рассматриваемых векторов обусловлено теоремой равновесия линейного программирования, согласно которой

$$w^*u^* = w^*(Ay^* - v^0) = 0,$$

поскольку y^*, w^* — оптимальные векторы в прямой и двойственной задачах.

Это и завершает доказательство.

Усилим теперь полученные результаты. Мы предположили, что $A \gg 0$. Отсюда следует, что, если $p_j^* = 0$, то $w^*A^j - p_j^* > 0$, так что по теореме равновесия линейного программирования $y_j^* = 0$. Но $x_j^* \geqq 0$, а $z_j^* \leqq 0$, так что, если $p_j^* = 0$, то $z_j^* = 0$. Кроме того, $z_j^* = 0$, если $p_j^* > 0$. Поэтому $z^* = 0$, т. е. *в системе нет свободных продуктов.*

Однако в системе могут быть свободные факторы. В случае, когда число факторов превышает число продуктов, можно ожидать, что среди производственных ограничений $Ay^* \leqq v^0$ не все удовлетворяются как равенства (если только запасы факторов случайно не окажутся подходящими). Из теоремы равновесия линейного программирования следует, что избыточные факторы имеют нулевую цену.

Сделаем следующее дополнительное предположение:

Агрегированные функции спроса удовлетворяют аксиоме выявленного предпочтения: если $p^{**}x^{**} \geqq p^{**}x^*$, то $p^*x^{**} > p^*x^*$ для любых двух векторов цен p^* и p^{**} и соответствующих векторов спроса.

Пусть p^{**}, x^{**} и p^*, x^* характеризуют два состояния равновесия. Из сказанного выше известно, что $z^* = z^{**} = 0$, так что $x^{**} = y^{**}$ и $x^* = y^*$. Поскольку ограничения в задаче линейного программирования не меняются, оба вектора y допустимы в обеих задачах, определяющих y^* и y^{**}. Поскольку y^* — допустимый вектор в задаче $\max p^{**}y$ при условиях $Ay \leqq v^0$, $y \geqq 0$, то имеем:

$p^{**}y^* \leqq p^{**}y^{**}$ (основная лемма линейного программирования).

Рассматривая аналогичную задачу относительно p^*, получим

$$p^*y^{**} \leqq p^*y^*.$$

Эти два неравенства несовместимы с последним предположением о функциях спроса. Таким образом, не может быть различных состояний равновесия.

Это доказательство было приведено в оригинальной статье Вальда. В традиционной теории спроса предположение о выпуклости агрегированной функции спроса не оправдано *). Тем не менее подход к теории спроса с точки зрения «характеристик» (см. гл. 7, § 7.5) вводит универсальный эффект замещения, который не зависит от распределения дохода и дополняет традиционный тип замещения. Это делает более приемлемым принятое предположение об агрегированной аксиоме выявленного предпочтения. В дальнейшем мы увидим, что аналогичное предположение обеспечивает сильные свойства устойчивости.

Заметим, что в этой модели не было сделано никаких предположений относительно поведения производителей. Простые условия о характере производства, принятые в модели, исключают необходимость в дополнительных предположениях о поведении производителей.

9.5. МОДЕЛЬ ЭРРОУ — ДЕБРЕ — МАК-КЕНЗИ **)

Эрроу и Дебре ***) и Мак-Кензи ****) независимо друг от друга построили несколько отличающиеся модели конкурентной экономики и доказали существование равновесия в этих моделях. Сравнение и анализ этих моделей позволили в дальнейшем Дебре *****) несколько модифицировать их и построить новую модель, синтезирующую положительные качества обеих моделей.

Рассмотренная здесь модель является простейшим вариантом синтеза Дебре, более близким к модели Эрроу — Дебре, чем к модели Мак-Кензи.

Приведенное ниже доказательство является эвристическим, а не строгим. Доказательство использует теорему из § 9.3 об избыточном спросе.

Модель строится следующим образом.

Производственные возможности. В отличие от модели Вальраса — Вальда здесь не делается различия между

---

*) Вследствие перераспределения дохода из агрегированного соотношения $p^{**}x^{**} \geqq p^{**}x^{*}$ не следует, что такое же соотношение справедливо для каждого индивидуума.

**) Эта модель рассматривается у Дебре [1] и у Карлина [1].

***) См. Эрроу и Дебре.

****) См. Мак-Кензи [1] и [2].

*****) См. Дебре [2].

продуктами и факторами. В этой модели существуют промежуточные продукты и совместное производство. Кроме того, каждый продукт может производиться различными способами. Здесь вводятся наиболее общие условия на производство, линейные или нелинейные, типа рассмотренных в § 8.7.

Число продуктов, обращающихся в системе, предполагается конечным, равным n. Система содержит также конечное число фирм. Множество допустимых производственных планов j-й фирмы Y^j обладает следующими свойствами:

1) Y^j замкнуто и выпукло;

2) $Y^j \cap \Omega = 0$;

3) $Y^j \cap (-Y^j) = 0$;

4) если $y^* \in Y^j$ и $y \leqq y^*$, то $y \in Y^j$ для всех y и y^*.

Эти условия выполняются для всех j.

Из предположения 1) следует невозрастание эффективности при изменении масштаба производства. Это условие может быть ослаблено, если потребовать невозрастание эффективности для всей экономики, а не для каждой фирмы. Предположения 2), 3) и 4) — обычные предположения о природе множеств выпуска (§ 8.7). Предположение 3) может быть заменено другими предположениями.

Возможности потребителей. Рассматриваемая модель предполагает конечное число потребителей, каждый из которых обладает множеством допустимых векторов потребления X^i. Будем обозначать количества потребляемых продуктов величинами с положительным знаком, а количества продуктов, предлагаемых потребителями (например, услуги труда) — величинами с отрицательным знаком.

Множество допустимых векторов потребления X^i не следует путать с множеством, порожденным бюджетным ограничением. Множество X^i характеризует физически возможные векторы потребления и выражает, например, тот факт, что потребитель не может снабжать систему трудовыми услугами при нулевом потреблении продуктов.

Таким образом, можно предположить:

5) множество X^i выпукло, замкнуто и ограничено снизу.

Будем рассматривать потребителя в качестве производственного процесса, использующего продукты, чтобы произвести труд. Предположение о выпуклости множества X^i исключает в этом случае возможность возрастания эффективности при изменении масштаба производства.

Общая природа предположений о множествах производственных возможностей (выпуска) и потребления показана на рис. 9.1, *а* и *б*. Здесь представлены типичные допустимые

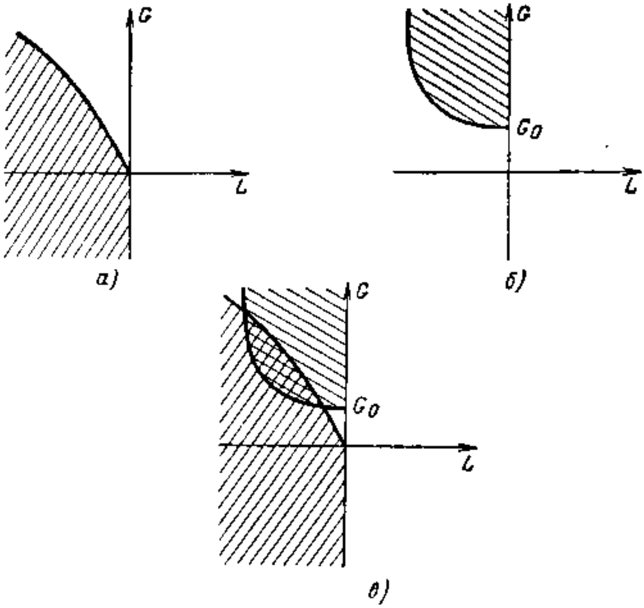


Рис. 9.1. *Множество выпуска и множество потребления.*

а) множество выпуска Y^j; б) множество потребления X^i; в) достижимое множество $A(Y\bigcap X)$.

множества экономической системы с двумя продуктами — трудом (L) и потребительским продуктом (G). Множество потребления не содержит начала координат (хотя это не является необходимым предположением) и определяет минимальный уровень потребления G_0 и максимальный уровень производства труда.

Эти два рисунка используются также и для того, чтобы проиллюстрировать понятие достижимых состояний экономической системы. Пусть агрегированное множество выпуска экономической системы имеет вид множества *а*, а множество потребления — вид множества *б*. Пусть, кроме того, в экономической системе нет начального запаса продуктов. Тогда достижимые состояния экономики принадлежат пересечению этих двух множеств, показанному на рис. 9.1, *в* *).

Предположим, что множества выпуска и множества потребления аддитивны (т. е. отсутствует взаимодействие между фирмами и, соответственно, между потребителями). Это значит, что, если $y^j \in Y^j$, а $y^k \in Y^k$, то $y^j + y^k$ — возможный выпуск экономической системы. То же можно сказать и в отношении потребления. Обозначим $Y = \Sigma Y^j$.

Предпочтения потребителей. Предполагается, что для каждого потребителя определены отношения предпочтения на его множестве потребления. Допустим, что предпочтения выражаются при помощи функции полезности, обладающей следующими свойствами:

6) $u^i\ (x^i)$ — непрерывно дифференцируемая функция на X^i;

7) множество $\{x^i \mid u^i (x^i) \geqq u^i (\bar{x}^i)\}$ выпукло для всех $\bar{x}^i \in X^i$;

8) для любого $\bar{x}^i \in X^i$ существует некоторый $x^i \in X^i$, такой, что $u^i (x^i) > u^i (\bar{x}^i)$.

Это стандартные предположения. Допущение 8) о ненасыщении можно слегка изменить, если потребовать ненасыщения только для некоторого потребителя в некотором допустимом состоянии. Очевидно, что все происходящее вне множества допустимых состояний не оказывает влияния на результаты исследования.

Анализ может быть проведен непосредственно в терминах полуупорядоченных предпочтений без применения функции полезности **).

Распределение благ и дохода. Пусть ω — вектор первоначальных запасов продуктов. Предполагается, что все они являются собственностью потребителей. Пусть ω_i — первоначальный запас продуктов у i-го потребителя. Тогда $\Sigma\omega_i = \omega$.

Пусть π^j — доход j-й фирмы. Предполагается, что весь этот доход распределяется между потребителями. Метод распределения задается фиксированными числами θ_{ij}. Ве-

---

*) Множество достижимых состояний обязательно ограничено, так как все X^i ограничены снизу и множество $\{y^j \mid y^j \in Y^j, y^j \geqslant y^*\}$ ограничено для всех y^* (см. § 7.2).

**) Это сделано в работах Дебре [1] и [2].

личина θ_{ij} указывает часть дохода j-й фирмы, которую получает i-й потребитель. Имеем $\theta_{ij} \geqq 0$ и $\sum_i \theta_{ij} = 1$.

В этой модели потребитель получает прибыль из трех различных источников:

а) продажи своих первоначальных запасов ($p\omega_i$);

б) соответствующей доли прибыли фирм ($\sum_j \theta_{ij}\pi^j$);

в) продажи услуг, которые включены в X^i.

Введенное выше условие на знаки продуктов позволяет отдельно не рассматривать п. в). Бюджетное ограничение потребителя, у которого нет начальных ресурсов и доли прибылей фирм, будет $px \leqq 0$. Это условие показывает, что затраты на продукты потребления не превосходят ценности проданных услуг.

В модели Эрроу — Дебре п. а) и б) задают *блага* потребителя. Этот термин не всегда подходит, однако мы будем им пользоваться.

Предполагается, что действия потребителя зависят от *ограничения на блага*, т. е. его потребление удовлетворяет условию

$$px^i \leqq p\omega_i + \sum_j \theta_{ij}\pi^j.$$

Конкурентное равновесие. Предполагается, что правила, в соответствии с которыми действуют экономические единицы, состоят в следующем. Производители максимизируют свой доход, считая цены заданными (полная конкуренция), а потребители максимизируют полезность при выполнении ограничения на блага.

Конкурентное равновесие — это состояние экономической системы, в котором обеспечено рыночное равновесие, и каждый производитель и потребитель действуют в соответствии с приведенными выше правилами.

Формально конкурентное равновесие задается совокупностью векторов $(p^*, x_1^*, \ldots, y_1^*, \ldots)$, для которых:

1) $p^*y_j^* = \max p^*y_j$ при $y_j \in Y^j$ для всех j;

2) $u^i(x_i^*) = \max u^i(x_i)$ при $x_i \in X^i$ и $p^*x_i \leqq p^*\omega_i + \sum_j \theta_{ij}\pi_j^*$ при всех i (где $\pi_j^* = p^*y_j^*$);

3) $p^*z^* = 0$, $z^* \leqq 0$, $p^* \geqq 0$ (где $z^* = x^* - y^* - \omega$, $x^* = \sum_i x_i^*$, $y^* = \sum_j y_j^*$).

Вектор p предполагается нормализованным.

Теорема существования. *Описанная выше экономическая система обладает состоянием равновесия, если она удовлетворяет следующему дополнительному условию:*

(*) *Для каждого i существует по крайней мере одна точка, являющаяся внутренней точкой множества $(Y + \omega_i) \cap X^i$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, исследуем природу условия (*). Как мы увидим, это условие необходимо для того, чтобы избавиться от трудностей, связанных с нарушением непрерывности. Условие утверждает, что для любого потребителя существует допустимое состояние, которое является внутренней точкой множества потребления.

В первой модели Эрроу — Дебре дополнительное условие задавалось следующим образом: для каждого потребителя начальный запас ω_i должен быть таким, чтобы существовал $x_i \in X^i$, для которого $x_i \ll \omega_i$.

Это условие требует, чтобы каждый потребитель в своем множестве потребления имел положительный первоначальный запас каждого из продуктов. Легко видеть, что это более раннее предположение удовлетворяет нашему условию, если $0 \in Y$. Тогда

$$0 + \omega_i \gg x_i \in X^i \text{ и } x_i + \eta \in [(Y + \omega_i) \cap X^i]$$

для некоторого $\eta \gg 0$ и $x_i \in X^i$. Очевидно, что $x_i + \eta$ является внутренней точкой множества X^i.

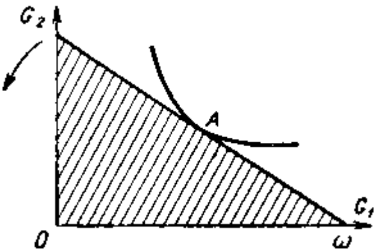
Доказательство теоремы существования основано на построении подходящего отображения $p \to Z(p)$, удовлетворяющего условиям теоремы об избыточном спросе (§ 9.3). Предположим, что цены принадлежат множеству P — множеству неотрицательных нормализованных цен. Рассмотрим произвольный вектор цен $p \in P$.

Поскольку Y^j замкнуто и выпукло, то $Y^j(p)$ — множество векторов, максимизирующих py_j при $y_j \in Y^j$, также выпукло и замкнуто. Тогда отображение $p \to Y^j(p)$ полунепрерывно сверху (см. дополнение Д9, § Д9.4). Функция $\pi_j(p)$ непрерывна (§ Д9.4). Кроме того, $\pi_j(p) \geqq 0$, так как $0 \in Y^j$.

Задав p, получаем $\pi_j(p)$. Следовательно, объем благ каждого потребителя $w_i(p) = p\omega_i + \sum_j \theta_{ij}\pi_j(p)$ зависит только от вектора p.

Далее, $\theta_{ij} \geqq 0$, $\pi_j \geqq 0$. Поэтому $w_i \geqq p\omega_i$. Некоторые потребители могут не иметь долей от прибылей фирм или иметь доли только у фирм с нулевой прибылью. Благосостояние этих потребителей определяется только начальным запасом продуктов. Рассмотрим теперь таких потребителей (если они имеются), существование которых определяет трудности, обусловливающие необходимость в условии (*).

Рассмотрим простой случай. Пусть потребитель не может предлагать трудовые услуги. Множество потребления состоит из двух продуктов, а начальный запас содержит только один из них. Эта ситуация изображена на рисунке, где продуктами являются G_1 и G_2, а начальный запас ω содержит только G_1. При некоторых ценах $p \gg 0$ бюджетное ограничение определяет множество, соответствующее заштрихованной области на рисунке, и потребитель может выбрать любую точку, например A, меняя часть первоначального запаса G_1 на некоторое количество G_2. Рассмотрим последовательность нормализованных векторов цен, у которых p_1 уменьшается. Соответствующая бюджетная прямая будет вращаться против часовой стрелки вокруг точки ω. Можно ожидать, что при непрерывных выпуклых отношениях предпочтения выбираемые векторы потребления будут двигаться к точке ω. Тем не менее, пока компонента $p_1 > 0$, как бы мала она ни была, бюджетная прямая целиком лежит слева от ω.



Когда p_1 обратится в нуль, потребитель ничего не получит от продажи G_1 и не сможет купить никакого количества продукта G_2. Он должен потреблять только продукт G_1, но G_1 — теперь свободный продукт, и потребитель не ограничивается своим начальным запасом. При отсутствии насыщения *) потребитель, вероятно, будет искать на рынке как можно больше свободного продукта.

Таким образом, если p_1 падает от ε до 0, потребление G_1 будет возрастать от $\omega - \eta$ ($\eta > 0$) до бесконечно большой

*) Например, в такой ситуации, когда X^i таково, что для любого $x_i \in X^i$ существует $x'_i > x_i$, $x'_i \in X^i$ и $u_i(x'_i) > u_i(x_i)$. (*Прим. перев.*)

величины, *что приведет к нарушению непрерывности отображения $p \to x_i(p)$ в рассматриваемой точке.*

Дополнительное условие (*) вводится для того, чтобы обойти трудности, вызванные нарушением непрерывности. В первой модели Эрроу — Дебре требование превышения начального запаса ω некоторого G_2 исключает трудность, которая может возникнуть только в *точке нижней грани* X^i.

Следуя Дебре *), в нашем случае можно избавиться от этой трудности следующим образом. Рассмотрим модель, идентичную нашей модели общего равновесия с той разницей, что где бы ни встретилась ситуация, описанная выше, совокупность потребительского выбора рассматривается на множестве $0 \leqq G_1$. Это очевидным образом устраняет возможное нарушение непрерывности при помощи искусственного сглаживания отображения $p \to x_i(p)$ в полунепрерывное сверху точечно-множественное отображение. Далее будем обсуждать модель со сглаженным отображением. Если в результате сглаживания получим равновесие, определим его как *квазиравновесие* для исходной системы. Условие (*) в таком случае гарантирует существование точки квазиравновесия, в которой сглаживание в действительности не требуется. Поэтому эта точка и определяет искомое состояние равновесия.

Операция сглаживания, описанная выше, формально определяется следующим образом.

При заданном p множество $X_i(p)$ представляет собой обычное множество предпочтений $\{x_i \mid u_i(x_i)$ есть максимум u_i для всех $x_i \in X^i$, $px_i \leqq w_i\}$ при условии, что $w_i \neq \min px_i$ для $x_i \in X^i$. Если $w_i = \min px_i$ на множестве X^i, то сдвинем выбранный элемент и определим $X_i(p) = \{x_i \mid px_i = w_i\}$.

Отображение $p \to w_i(p)$ есть непрерывная функция. В соответствии с обычными свойствами непрерывности оптимальных решений (§ Д9.4) и определенной операцией сглаживания отображение $p \to X_i(p)$ полунепрерывно сверху, и $X_i(p)$ — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество.

Рассмотрим множества $Y(p) = \Sigma Y_j(p)$, $X(p) = \Sigma X_i(p)$ и $Z(p) = X(p) - Y(p) - \omega$. Все отображения $p \to Y_j(p)$, $p \to X_i(p)$ — полунепрерывные сверху отображения в ограниченные замкнутые выпуклые множества. Поэтому и отображение $p \to Z(p)$ обладает тем же самым свойством.

---

*) См. Дебре [2].

Для любого $z \in Z(p)$ имеем:

$$pz = \sum_i px_i - \sum_j py_j - p\omega =$$
$$= \sum_i px_i - \sum_i \sum_j \theta_{ij}\pi_j - \sum_i p\omega_i =$$
$$= \sum_i (px_i - \varpi_i) \leqq 0 \quad \text{(ограничение на блага).}$$

Дальше, поскольку ни у одного потребителя нет насыщения внутри достижимого множества, имеем $px_i = \varpi_i$ для всех i, так что

$$pz = 0.$$

Таким образом, условия теоремы об избыточном спросе выполняются. По этой теореме существует такой вектор p^*, что $z^* \leqq 0$ для некоторого $z^* \in Z(p^*)$. Тогда $p^*z^* = 0$, $p^* \geqq 0$, $z^* \leqq 0$, так что условия рыночного равновесия удовлетворены. Условия на поведение фирм и потребителей удовлетворяются по построению всюду в $Z(p^*)$, кроме точек, где использовалось сглаживание. Поэтому было установлено существование квазиравновесия.

Рассмотрим теперь влияние условия (*). Из него следует, что, если ω_i — нижняя грань X^i, то она является внутренней точкой множества выпуска Y. Но максимум прибыли всегда будет достигаться на границе Y. Таким образом, квазиравновесие не может иметь места в точке, в которой $\varpi_i(p^*) = \min p^* x_i$ при $x_i \in X^i$ для всех i. Следовательно, *квазиравновесие является равновесием.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Представляет интерес изложение модели Вальраса — Вальда в гл. 13 книги Дорфмана, Самуэльсона и Солоу. Хороший анализ приведен у Карлина [1]. Более простая модель рассматривается у Гейла [1] (гл. 3).

Модель Эрроу — Дебре — Мак-Кензи изложена в работах Дебре [1] и Карлина [1]. В обеих этих работах обсуждается связь между конкурентным равновесием и оптимумом по Парето. В нашей книге эта тема не затронута.

В работе Карлина оригинально изложена проблема благосостояния. Однако чтобы в ней разобраться, требуется изучить приведенный в работе материал по теории оптимизации.

ЧАСТЬ III

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

10. СБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОСТ

Содержание всех параграфов этой главы, исключая последний, непосредственно следует из материала гл. 6 и 7. Последний параграф требует некоторой дополнительной математической подготовки, которую можно получить, изучив дополнение Д8 (§ Д8.8).

10.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Сбалансированный рост, при котором все пропорции экономики остаются стационарными, обеспечивает связь между динамическим и статическим анализом многосекторных моделей экономики.

Анализ сбалансированного роста во многих отношениях больше походит на анализ статического равновесия, чем на анализ более сложных моделей роста. В моделях с однородными условиями на производство и потребление, таких, как те, с которыми мы будем иметь дело в этой и следующих главах, скалярное расширение не влечет за собой реального регулирования процессов во времени.

В этой главе мы ответим на вопрос, обладают ли некоторые экономические модели режимом сбалансированного роста, и если обладают, то единственен ли он и каковы характеристики этого режима.

---

*) Исследование сбалансированного роста при линейной технологии приведено в гл. 11 работы Дорфмана, Самуэльсона и Солоу, а также в гл. 9 работы Гейла [1]. Более современное изложение дано в работах Карлина [1] и Моришимы [1]. Оригинальное и краткое обсуждение вопросов, затронутых в этой и следующих главах, приведено в книгах Хана и Мэтьюза, а также Купманса [4].

Из следующей главы станет ясно, что свойства траектории сбалансированного роста важны и для описания других способов роста. В настоящей главе эти свойства только намечены в содержательных, но не формальных терминах. Вопросы, связанные с оптимальностью (по некоторым критериям) сбалансированного роста, рассмотрены в следующей главе.

10.2. МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА *)

Расширим статическую модель «затраты — выпуск» простейшим образом. Предположим, что из-за временных *лагов* (задержек, отставаний) между производством продуктов и их способностью затрачиваться или по каким-то другим аналогичным причинам требуется, чтобы экономическая система имела запасы всех своих продуктов. Примем наиболее простое предположение. Будем считать, что экономика в целом требует запас i-го продукта, равный, по крайней мере, количеству этого продукта, используемому в системе за единицу времени, умноженному на k_i. Единица времени может быть короткой («неделя») или длинной («год») — на результаты анализа это не влияет. Следует только иметь в виду, что коэффициенты k_i обычно бывают меньшими для более длинного периода времени.

В модели Леонтьева и в других моделях типа «затраты — выпуск» запасы в каждой отрасли предполагаются пропорциональными интенсивности использования продукта в данной отрасли. Достаточно реалистично простое предположение о том, что запасы не принадлежат определенной отрасли, а могут передаваться по мере надобности из одной отрасли в другую. Поэтому имеет смысл рассматривать только суммарные запасы экономической системы.

Запишем набор коэффициентов потребности в запасах k_i, $i = 1, \ldots, n$, в виде диагональной матрицы K. Вектор, определяющий суммарные затраты продуктов, равен Ax. Таким образом, потребность экономической системы в запасах, необходимых для производства валового выпуска x, задается вектором KAx.

---

*) Собственно модель Леонтьева приведена в работе Леонтьева [4]. Обсуждаемая здесь модель близка к модели, рассмотренной у Дорфмана, Самуэльсона и Солоу.

Следовательно, если в момент времени t нужно произвести $x(t)$ продуктов, то запасы $s(t)$ к этому моменту времени должны быть достаточными для того, чтобы обеспечить этот уровень выпуска, т. е. должно иметь место соотношение

$$KAx(t) \leqq s(t).$$

Пусть c — произвольный ассортиментный набор продуктов. Для производства этого набора потребуется валовый выпуск x, задаваемый, как и в обычной открытой модели, равенством

$$x = (I - A)^{-1}c.$$

Таким образом, некоторый ассортиментный набор продуктов $c(t)$ может быть произведен в момент t только в том случае, если

$$KA(I - A)^{-1}c(t) \leqq s(t).$$

Это соотношение является *фундаментальным ограничением* модели «затраты — выпуск» с запасами.

Каковы потребности в труде? В отличие от гл. 6 предположим, что в настоящей модели труд нигде не является ограничивающим фактором. Ограниченным ресурсом в модели является уровень запасов. Если бы возникло желание включить в рассмотрение труд, тогда можно было представить труд в качестве одного из продуктов в основной технологии и потребовать, чтобы необходимый запас труда был пропорционален интенсивности его использования в системе.

Поскольку запасы ограничены, рост в этой модели имеет место, только если запасы возрастают. Рост запасов должен обеспечиваться производством.

Можно считать, что любой ассортиментный набор продуктов состоит из двух частей. Первая часть $c'(t)$ — вектор продуктов текущего потребления (если труд явно присутствует в системе, потребление можно рассматривать как затраты в производственном процессе, производящем труд). Вторая часть набора $\Delta s(t)$ — приращение запасов $s(t)$.

Мы имеем, таким образом, два соотношения:

$$c(t) = c'(t) + \Delta s(t),$$
$$s(t + 1) = s(t) + \Delta s(t).$$

Если текущее потребление $c'(t)$ задано, то первая система уравнений устанавливает связь между ростом запасов и текущими запасами. Вторая система фиксирует связь между запасами, соответствующими двум, следующим один за другим, периодам времени. Приведенные соотношения служат основой для построения динамической модели.

Сделаем теперь очень сильное упрощение. *Будем предполагать, что потребление каждого продукта является неизменной во времени частью его чистого выпуска* *).

Пусть γ_i — отношение потребления к чистому выпуску i-го продукта $(0 < \gamma_i < 1)$. Назовем γ_i *склонностью к потреблению* i-го продукта. Образуем диагональную матрицу Γ склонностей к потреблению.

Имеем

$$c'(t) = \Gamma c(t),$$
$$\Delta s(t) = (I - \Gamma)\, c(t),$$
$$c(t) = (I - \Gamma)^{-1}\, \Delta s(t).$$

Матрица $(I - \Gamma)$ — диагональная со строго положительной диагональю $(0 < \gamma_i < 1)$. Поэтому $(I - \Gamma)^{-1}$ существует и является полуположительной матрицей. Диагональные элементы этой матрицы равны $1/(1 - \gamma_i)$.

Обычно при построении этой простой модели предполагается, что склонность к потреблению для всех продуктов одна и та же. В этом случае $c(t)$ и $\Delta s(t)$ связаны скалярным множителем $(1 - \gamma)^{-1}$. Однако это уменьшает общность модели и не упрощает формальный аппарат анализа.

Подставим выражение чистого выпуска через приращение запаса в фундаментальное ограничение модели. Получим

$$KA\,(I - A)^{-1}\,(I-\Gamma)^{-1}\,\Delta s(t) \leqq s(t).$$

Для простоты перепишем это выражение в форме

$$K^* \Delta s(t) \leqq s(t),$$

где

$$K^* = KA\,(I - A)^{-1}\,(I - \Gamma)^{-1}.$$

Будем предполагать, что основная технология определяет продуктивную открытую модель. Поэтому будем считать, что матрица A — полуположительная неразложимая с наибольшим по модулю характеристическим корнем, меньшим единицы. Как следствие допущения получаем, что $(I - A)^{-1}$ — строго положительная матрица.

---

*) Предположения, гарантирующие эквивалентные результаты, приводятся в этой и следующей главах в других моделях.

Поскольку A — полуположительная неразложимая матрица, то и $A(I-A)^{-1}$ обладает этим свойством. Умножение слева на матрицу K и справа на $(I-\Gamma)^{-1}$, где K и $(I-\Gamma)^{-1}$ — диагональные матрицы с положительными диагоналями, не нарушает этого свойства. Следовательно, K^* — *полуположительная неразложимая матрица.*

Рассмотрим условия, обеспечивающие *равновесный сбалансированный рост*, т. е. такой рост, при котором отношение $\mu = \Delta s_i(t)/s_i(t)$ одно и то же для всех продуктов и по крайней мере запас одного продукта используется полностью (т. е. в фундаментальном ограничении имеет место равенство, по крайней мере, для одного продукта). Величина μ называется темпом роста системы.

Таким образом, задача сводится к решению специальной системы неравенств

$$K^*\Delta s(t) \leqq \frac{1}{\mu}\Delta s(t),$$

в которой требуется, чтобы по крайней мере одно соотношение выполнялось как равенство. При этом должно быть $\Delta s(t) \geqq 0$ *).

Из утверждения (ж) § Д7.3 дополнения Д7 следует, что единственное решение приведенной выше системы есть $1/\mu^* = \lambda^*$, $\Delta s(t) = x^*$, где λ^* — наибольший по модулю характеристический корень, а x^* — соответствующий собственный вектор полуположительной неразложимой матрицы K^*. Мы требовали существования равновесия только для одного продукта. Анализ показал, что при этом равновесие достигается для всех продуктов, так как решение полученной системы обращает в равенства все соотношения фундаментального ограничения.

Существенно заметить, что приведенное выше простое решение системы определяет $\Delta s(t)$ для всех t и, следовательно, $s(t)$ для всех t.

Имеем

$$s(t) = \Delta s(t-1) + s(t-1) = (1+\mu^*)\,s(t-1) = \\ = (1+\mu^*)^2 s(t-2) = (1+\mu^*)^t s(0),$$

*) В общей модели не исключено уменьшение запасов ($\Delta s_i(t) < 0$) при некоторых i, t. Здесь разыскивается сбалансированный рост при приращении запасов, пропорциональном существующим запасам. В общей модели требуется неотрицательность запасов, а не приращений запасов.

где $s(0)$ — начальный уровень запасов. Таким образом, траекторию сбалансированного роста можно получить *только в том случае, если вектор начальных запасов пропорционален соответствующему собственному вектору x^*.*

Если начальные запасы не представлены в соответствующих пропорциях, траектория роста существенно отличается от простой траектории сбалансированного роста.

Поскольку матрица K^* имеет характеристические числа, отличные от λ^*, существуют и другие траектории сбалансированного роста, обращающие ограничения в равенства. Характеристический корень λ^* — наибольший по модулю. Поэтому темп роста как величина, обратная характеристическому корню, будет наименьшим при λ^*. Однако никакие другие траектории подобного типа (для характеристических корней, отличных от λ^*) не имеют соответствующего неотрицательного вектора запасов (утверждение (д), § Д7.3).

Конечно, можно получить сбалансированный рост без равновесия, т. е. с избыточными запасами. Проведенный выше анализ справедлив, если запасы не всех продуктов избыточны. Если же излишний запас имеет место для всех продуктов, то

$$K^*\Delta s(t) \ll \left(\frac{1}{\mu'}\right) \Delta s(t).$$

Так как $\Delta s(t) \geqq 0$, можно найти строго положительную матрицу E, такую, что

$$(K^* + E)\,\Delta s(t) \leqq (1/\mu')\,\Delta s(t)$$

и по крайней мере одно соотношение выполняется как равенство.

Решение этой системы $1/\mu' = \lambda^*_{(K^* + E)}$. Но K^* и $K^* + E$ — полуположительные неразложимые матрицы, и $K^* + E \gg K^*$. Поэтому $\lambda^*_{(K^* + E)} > \lambda^*_{K^*}$ (утверждение (з), § Д7.3) и $\mu' < \mu$. Таким образом, как и следовало ожидать, темп сбалансированного роста при избыточных запасах меньше, чем при равновесии.

Темп равновесного сбалансированного роста, так же как и многие равновесные величины в экономике, обладает в некотором роде свойствами минимакса и седловой точки. Он является наименьшим темпом сбалансированного роста при рыночном равновесии, но наибольшим, не допускающим сокращения запасов.

Численный пример. Можно ввести динамику в простой численный пример, приведенный в гл. 6, задавая

$$K=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 3/4\end{bmatrix},\quad (I-\Gamma)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Матрица K^* равна:

$$K^*=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1/3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 96\\ 6 & 24\end{bmatrix}.$$

Непосредственное вычисление дает, что $\lambda^* = 45{,}1$, $x^* = (3{,}3;\ 1)$. Таким образом, темп сбалансированного роста немного больше 2% за период вдоль траектории сбалансированного роста системы с запасами в соотношении 3,3 : 1. Другой корень и соответствующий собственный вектор отрицательны. Определяемая ими траектория роста будет вести себя так, что в один период уничтожается запас одного продукта, чтобы образовать запас другого продукта; в следующий период запасы меняются ролями.

10.3. МОДЕЛЬ РОСТА ФОН НЕЙМАНА *)

В предыдущем параграфе рассматривалась динамическая модель «затраты — выпуск». Здесь будут исследованы простые свойства сбалансированного роста обобщенной линейной модели.

Неймановская модель роста определяется такой же технологией, что и стандартные модели анализа производственных процессов: B — матрица выпуска и A — матрица затрат. Предполагается, что каждый продукт в системе является выпуском некоторого производственного процесса, и каждый производственный процесс требует затрат некоторого продукта из системы. Модель можно рассматривать как замкнутую модель, в которой даже труд производится при помощи производственного процесса, использующего потребительские продукты в качестве затрат. Эту же модель можно рассматривать и как открытую, в которой трудовые ресурсы неограничены и труд не является выпуском какого-либо производственного процесса.

*) Первая статья фон Неймана по этому вопросу была опубликована в 1937 г. Английский перевод был опубликован в 1946 г. Приведенный ниже анализ основан на работах Гейла [4] и [1].

Используем понятие неразложимости применительно к рассматриваемой системе. В дополнении Д7 (§ Д7.2) неразложимость обсуждалась применительно к одной матрице. Рассмотренная система содержит две матрицы, но общая идея анализа остается той же. Говорят, что система (B, A) неразложима, если не существует подмножества продуктов, которые можно произвести без использования по крайней мере одного продукта, не принадлежащего этому подмножеству. Неразложимость системы определяется соотношением нулевых элементов матриц B и A. Первоначально фон Нейман предполагал, что в (i, j)-й позиции матрицы B или матрицы A обязательно содержится ненулевой элемент. Это очень жесткое предположение исключало из рассмотрения много интересных экономических моделей *).

Построим простую модель роста в предположении, что производственные процессы $y(t)$ требуют полный период времени для выпуска продукта. Следовательно, продукты, подлежащие затрате, должны быть в наличии к началу периода.

Модель фон Неймана допускает возможность совместных выпусков. Поэтому она хорошо приспособлена, в частности, к анализу моделей с капиталом, изнашиваемым при использовании. Рассмотрим, например, простую модель с двумя типами капитала, каждый из которых используется при производстве обоих.

Будем предполагать, что каждый тип капитала изнашивается частично после первого использования и полностью — после второго. Определим в системе четыре продукта следующим образом:

x_1: неиспользованный капитал I типа,

x_2: однократно использованный капитал I типа,

x_3: неиспользованный капитал II типа,

x_4: однократно использованный капитал II типа.

Производственный процесс, потребляющий неиспользованный капитал, выпускает совместно с некоторым продуктом и использованный капитал. Если же потребляется однократно использованный капитал, то этого не произойдет.

---

*) Исходные предположения фон Неймана впервые были ослаблены в работах Кемени, Моргенштерна и Томпсона.

Такая модель имела бы следующую технологию:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & . \\ 1 & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & . \end{bmatrix}.$$

Здесь указаны четыре первых производственных процесса, выпускающих неиспользованный капитал I типа.

Модели капитала такого типа не могут быть построены без предположения о совместном производстве.

Основные ограничения модели фон Неймана состоят в следующем:

$$Ay(t) \leqq By(t-1); \quad y(t),\ y(t-1) \geqq 0.$$

Для нас представляют интерес модели сбалансированного роста, где $\alpha y(t-1) = y(t)$. Опустим аргумент вектора y и рассмотрим следующую задачу — *задачу технологического роста.*

Найти максимальное положительное α при условии, что

$$\alpha Ay \leqq By, \quad y \geqq 0.$$

Приведенная задача нелинейна, так как неизвестные α и y встречаются в ограничении в виде произведения. Чтобы показать, что поставленная задача разрешима, перепишем ограничения в виде

$$(B - \alpha A)\, y \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$

Существует $y \geqq 0$, для которого $By \gg 0$ (так как каждый продукт выпускается некоторым производственным процессом). Поэтому можно найти положительное, но достаточно малое α, при котором ограничения выполняются.

С другой стороны, α ограничены, так как, взяв α достаточно большим, получим по крайней мере одну отрицательную компоненту вектора $(B - \alpha A)\, y$ для любого $y \geqq 0$. Поэтому максимум α достигается.

Обозначим максимальное значение α через α^*, а соответствующий вектор y — через y^*.

Чтобы лучше разобраться в сущности модели, построим двойственную задачу. Интерпретация двойственной задачи будет приведена позже.

Найти β^*, p^*, такие, что β^* минимально при следующем условии:

$$\beta p A \geqq p B, \quad p \geqq 0\ ^{*)}.$$

По тем же причинам, что и при рассмотрении прямой задачи, β имеет минимум, равный β^*, и β^* положителен.

Покажем теперь, что $\beta^* \leqq \alpha^*$. Очевидно, что неравенство $(B - \alpha^* A)\, y \gg 0$ не имеет неотрицательных решений. Иначе можно было бы увеличить α^*, а это противоречит тому, что α^* максимально. Используя свойства линейных неравенств (§ Д3.7), можно утверждать, что $p\,(B - \alpha^* A) \leqq 0$ имеет полуположительное решение. Поскольку β^* минимальное из всех β, удовлетворяющих $p\,(B - \beta A) \leqq 0$ для $p \geqq 0$, то $\beta^* \leqq \alpha^*$.

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать следующую теорему:

Теорема фон Неймана. *В модели, определенной технологией* $(B,\ A)$, *в которой каждый продукт выпускается каким-либо производственным процессом и каждый процесс требует затрат некоторого продукта, существуют полуположительные векторы* y, p *и положительный скаляр* γ, *такие, что:*

а) $\gamma A y \leqq B y$;

б) $\gamma p A \geqq p B$;

в) $p\,(\gamma A - B)\, y = 0$;

г) *если технология* $(B,\ A)$ *неразложима, то скаляр* γ *единственен и равен* $\gamma^* = \alpha^* = \beta^*$, *где* α^* *и* β^* *определены ранее.*

Утверждение в), из которого следует, что если $\gamma A^i y < B^i y$, то $p_i = 0$, и если $\gamma p A^j > p B^j$, то $y_j = 0$, напоминает теорему равновесия линейного программирования.

Для доказательства теоремы положим $\alpha^* \geqq \gamma \geqq \beta^*$. Это допустимо, так как $\alpha^* \geqq \beta^*$. Тогда γ вместе с векторами y^*, p^*, соответствующими α^* и β^*, удовлетворяют а) и б).

Чтобы доказать (в), заметим, что $pB \leqslant \gamma p A$, и так как $y \geqq 0$, то $pBy \leqslant \gamma p A y$. С другой стороны, $By \geqq \gamma A y$ и и $pBy \geqq \gamma p A y$. Следовательно, $pBy = \gamma p A y$, или $p\,(\gamma A - B)\, y = 0$.

В общем случае любое значение γ, заключенное между α^* и β^*, удовлетворяет теореме. Кроме того, обычно существуют и другие векторы y и p, отличные от y^* и p^*, удовлетво-

*) Эта задача часто называется *задачей экономического роста.*

ряющие теореме. Следовательно, решение $(\gamma,\ y,\ p)$ не единственно. Для доказательства единственности в неразложимом случае заметим прежде всего, что так как p^* и y^* полуположительны, то

$$\alpha^* p^* A y^* \leqq p^* B y^* \leqq \beta^* p^* A y^*,$$

так что

$$(\beta^* - \alpha^*)\, p^* A y^* \geqq 0.$$

Если бы можно было показать, что $p^* A y^* > 0$, то мы получили бы, что $\beta^* \geqq \alpha^*$. Но уже было показано, что $\beta^* \leqq \alpha^*$. Так что в этом случае мы пришли бы к равенству $\beta^* = \alpha^*$.

Очевидно, что $B^i y^* \geqq 0$ для любого i, и $B^i y^* > 0$ по крайней мере для одного i, так как y^* — полуположительный вектор и каждый продукт выпускается, по крайней мере, одним производственным процессом.

Пусть $B^i y^* = 0$ для некоторого i. Поскольку неравенство $B^i y^* \geqq \alpha^* A^i y^*$ имеет место для всех i, то $B^i y^* = 0$ только, если $A^i y^* = 0$. Отсюда следует, что i-й продукт не используется и не производится, и поэтому остальные продукты образуют независимое подмножество. Следовательно, если система неразложима, то $B y^* \gg 0$. Поскольку $p^* \geqslant 0$, то $p^* B y^* > 0$. Но $\beta^* p^* A y^* \geqq p^* B y^*$ и $\beta^* > 0$. Поэтому

$$p^* A y^* > 0.$$

Таким образом, если рассматриваемая система неразложима, то $\beta^* = \alpha^*$, и утверждение г) теоремы доказано.

В неразложимом случае можно истолковать утверждения теоремы следующим образом:

Из а) следует, что выпуск каждого продукта по крайней мере равен затратам этого продукта, умноженным на γ. Предполагается, что затраты не превосходят выпуск продукта в предыдущий период. Таким образом, выпуск каждого продукта растет с темпом, не меньшим, чем $\gamma^* - 1$ *). Из б) следует, что любой продукт, выпуск которого растет с темпом, большим, чем $\gamma^* - 1$, имеет нулевую цену. Все

*) Будем предполагать, что соотношения в модели «затраты — выпуск» обеспечивают положительный темп роста. Это может быть получено при соотношениях между коэффициентами затрат и выпуска, аналогичных условиям, необходимым для того, чтобы простая система «затраты — выпуск» была продуктивной. Условия теоремы фон Неймана гарантируют только, что $\gamma^* > 0$, но не обеспечивают неравенства $\gamma^* > 1$.

продукты, обладающие положительными ценами, имеют одинаковый темп роста, равный $\gamma^* - 1$.

Кроме того, из б) следует, что доход, обеспечиваемый производственным процессом, действующим на единичном уровне, не более чем в γ^* раз превышает затраты, измеренные в равновесных ценах p^*. Можно считать, что затраты были сделаны в течение периода, предшествующего рассматриваемому. Поэтому $\gamma^* - 1$ можно истолковывать как условный темп накопления или темп эффективности капиталовложений. Из в) следует, что ни один производственный процесс, который не дает в равновесных ценах условный темп накопления, не будет использоваться. Все фактически используемые производственные процессы обеспечивают один и тот же темп накопления $\gamma^* - 1$.

Здесь исследовалась простейшая модель сбалансированного роста. Однако общие идеи, возникшие при анализе модели фон Неймана, являются фундаментальными в общей теории роста в многосекторной экономике.

Простая технология модели «затраты — выпуск» с $B = I$ и квадратной матрицей A может быть истолкована как специальный случай модели фон Неймана. В этом случае $\gamma^* = 1/\lambda^*$, где λ^* — наибольший по модулю характеристический корень полуположительной квадратной матрицы A, а y^*, p^* — соответствующие правый и левый собственные векторы. В остальном анализ остается тем же самым.

Заметим, что динамическая модель «затраты — выпуск», которая обсуждалась в предыдущем параграфе, не является специальным случаем модели фон Неймана.

10.4. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА — ФОН НЕЙМАНА *)

Рассмотрим модель, аналогичную модели фон Неймана, но исключающую совместное производство. Каждый производственный процесс выпускает один продукт. Однако один и тот же продукт может выпускаться многими производственными процессами. Можно рассматривать такую модель как упрощенную модель фон Неймана или как обобщенную модель Леонтьева. Естественней было бы рассматривать ее как обобщенную модель Леонтьева,

*) Приведенный здесь анализ основан на работах Моришимы [1] и [2].

так как именно возможность совместного производства придает модели фон Неймана специфический характер модели расширения капитала. Как бы мы ни назвали эту модель, она перебрасывает мост между анализом, используемым в модели фон Неймана, и анализом моделей Леонтьева, основанном на теории полуположительных матриц.

В рассматриваемом случае матрица B будет состоять из столбцов, содержащих единственный ненулевой элемент 1 в позиции, соответствующей продукту, выпускаемому этим производственным процессом. Предположим, что процессы занумерованы так, что сначала идут те, которые выпускают первый продукт, затем те, которые производят второй, и т. д.

Матрица B тогда имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & 1 & . & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{bmatrix}.$$

Столбцы матрицы A, которая по форме не отличается от обычной матрицы затрат в модели фон Неймана, будут расположены в том же порядке. Образуем подтехнологии модели, взяв по одному производственному процессу, выпускающему каждый продукт. Обозначим матрицу затрат такой подтехнологии через A_r. Конечно, A_r — квадратная подматрица матрицы A.

Если число производственных процессов, выпускающих i-й продукт, равно m_i, то число матриц A_r равно $\prod_i m_i$.

Каждая матрица A_r является квадратной полуположительной матрицей. Будем полагать A_r неразложимой. Из дополнения Д7 следует, что наибольший по модулю характеристический корень матрицы A_r положителен, и соответствующие собственные векторы строго положительны.

Из всех A_r выберем ту, у которой наибольший по модулю характеристический корень минимален. Обозначим эту матрицу через A^*, ее наибольший по модулю характеристический корень через λ^*, а соответствующие собственные вектор-строку и вектор-столбец через p^* и x^*. Имеем $p^*, x^* \gg 0$.

Определим теперь вектор уровней производственных процессов y^* следующим образом. Если j-й производственный процесс отсутствует в A^*, то $y_j^* = 0$. Оставшиеся n ненулевых компонент приравняем соответственно компонентам x^*. Имеем $By^* = x^*$.

Можно установить следующее утверждение.

Модель Леонтьева — Неймана имеет единственный коэффициент расширения $\gamma^* = 1/\lambda^*$ и единственные векторы цен и уровней производственных процессов p^* и y^*, где λ^*, p^*, y^* определены ранее. Выпуски всех продуктов растут в соответствии с соотношением $\gamma^* A^* x^* = x^*$, так что в системе отсутствуют излишки. Все производственные процессы из A^* расширяются с темпом $\gamma^* - 1$, а остальные не выгодны.

Эти результаты существенно более сильные, чем для общей модели. Неразложимость A_r гарантирует единственность γ^* и в общем случае. Однако в общем случае мы не можем гарантировать единственность векторов цен и уровней, так же как не можем гарантировать отсутствие излишков.

Приведенный результат аналогичен теореме о замещении для системы «затраты — выпуск», в которую введен рост. До тех пор, пока экономика растет вдоль единственного неймановского луча x^*, можно исключить из рассмотрения производственные процессы, не принадлежащие A^*.

Заметим, что в этом случае мы уже имеем условия, при которых рост действительно является расширением. Чтобы обеспечить расширение, γ^* должно быть больше 1, т. е. $\lambda^* < 1$. Однако требование $\lambda^* < 1$ является обычным условием, гарантирующим продуктивность модели «затраты — выпуск» с матрицей A^*.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем следующую *лемму*:

При ценах p^* и темпе накопления $\gamma^* - 1$ любой производственный процесс, не принадлежащий A^*, убыточен.

Пусть A^j — производственный процесс, производящий i-й продукт. Мы хотим показать, что

$$\lambda^* p_i^* < p^* A^j. \qquad (10.4.1)$$

Пусть $\lambda^* p_i^* \geqq p^* A^j$. Заменим соответствующий столбец (отвечающий i-му продукту) в матрице A^* на A^j и обозначим новую матрицу через A^{**}.

Очевидно, что

$$\lambda^* p^* \geqq p^* A^{**}.$$

Пусть λ^{**} — наибольший по модулю характеристический корень матрицы A^{**}, а x^{**} — соответствующий собственный вектор. Поскольку $x^{**} \gg 0$, имеем

$$\lambda^* p^* x^{**} \geqq p^* A^{**} x^{**} = \lambda^{**} p^* x^{**} > 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda^* \geqq \lambda^{**}$. Это противоречит минимальности λ^*. Лемма, таким образом, доказана.

Докажем теорему. По лемме

$$\lambda^* p_i^* \leqq p^* A^j, \tag{10.4.2}$$

где A^j — произвольный столбец матрицы A (независимо от того, принадлежит он A^* или нет), отвечающий i-му продукту.

Имеем

$$\lambda^* p^* B \leqq p^* A. \tag{10.4.3}$$

Кроме того, по определению λ^*, y^* имеем

$$\lambda^* B y^* = A y^*. \tag{10.4.4}$$

Отсюда

$$\lambda^* p^* B y^* = p^* A y^*. \tag{10.4.5}$$

Положим $\gamma^* = 1/\lambda^*$. Соотношения (10.4.4), (10.4.3) и (10.4.5) дадут утверждения а), б) и в) теоремы фон Неймана. Следовательно, $1/\lambda^*$, p^*, y^* являются решениями модели фон Неймана.

Для доказательства единственности необходимо показать, что произвольное решение модели эквивалентно полученному. Пусть γ, p, y — решение модели. Обозначим $\mu = 1/\gamma$. Тогда из теоремы фон Неймана следует, что

$$\mu B y \geqq A y.$$

Но $p^* \gg 0$, т. е.

$$\mu p^* B y \geqq p^* A y. \tag{10.4.6}$$

Из (10.4.3) получим $\lambda^* p^* B \leqq p^* A$. Поскольку $y \geqq 0$, то

$$\lambda^* p^* B y \leqq p^* A y. \tag{10.4.7}$$

Сравнивая (10.4.6) и (10.4.7), приходим к неравенствам

$$\mu p^* B y \geqq p^* A y \geqq \lambda^* p^* B y. \tag{10.4.8}$$

Поскольку $p^* B y > 0$, то

$$\mu \geqq \lambda^*. \tag{10.4.9}$$

Однако согласно (10.4.4) $\lambda^* B y^* = A y^*$ и

$$\lambda^* p B y^* = p A y^*. \tag{10.4.10}$$

По теореме фон Неймана $\mu p B \leqq p A$, так что

$$\mu p B y^* \leqq p A y^*. \tag{10.4.11}$$

Сопоставляя (10.4.10) и (10.4.11), получим

$$\lambda^* p B y^* = p A y^* \geqq \mu p B y^*. \tag{10.4.12}$$

Следовательно,

$$\mu \leqq \lambda^*. \tag{10.4.13}$$

Сравним (10.4.9) и (10.4.13). Получим

$$\mu = \lambda^*.$$

Это равенство вместе с (10.4.12) дает $\lambda^* p B y^* = p A y^*$. Но $B y^* = x^*$, $A y^* = A^* x^*$, так что

$$\lambda^* p x^* = p A^* x^*.$$

Поскольку $x^* \gg 0$, то

$$\lambda^* p = p A^*.$$

Следовательно, p — собственный вектор матрицы A^*, соответствующий λ^*. Поэтому p равен (пропорционален) p^*.

Таким же образом легко показать, что $y = y^*$. Доказательство завершено.

10.5. ОБЩИЕ МОДЕЛИ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА *)

В настоящей главе уже были рассмотрены три модели сбалансированного роста с линейной технологией. Две из них учитывают совместное производство, а третья — исключает совместное производство. В этом параграфе

*) Этот параграф тесно связан с анализом Солоу и Самуэльсона. Необходимой основой является материал § Д8.8. Обсуждение этого параграфа и § Д8.8 может быть проведено позже. См. Моришима [1], дополнение.

обобщены полученные ранее результаты, чтобы охватить случаи, в которых технология нелинейна, но эффективность постоянна при изменении масштаба производства.

Рассмотрим расширяющуюся модель такого же типа, что и в случаях моделей фон Неймана или Леонтьева — фон Неймана. Но будем считать, что каждый продукт обладает линейно однородной производственной функцией вида

$$y_i = f^i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.5.1}$$

Пусть f^i — неубывающие функции всех затрат и возрастающие по крайней мере по одной компоненте. Будем предполагать, что суммарные затраты фиксированы, т. е.

$$\sum_i x_{ij} = x_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{10.5.2}$$

Соотношения (10.5.1) и (10.5.2) определяют преобразование вектора затрат x в вектор выпуска y. Вектор x может быть распределен среди отдельных отраслей при выполнении условия (10.5.2) бесконечным числом способов. Каждое распределение может дать различные векторы выпуска y. Поэтому это отображение является точечно-множественным.

Будем предполагать, что задано однородное правило распределения, т. е. правило, которое связывает с каждым x единственный набор x_{ij}, удовлетворяющий следующему требованию: если x^* определяет распределение x^*_{ij}, тогда kx^* дает распределение kx^*_{ij} для всех i, j. Очевидно, что такое правило определяет пропорции, в которых продукты должны распределяться. Поскольку правило задает распределение затрат для каждого x, то и вектор y будет также единственен.

Вследствие однородности правил распределения и производственных функций приходим к выводу, что если x^* дает y^*, то kx^* дает ky^*. Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

При заданных n линейно однородных функциях от n затрат однородное правило распределения дает однозначное отображение, определенное линейно однородной вектор-функцией $y = F(x)$ *).

---

*) Заметим следующее: несмотря на то, что заданное правило распределения дает единственную функцию F, обратное утверждение неверно. Заданная функция F может индуцировать ряд правил распределения, так как каждый продукт можно произвести при различных комбинациях затрат.

Очевидно, что функция F имеет вид, изученный в дополнении Д8 (§ Д8.8). Предположим простую динамическую связь

$$x(t) = y(t-1). \qquad (10.5.3)$$

Из результатов § Д8.8 сразу же получим следующее утверждение.

Экономическая система с производственными функциями, указывающими на постоянство эффективности при изменении масштаба производства, имеет по крайней мере одну траекторию сбалансированного роста, связанную с каждым однородным правилом распределения. Если экономика неразложима (т. е. не существует подмножества продуктов, которые не могут быть произведены без использования продуктов, не принадлежащих подмножеству), то для каждого однородного правила распределения имеется единственная траектория сбалансированного роста.

Среди различных правил распределения, очевидно, одно приводит к сбалансированному росту с наибольшим темпом. Такой рост будем называть неймановской траекторией.

В следующей главе мы используем эти результаты применительно к неоклассическим функциям преобразования. Можно заметить, что в модели Леонтьева — фон Неймана (из предыдущего параграфа) каждая подтехнология определяет функцию F такого же типа, что и выше. Для модели фон Неймана ситуация более сложная. Возьмем любые n производственных процессов. Они определят подматрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ матриц A и B. Если $\hat{A}$ — невырожденная матрица, то можно записать

$$y(t) = \hat{A}^{-1}\hat{B}y(t-1).$$

Матрица $\hat{A}^{-1}\hat{B}$ определит функцию F подходящего вида тогда и только тогда, когда $\hat{A}^{-1}\hat{B} \geqq 0$. Существует способ сбалансированного роста, связанный с каждым множеством n производственных процессов, которые удовлетворяют приведенным выше условиям.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для дальнейшего изучения темы целесообразно следовать ссылкам, приведенным в главе, затем изучить Дорфмана, Самуэльсона и Солоу, гл. 11, Гейла [1], гл. 9.

11. ЭФФЕКТИВНЫЙ И ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ

Эта глава основана на материалах гл. 10. Для усвоения § 11.1—11.5 не требуется никакого дополнительного математического аппарата. Для понимания § 11.6 необходимы простейшие методы вариационного исчисления. Соответствующий материал представлен в дополнении Д11 (§ 11.2).

11.1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ *)

В предыдущей главе проведен чисто описательный анализ режима сбалансированного роста в различных динамических моделях. Здесь исследованы оптимальные свойства траекторий роста.

Рассмотрим простую модель экономической системы, содержащей три продукта — один потребительский продукт (C) и два вида капитала (K_1, K_2). Предполагается, что производство зависит только от запасов капитала так, что комбинации потребительского продукта и приращений запасов капитала связаны производственной функцией

$$T\,(C\,(t),\ \Delta K_1\,(t),\ \Delta K_2\,(t);\ K_1\,(t),\ K_2\,(t)) = 0.$$

Рост запасов капитала задается динамическими соотношениями

$$K_1\,(t+1) = K_1\,(t) + \Delta K_1\,(t),$$
$$K_2\,(t+1) = K_2\,(t) + \Delta K_2\,(t).$$

Очевидно, что при произвольных заданных начальных запасах $K_1\,(0)$ и $K_2\,(0)$ экономическая система может иметь бесконечное число траекторий роста в том смысле, что две из трех переменных $C\,(t)$, $K_1\,(t)$, $K_2\,(t)$ могут быть произвольными внутри некоторой области. Нас интересует критерий выбора среди этих траекторий.

---

*) Несколько более элементарное изложение приведенных здесь вопросов дано в работе Дорфмана, Самуэльсона и Солоу, гл. 12.

Если рассматривается только конечное число периодов времени *), можно в принципе оптимизировать некоторую целевую функцию общего вида

$$\Phi [C (0),\ K_1 (1),\ K_2 (1),\ C (1),\ \ldots \\ \ldots,\ K_1 (N),\ K_2 (N),\ C (N)]$$

при выполнении ограничения, задаваемого производственной функцией и при начальных запасах $K_1 (0)$, $K_2 (0)$.

Исследование оптимальных динамических моделей требует упрощения целевой функции Φ. Можно выделить два важных случая.

а) *Оптимизация конечных запасов* (*конечная оптимизация*). Здесь $C (n)$ предполагается заданным для всех n (в простейших моделях $C (n) = 0$ для всех n), и целевая функция $\Phi [K_1 (N),\ K_2 (N)]$ является *функцией только конечных запасов капитала*. Ограничения определяются траекторией $C (n)$, условиями на производство и начальными запасами.

б) *Непрерывная оптимизация*. Здесь значения $c (n)$ являются наиболее важными аргументами целевой функции. Она может иметь вид $\Phi [C (0),\ C (1),\ \ldots,\ C (N)]$, т. е. *целевая функция зависит только от потребления во все интервалы времени*. Оптимизация проводится при ограничении на конечные запасы и при обычных производственных и начальных ограничениях. При достаточно большом N влияние конечных запасов ослабевает и им можно пренебречь **).

В терминах теории благосостояния наше внимание должна была бы привлечь только непрерывная оптимизация, поскольку только потребление может породить индивидуальную полезность. Однако в этом случае возникают существенные трудности при постановке задачи. Дело в том, что, несмотря на некоторый прогресс в этой области ***),

*) Если число периодов времени бесконечно (как в моделях с непрерывным временем), необходимо использовать другие методы. В моделях с непрерывным временем целесообразно применение вариационного исчисления. В § 11.6 будут использованы вариационные методы.

**) Необходимо делать различие между моделью с непрерывным временем и моделью с бесконечно большим горизонтом планирования. В модели с непрерывным временем имеем бесконечное число периодов бесконечно малой длины, укладывающихся в конечный интервал времени. Во втором случае при $N \to \infty$ горизонт планирования бесконечно растет.

***) См., например, Купманс [5], Купманс, Диамонд и Вильямсон.

до сих пор нет хорошо разработанной теории для определения природы динамической функции полезности. Простейший вариант задачи непрерывной оптимизации — *задача оптимальных сбережений* — был исследован Рамсеем в 1927 г. *), а новые варианты рассматриваются различными авторами **). Обычно предполагается, что целевая функция представлена в одной из двух приведенных ниже форм:

$$\Phi = \sum C(n) \quad \text{или} \quad \Phi = \sum \rho^{-n} C(n).$$

В этой книге, главным образом из-за недостатка места, мы не будем рассматривать задачу непрерывной оптимизации. Рассмотрим только *конечную оптимизацию.* Здесь целевая функция, зависящая только от величин, измеренных в одно и то же время, может быть определена в общем виде таким же образом, как и в статической модели. Последующие параграфы этой главы посвящены изучению конечно-оптимального роста. Ряд утверждений, характеризующих природу роста в многосекторных моделях, могут быть получены из этого анализа, хотя принцип оптимизации по конечным запасам, отвечающим некоторому определенному моменту времени, может не иметь устойчивой основы. Этот принцип может быть реализован разве только через планируемые расходы.

Как в статических, так и в динамических моделях понятия эффективности и оптимальности тесно связаны. Если бы мы пожелали четко подчеркнуть различие между этими понятиями, то следовало бы обратить внимание на следующие нюансы. *Оптимальная траектория* предполагает, что критерий оптимальности указан. *Эффективная траектория* — это траектория, оптимальная по *некоторому* подходящему критерию. Таким образом, неэффективная траектория не может быть оптимальной, а оптимальная траектория всегда эффективна. Мы оставим термин «эффективная траектория» для траектории, которая является *конечно-оптимальной* для некоторого выбора целевой функции. Во всех случаях, которые мы будем рассматривать в после-

---

*) См. Рамсей. Первоначальная задача Рамсея (случай непрерывного времени) обсуждается в работе Аллена [1]. Вариант с дискретным временем рассмотрен в работе Дорфмана, Самуэльсона и Солоу (гл. 11).

**) Хорошее введение в эту область приведено в работе Хелпса.

дующих параграфах, целевая функция будет линейной и будет соответствовать некоторой оценке конечных запасов в заданных ценах *).

11.2. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ

При рассмотрении оптимальных траекторий роста весьма полезно понятие, известное как *принцип оптимальности.* Это понятие в частной форме, приведенной ниже, было предложено Беллманом как основа динамического программирования **).

Принцип оптимальности. *Оптимальная политика обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и первоначальное решение, последующие решения должны основывать оптимальную политику относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения.*

Принцип оптимальности в ряде работ использован для определения оптимальной политики. Первоначально он был предназначен для конечно-оптимальных задач. Однако, несмотря на его интуитивную привлекательность, допустимость его применения должна быть проверена в каждом классе задач. Осложнения могут возникнуть в применении принципа к непрерывно-оптимальным классам ***).

Применительно к теории роста принцип оптимальности приводит к следующему выводу. Если траектория конечно-оптимальна, начинается из точки $x(0)$ и проходит через $x(n)$ на пути к конечной точке $x(N)$, тогда часть траектории от $x(n)$ до $x(N)$ будет конечно-оптимальна относительно начальной точки $x(n)$. Интуитивно ясно, что часть траектории от $x(0)$ до $x(n)$ должна быть конечно-оптимальна относительно $x(n)$ *по какому-нибудь подходящему критерию* и поэтому должна быть эффективной.

Таким образом, можно сформулировать обобщенный принцип оптимальности для эффективных траекторий.

---

*) При этой процедуре общность не теряется. При целесообразно выбранных ценах оптимальная траектория, выбранная по этому методу, может подойти для любой целевой функции, которая зависит только от конечных выпусков.

**) Приведенное утверждение взято из работы Беллмана и Дрейфуса. См. также Беллман [2].

***) См., например, Строц, Поллак и Блэкорби.

П р и н ц и п о п т и м а л ь н о с т и д л я э ф ф е к т и в н о г о р о с т а. *Любая часть траектории эффективного роста сама является траекторией эффективного роста.*

При применении этого принципа к конечно-оптимальным траекториям подходящий конечный критерий для частей траектории должен выбираться в каждом случае по-своему. Пусть, например, максимизируется стоимость конечных запасов $x(N)$ в некоторых ценах. Тогда цены, подходящие для $x(n)$, рассматриваемой в качестве конечной точки, будут, вообще говоря, отличаться от цен, соответствующих точке $x(N)$ *).

11.3. ЭФФЕКТИВНЫЙ РОСТ **)

В этом параграфе рассматриваются траектории эффективного роста для экономической системы, не учитывающей потребления (или с одинаковым для всех продуктов отношением потребления продукта к его производству), с неоклассическим преобразованием (neoclas sical transformation) и дискретным временем. Ниже рассматривается только конечная оптимизация.

Неоклассическое преобразование задано в неявном виде:

$$T(y, x) = 0,$$

где $y, x \in R^m$. Вектор y представляет собой выпуск, а x — затраты системы. Преобразование таково, что y и x неотрицательны. Здесь выполняются неоклассические традиции разделения затрат и выпусков, где и те и другие считаются положительными величинами. Напомним, что в обобщенной теории производства принято соглашение, согласно которому затраты считаются отрицательными выпусками (как в § 8.7 и в гл. 9).

Неоклассическое преобразование удовлетворяет следующим свойствам:

а) $T(y, x) \in C^2$;

б) предполагается, что для фиксированных затрат x^* множество выпуска

$$Y(x^*) = \{y \mid T(y, x^*) = 0\}$$

*) См. § 11.4.

**) Приведенный ниже анализ является обобщением двухпродуктовой модели, рассмотренной в гл. 12 работы Д о р ф м а н а, С а м у э л ь с о н а и С о л о у.

образует выпуклую кверху неоклассическую поверхность эффективного выпуска того же вида, что изучался в гл. 8 (§ 8.4—8.6);

в) предполагается, что для данного вектора выпуска y^* множество векторов затрат

$$X(y^*) = \{x \mid T(y^*, x) = 0\}$$

образует вогнутую в сторону нуля поверхность равных объемов традиционного неоклассического вида;

г) преобразование $T(y, x)$ — однородное степени нуль, так что, если $T(y, x) = 0$, то $T(hy, hx) = 0$ для всех $h > 0$.

Преобразование, связывающее x и y, определяет *точечно-множественное*, а *не однозначное* отображение. Задав вектор x^*, мы получим не один вектор выпуска, а целое множество векторов выпуска $Y(x^*)$. Необходимо иметь в виду различие между соотношением $T(y, x)$, используемым здесь и вектор-функцией $y = F(x)$ (однозначное отображение), используемой при обсуждении сбалансированного роста в неоклассической теории производства (см. § 10.5). Связь между этими соотношениями рассматривается в следующем параграфе.

Как и в обычной теории производства, предполагается, что $T(y, x)$ — эффективное соотношение между затратами и выпусками (в статическом смысле).

Динамический характер модели состоит в том, что *выпуски в период t являются затратами в период $t + 1$*, т. е. $x(t + 1) = y(t)$.

При заданном $x(0)$ экономическая система может произвести набор продуктов, определяемый любым вектором выпуска из множества $Y[x(0)]$. Пусть выбран произвольный $y(0) \in Y[x(0)]$. Тогда $x(1) = y(0)$, и можно построить другое множество выпуска, из которого таким же путем выбирается произвольный вектор выпуска. Любая траектория $y(0), y(1), \ldots, y(N)$, полученная таким образом, является допустимой траекторией. Среди множества допустимых траекторий будем разыскивать подмножество эффективных траекторий.

Здесь критерием конечной оптимальности будет максимизация стоимости конечного выпуска $y(N)$ при заданных ценах p^*.

Эффективная траектория, являющаяся оптимальной при некоторых ценах p^* (цены предполагаются нормализованными), будет решением следующей задачи оптимизации:

$$\max p^* y(N),$$
$$T[y(n), x(n)] = 0, \quad n = 0, \ldots, N,$$
$$x(n+1) - y(n) = 0, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Здесь неявно предполагается, что требования неотрицательности переменных неэффективны и что в динамических ограничениях равенства более целесообразны, чем неравенства.

Поставленная выше задача может быть решена классическими методами. Определим функцию Лагранжа *):

$$L[y(0), \ldots, y(N), x(1), \ldots, x(N), \lambda_0, \ldots, \lambda_N, \mu_0, \ldots, \mu_N] =$$
$$= p^* y(N) - \sum_0^N \lambda_n T[y(n), x(n)] -$$
$$- \sum_1^{N-1} \sum_0^m \mu_{n,i} [x_i(n+1) - y_i(n)], \qquad (11.3.1)$$

где $y(n)$, $x(n)$, μ_n — m-мерные векторы, а λ_n — скаляры.

Условия первого порядка относительно переменных $y_i(n)$, $x_i(n)$ имеют вид **):

$$\frac{\partial L}{\partial y_i(n)} = -\lambda_n \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} + \mu_{n,i} = 0, \qquad (11.3.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i(n)} = -\lambda_n \frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)} - \mu_{n-1,i} = 0. \qquad (11.3.3)$$

Условия для начального и конечного периодов записываются в виде

$$\frac{\partial L}{\partial y_i(N)} = p_i^* - \lambda_N \frac{\partial T(N)}{\partial y_i(N)} = 0, \qquad (11.3.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i(0)} = -\lambda_0 \frac{\partial T(0)}{\partial y_i(0)} + \mu_{0,i} = 0. \qquad (11.3.5)$$

Заменив в (11.3.3) n на $n+1$, получим

$$-\lambda_{n+1} \frac{\partial T(n+1)}{\partial x_i(n+1)} - \mu_{n,i} = 0. \qquad (11.3.6)$$

---

*) Заметим, что в стандартной задаче оптимизации не следует рассматривать соотношение $x(n+1) - x(n) = 0$ как одно ограничение. Необходимо отдельно учитывать каждое ограничение $x_i(n+1) - x_i(n) = 0$.

**) $T(n)$ — сокращенная запись для $T[y(n), x(n)]$.

Освобождаясь от $\mu_{n,i}$ в (11.3.2) и (11.3.6), приходим к равенству

$$\lambda_{n+1}\frac{\partial T(n+1)}{\partial x_i(n+1)} = -\lambda_n\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}. \qquad (11.3.7)$$

Аналогичное соотношение можно получить не только для i, но и для j. Исключая λ_n, λ_{n+1}, получим

$$\frac{\partial T(n+1)}{\partial x_i(n+1)}\Big/\frac{\partial T(n+1)}{\partial x_j(n+1)} = \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}\Big/\frac{\partial T(n)}{\partial y_j(n)}. \qquad (11.3.8)$$

Отсюда следует, что предельный темп взаимозаменяемости двух продуктов, выступающих в качестве *затрат* в период $n+1$, равен предельному темпу взаимозаменяемости этих продуктов, выступающих в качестве *выпусков* в период n.

Условия (11.3.8) эквивалентны условиям «*межвременной эффективности*» Дорфмана, Самуэльсона и Солоу *), хотя обозначения различаются.

$T(n+1)$ зависит от $y(n+1)$ и $x(n+1)$ $[=y(n)]$, $T(n)$ зависит от $y(n)$ и $x(n)$ $[=y(n-1)]$. Поэтому условия эффективности представляют собой, строго говоря, дифференциально-разностные уравнения второго порядка.

11.4. СВОЙСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Начнем параграф с интерпретации двойственных переменных в задаче оптимизации, рассмотренной в предыдущем параграфе. Из (11.3.4) имеем

$$\lambda_N\frac{\partial T(N)}{\partial y_i(N)} = p_i^*.$$

Поскольку величина $\lambda_n\dfrac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}$ должна иметь ту же размерность, что и $\lambda_N\dfrac{\partial T(N)}{\partial y_i(N)}$, а из (11.3.2)

$$\lambda_n\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} = \mu_{n,i},$$

то $\mu_{n,i}$ представляет собой некоторый тип условных оценок i-го продукта в n-й период времени. Так как $\mu_{n,i}$ имеет ту же размерность, что и p_i^*, то $\mu_{n,i}$ можно интерпретиро-

*) См. Дорфман, Самуэльсон и Солоу, гл. 12 (intertemporal efficiency conditions).

вать как *«денежную»* условную оценку, а $\mu_{n,i}/\lambda_n = \partial T(n)/\partial y_i(n)$ — как *«реальную»* условную оценку.

Для интерпретации множителей λ_n используем однородность степени нуль $T(y, x)$ и теорему Эйлера. Имеем

$$\sum \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} y_i(n) + \sum \frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)} x_i(n) = 0. \qquad (11.4.1)$$

Обозначим первую сумму в левой части равенства через $V(n)$ и подставим вместо $\partial T(n)/\partial y_i(n)$ выражение $\mu_{n,i}/\lambda_n$. Тогда

$$V(n) = 1/\lambda_n \sum \mu_{n,i} y_i(n). \qquad (11.4.2)$$

Очевидно, $V(n)$ можно интерпретировать как *реальную стоимость выпуска в n-й период времени*.

Рассмотрим вторую сумму в левой части равенства (11.4.1). Учтем равенство $\mu_{n-1,i}/\lambda_n = \partial T(n)/\partial x_i(n)$ из (11.3.3) и $x_i(n) = y_i(n-1)$ из основного динамического соотношения. Получим

$$\sum \frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)} x_i(n) = -\frac{1}{\lambda_n} \sum \mu_{n-1,i} y_i(n-1) =$$

$$= -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \sum \frac{\mu_{n-1,i}}{\lambda_{n-1}} y_i(n-1) = -\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) V(n-1). \qquad (11.4.3)$$

Тогда из выражения (11.4.1) имеем

$$V(n) = (\lambda_{n-1}/\lambda_n) V(n-1). \qquad (11.4.4)$$

Таким образом, отношение λ_{n-1}/λ_n представляет собой отношение реальной стоимости выпуска в период n к реальной стоимости выпуска в период $(n-1)$. Введем обозначение $\rho(n) = \lambda_n/\lambda_{n+1}$. Можно рассматривать $\rho(n)$ как коэффициент роста в период n. Заметим, что $\rho(n)$, вообще говоря, не константа, а функция от номера периода n.

Если экономическая система продуктивна, то $\rho(n) > 1$, и $\lambda_n < \lambda_{n-1}$, так что множители λ_n убывают с ростом n.

Величина $\lambda_n V(n) = \sum \mu_{n,i} y_i(n)$ интерпретируется как денежная стоимость выпуска в n-й период. Из (11.4.4)

$$\lambda_n V(n) = \lambda_{n-1} V(n-1).$$

Это значит, что денежная стоимость остается постоянной во времени. Таким образом, «денежные» стоимости могут быть интерпретированы как *дисконтированные* величины. Рекомендуемыми ценами являются цены p^* периода N. Поэтому цены являются *заблаговременно* дисконтированными, так же как и множители λ, убывающие во времени. Таким образом, $\rho(n)$ можно интерпретировать как коэффициент заблаговременного дисконтирования с темпом $\{1 - [\rho(n)]^{-1}\}$ (меняющимся во времени).

Возникает вопрос: существуют ли *эффективные траектории сбалансированного роста*? В предыдущей главе (§ 10.5) мы видели, что неоклассическая экономика обладает траекторией сбалансированного роста, соответствующей каждому однородному правилу распределения. Очевидно, что условия эффективности предыдущего параграфа однородны и определяют единственный $y(0)$ для произвольного $x(0)$. Поэтому в условия эффективности вводят однозначное отображение. Из соображений, приведенных в § 10.5, следует существование единственного положительного вектора $x(0)$, для которого $y(0) = \gamma x(0)$. Следовательно, существует только одна траектория сбалансированного роста, которая к тому же и эффективна.

Пусть γ^* — коэффициент роста, соответствующий эффективной траектории сбалансированного роста. Тогда

$$y(n) = \gamma^* x(n) = \gamma^* y(n-1).$$

Поскольку $T(y, x)$ — однородная функция степени нуль, то $\partial T(n)/\partial y_i(n) = \partial T(n-1)/\partial y_i(n-1)$ для всех i, n и

$$V(n) = \sum \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} y_i(n) =$$

$$= \gamma^* \sum \frac{\partial T(n-1)}{\partial y_i(n-1)} y_i(n-1) = \gamma^* V(n-1).$$

Следовательно, как и ожидалось, γ^* отождествляется с $\rho(n)$. Таким образом, в случае сбалансированного роста коэффициент дисконтирования (роста) постоянен. По определению $\rho(n)$ имеем $\lambda_n = \gamma^{-n}\lambda_0$.

Рассмотрим произвольную траекторию сбалансированного роста с коэффициентом роста γ. Векторы $y(n)$, $x(n)$ должны удовлетворять уравнениям $T[y(n), x(n)] = 0$ и $y(n) = \gamma x(n)$ для всех n. Очевидно, что γ зависит от $x(n)$. Исследуем γ на максимум.

Используя соотношения $T[y(n), x(n)] = 0$, $y(n) = \gamma x(n)$ и $\gamma = \gamma[x(n)]$, можно получить

$$\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}\left(\gamma + x_i(n)\frac{\partial \gamma}{\partial x_i(n)}\right) + \frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)} = 0,$$

или

$$-x_i(n)\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}\frac{\partial \gamma}{\partial x_i(n)} = \gamma\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} + \frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)}.$$

Поскольку x_i, $\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}$ могут быть взяты ненулевыми, то $\frac{\partial \gamma}{\partial x_i(n)} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma\frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} = -\frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)}. \qquad (11.4.5)$$

Чтобы γ было максимальным, $\frac{\partial \gamma}{\partial x_i(n)}$ должно равняться нулю для всех i, так что

$$\gamma\frac{\partial T(n)}{\partial y_j(n)} = -\frac{\partial T(n)}{\partial x_j(n)}. \qquad (11.4.6)$$

Из соотношений (11.4.5) и (11.4.6) получаем

$$\frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)}\Big/\frac{\partial T(n)}{\partial x_j(n)} = \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}\Big/\frac{\partial T(n)}{\partial y_j(n)}. \qquad (11.4.7)$$

Рассматривается сбалансированный рост, т. е. $x(n+1) = \gamma x(n)$. Функция $T(y, x)$ — однородная степени нуль. Поэтому $\frac{\partial T(n+1)}{\partial x_i(n+1)} = \frac{\partial T(n)}{\partial x_i(n)}$ для всех i. Следовательно, можно переписать (11.4.7) в виде

$$\frac{\partial T(n+1)}{\partial x_i(n+1)}\Big/\frac{\partial T(n+1)}{\partial x_j(n+1)} = \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)}\Big/\frac{\partial T(n)}{\partial y_j(n)}. \qquad (11.4.8)$$

Однако выражение (11.4.8) совпадает с условием «межвременной эффективности» (11.3.8). Следовательно, как и можно было ожидать, эффективная траектория сбалансированного роста оказывается траекторией с наивысшим коэффициентом роста. Используя свойство единственности из § 10.3, можно теперь сформулировать следующее утверждение.

При неоклассическом производстве существует только одна конечно-оптимальная траектория сбалансированного роста. Эта траектория имеет наибольший среди всех траекторий сбалансированного роста коэффициент роста и поэтому может быть отождествлена с неймановской *траекторией. Конечные цены, связанные с этой траекторией, и полупрямая, вдоль которой проходит траектория, могут быть отождествлены с неймановскими ценами и неймановским лучом.*

Перейдем теперь от траекторий сбалансированного роста к вообще эффективным траекториям. Это нужно для исследования принципа оптимальности.

Очевидно, что, если $T(y, x)$ непрерывна вместе с первыми и вторыми производными, то при заданных N и $x(0)$ существует единственная связь между конечными ценами p^* и конечной точкой $y(N)$. Таким образом, можно ожидать, что если подобрать подходящие конечные цены, то удастся найти конечно-оптимальную траекторию с конечной точкой βx, где x — произвольный вектор.

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной траектории, выходящей из $x(0)$ и проходящей через $y(n)$ первоначальной задачи. Сравнение (11.3.2) с (11.3.4) показывает, что оценки $\mu_{n,i}$ являются подходящими конечными ценами. Очевидно также, что если заменить N на n, а цены p_i^* на $\mu_{n,i}$ в начальной задаче, условия оптимальности для всех периодов до n не изменятся.

Рассмотрим теперь задачу с исходными конечными условиями, но начинающуюся из точки $x(n+1) = y(n)$ исходной оптимальной траектории. Здесь оптимизация проводится на $N - n$ периодах. Тогда исходные начальные условия (11.3.5) запишутся в виде

$$-\lambda_n \frac{\partial T(n)}{\partial y_i(n)} + \mu_{n,i} = 0.$$

Однако согласно (11.3.2) эти условия удовлетворяются для исходной оптимальной траектории. Таким образом, любая часть конечно-оптимальной траектории конечно-оптимальна между концами при условии, что конечными ценами являются подходящие условные оценки, соответствующие полной траектории. Следовательно, *конечно-оптимальная траектория удовлетворяет принципу оптимальности.*

11.5. ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ

Класс теорем, устанавливающих связь оптимальных траекторий роста с неймановской траекторией, особенно в смысле «близости» к неймановской траектории, называется *теоремами о магистрали*. Впервые это название, хотя и звучное, но, вообще говоря, не подходящее, было дано Дорфманом, Самуэльсоном и Солоу *).

Различные теоремы о магистрали достаточно разных видов были доказаны Раднером и Никайдо **), Мак-Кензи ***) и Моришимой ****). Представленная здесь теорема основана на теореме Раднера (которая является замечательным примером изобретательности), но модифицирована и расширена в соответствии с работами Никайдо.

Мы будем заниматься тем же процессом роста, который изучался в двух предыдущих параграфах, но с некоторыми слабыми дополнительными условиями. Будем предполагать, что преобразование T строго выпукло в окрестности неймановского луча и что допустимо свободное перераспределение (неэффективное производство в статическом случае). Ни одно из этих предположений не требовалось в предшествующем обсуждении.

Теорема имеет дело с *расстоянием* (в некотором смысле) конечно-оптимальной траектории от неймановской траектории.

Выберем меру, инвариантную относительно умножения на скаляр, т. е. такую, что расстояние между λx и μy будет таким же, что и расстояние между x и y. Здесь будет использоваться «нормализованное расстояние»

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|,$$

где $|v|$ — эвклидова норма v.

Поскольку $|\lambda x| = \lambda |x|$ и $|\mu y| = \mu |y|$ $(\lambda, \mu > 0)$, то

$$d(\lambda x, \mu y) = \left| \frac{\lambda x}{\lambda |x|} - \frac{\mu y}{\mu |y|} \right| = \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| = d(x, y).$$

Следовательно, $d(x, y)$ обладает желаемым свойством. *В дальнейшем расстояние между двумя векторами x, y всегда будет измеряться при помощи меры $d(x, y)$.*

---

*) См. Дорфман, Самуэльсон и Солоу, гл. 12.

**) См. Раднер и Никайдо. Упрощенное изложение теоремы Раднера дано у Хана и Мэтьюза. Обобщение (другого типа по сравнению с приведенным в этой главе) дано у Моришимы [1], гл. 11 и, кроме того, у Купманса.

См. также, например, статью Оганяна. Здесь приведена литература, связанная с теоремами о магистрали. (*Прим. перев.*)

***) См. Мак-Кензи [4, 5 и 6].

****) См. Моришима [2] и [1].

Обозначим неймановские пропорции через x^* (т. е. неймановский луч есть полупрямая λx^*, $\lambda \geqq 0$), а неймановские цены и коэффициент роста через p^* и γ^*. Предположение о строгой выпуклости T принимается для того, чтобы сделать следующий вывод *):

$$p^*y < \gamma^* p^* x \quad \text{для всех } x, \text{ не равных } \lambda x^*.$$

Отсюда в свою очередь следует *лемма. Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что для всех* y, x, *для которых* $T(y, x) = 0$ *и* $d(x, x^*) \geqq \varepsilon$, *имеем*

$$p^*y \leqq (\gamma^* - \delta)\, p^*x.$$

Теперь мы в состоянии сформулировать важную теорему.

Теорема о магистрали. *Рассмотрим экономику с неоклассическим соотношением преобразования* $T(y, x) = 0$, *таким, что* $T(y, x)$ *строго выпукло в окрестности неймановского луча. Утверждается, что:*

1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *конечно-оптимальная траектория с конечным числом периодов* N *находится на расстоянии, большем или равном* ε, *от неймановской магистрали для не более, чем* M, *периодов, где* M *— конечное число, не зависящее от* N, *но зависящее, вообще говоря, от* ε **).

При дополнительных специальных предположениях может быть также доказано следующее:

2. *Если конечными ценами являются неймановские цены, конечно-оптимальная траектория с увеличением номера периода приближается к неймановской траектории и при бесконечно возрастающем* N *асимптотически стремится к неймановской траектории.*

3. *У конечно-оптимальной траектории, проходящей через две точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от неймановской траектории, все промежуточные точки будут ближе к неймановской траектории, чем крайние точки.*

Используя эту теорему совместно с принципом оптимальности, легко охарактеризовать и проиллюстрировать область типичных конечно-оптимальных траекторий (рис. 11.1 и 11.2).

---

*) Условия для строгой выпуклост ифункции T при постоянстве эффективности при изменении масштаба производства были установлены в гл. 8 (§ 8.4—8.6).

**) Здесь приведена формулировка Раднера.

Доказательство теоремы о магистрали основано на сравнении двух траекторий — оптимальной и некоторой *образцовой траектории* (comparision path). При заданных конечных ценах и начальной точке стоимость конечного выпуска должна быть самой высокой на оптимальной траектории. Это соображение используется для того, чтобы установить свойства траектории.

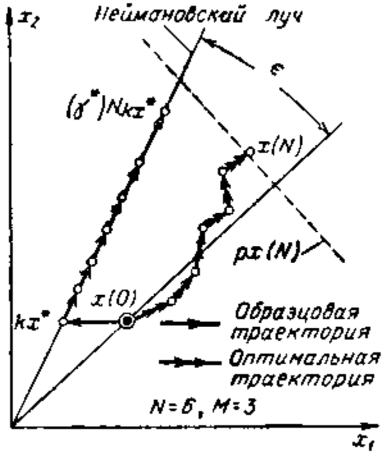


Рис. 11.1. Теорема о магистрали (1).

Определим *образцовую траекторию* следующим образом:

а) пусть задана начальная точка $x(0)$. Каковы бы ни были запасы, мы распоряжаемся ими так, чтобы достичь точки kx^* неймановского луча с максимальным k. Очевидно, что $kx^* \leqq x(0)$, и равенство выполняется по крайней мере для одного продукта;

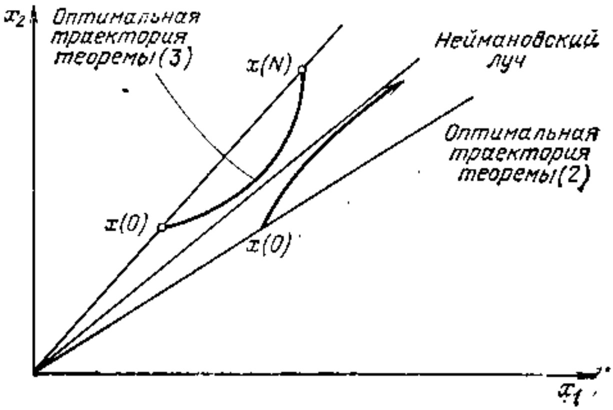


Рис. 11.2. Теоремы о магистрали (2 и 3).

б) экономика растет вдоль неймановской траектории вплоть до периода N, достигая конечной точки $(\gamma^*)^N\ kx^*$.

Пусть p — вектор конечных цен. Стоимость конечного выпуска вдоль образцовой траектории равна

$$V^* = (\gamma^*)^N \quad kpx^*. \tag{11.5.1}$$

Рассмотрим теперь любую другую допустимую траекторию, исходящую из $x(0)$ и имеющую N периодов. Пусть она отстоит от неймановской траектории на расстоянии, не меньшем ε ($d(x, x^*) \geqq \varepsilon$), для M периодов.

По лемме для каждого периода, в котором $d(x, x^*) \geqq \varepsilon$,

$$p^* y(n) \leqq (\gamma^* - \delta)\, p^* x(n), \tag{11.5.2}$$

т. е.

$$p^* x(n+1) \leqq (\gamma^* - \delta)\, p^* x(n).$$

По определению неймановской траектории имеем для всех $x(n)$

$$x(n+1) \leqq \gamma^* x(n),$$

так что

$$p^* x(n+1) \leqq \gamma^* p^* x(n). \tag{11.5.3}$$

Используя неравенство (11.5.2) для M периодов, в которых $d(x(n), x^*) \geqq \varepsilon$, и неравенство (11.5.3) для оставшихся $N-M$ периодов, получаем

$$p^* y(N) \leqq (\gamma^* - \delta)^M (\gamma^*)^{N-M} p^* x(0). \tag{11.5.4}$$

Таким образом, существует верхний предел стоимости конечного выпуска, *измеренной в неймановских ценах*. Нас же интересует стоимость, измеренная в ценах p.

Рассматривая конечные и неймановские цены нормализованными, определим

$$a = \min_i p_i^*, \qquad b = \max_i p_i.$$

Тогда для всех x

$$px \leqq b\,[1]\,x \quad \text{и} \quad a\,[1]\,x \leqq p^* x \text{ *)}.$$

Следовательно,

$$px \leqq (b/a)\, p^* x.$$

Тогда из (11.5.4) имеем

$$V = py(N) \leqq (b/a)(\gamma^* - \delta)^M (\gamma^*)^{N-M} p^* x(0). \tag{11.5.5}$$

*) [1] — вектор, компонентами которого являются единицы.

Сравним теперь конечные стоимости выпуска, отвечающие произвольной траектории и образцовой траектории. Имеем

$$\frac{V}{V^*} \leqq \frac{(\gamma^* - \delta)^M (\gamma^*)^{N-M} bp^* x(0)}{(\gamma^*)^N akpx^*}. \tag{11.5.6}$$

Величины a, b, p, p^*, x^*, k, $x(0)$ зависят только от свойств T, начальных условий и конечных цен. Поэтому для данной задачи все они предполагаются известными.

Далее, $kx^* \leqq x(0)$, т. е. $kp^*x^* \leqq p^*x(0)$. По тем же причинам, что и р.нее,

$$kpx^* \leqq k(b/a)\, p^*x^* \leqq (b/a)\, p^*x(0).$$

Введем параметр K:

$$K = \frac{bp^*x(0)}{akpx^*}. \tag{11.5.7}$$

Для данной задачи K — константа и $K \geqq 1$. Если произвольно выбранная траектория оптимальна, то $V \geqq V^*$, т. е. $V/V^* \geqq 1$.

Но из (11.5.6) и (11.5.7) следует, что

$$\frac{V}{V^*} \leqq K \left(\frac{\gamma^* - \delta}{\gamma^*} \right)^M. \tag{11.5.8}$$

Следовательно, для оптимальности траектории необходимо, чтобы

$$K \left(\frac{\gamma^* - \delta}{\gamma^*} \right)^M \geqq 1. \tag{11.5.9}$$

Единственным неизвестным здесь является значение M — число периодов, для которых оптимальная траектория лежит на расстоянии, не меньшем ε, от неймановской траектории. Чтобы удовлетворялось неравенство (11.5.9), число M должно быть таким, что

$$r^M \leqq K, \tag{11.5.10}$$

где $r = \gamma^*/(\gamma^* - \delta)$. Поскольку $r \geqq 1$ и $K \geqq 1$, то неравенство имеет решение $M \geqq 0$. Ни K, ни r не зависят от N. Это значит, что утверждение (1) теоремы о магистрали доказано.

Необходимо сделать следующие замечания. Если r близко к 1, а K много больше ее, то M может быть большим — существенно бо́льшим N, так что теорема в этом случае фактически бессодержательна. Вообще говоря, для гладкого соотношения преобразования δ будет непрерывно возрастающей функцией ε. Следовательно, r будет убывающей функцией ε. Таким образом, чем меньше ε, тем больше число M. Чем ближе $x(0)$ к неймановскому лучу и чем ближе (в смысле отношения b/a) конечные цены к неймановским, тем ближе K к единице. Поэтому близость начальной или конечной точек к неймановскому лучу будет уменьшать число периодов, для которых оптимальная траектория «удалена» от неймановского луча. В частности, если $x(0) = kx^*$, а $p = p^*$, то $K = 1$ и $M = 0$.

Для доказательства утверждения 2) теоремы предположим прежде всего, что $x(0)$ *«достаточно близко»* к x^*, в том смысле, что, отправляясь из $x(0)$, можно дойти до неймановского луча за один период. То есть $T[\lambda x^*, x(0)] = 0$ для некоторого λ.

Рассмотрим неравенство

$$p^*x(1) \leqq (\gamma^* - \delta)\, p^*x(0)$$

для всех $x(1)$. Исходя из свойств преобразования T, можно предположить, что величина $p^*x(1)$ увеличивается при росте *по направлению* к неймановскому лучу и, что, в частности, можно достигнуть точки $x^*(1) = \lambda x^*$, такой, что

$$p^*x^*(1) = (\gamma^* - \delta)\, p^*x(0).$$

В качестве образцовой траектории можно взять траекторию, которая начинается с $x(0) \to x^*(1)$ и продолжается вдоль неймановского луча в течение $N - 1$ периода. При этом стоимость конечного выпуска будет

$$V^{**} = (\gamma^* - \delta)(\gamma^*)^{N-1}\, p^*x(0).$$

Поскольку в рассматриваемом случае конечными ценами являются неймановские цены, стоимость выпуска на произвольной траектории, заданная в (11.5.4), имеет вид *)

$$V = p^*y(N) \leqq (\gamma^* - \delta)^N (\gamma^*)^{N-M}\, p^*x(0).$$

*) Заметим, что хотя $p^*x^*(1) = (\gamma^* - \delta)\, p^*x(0)$, ожидается, что $p^*x(1) < (\gamma^* - \delta)\, p^*x(0)$ вдоль оптимальной траектории (если $N > 1$) потому, что участок $x(0) \to x(1)$ полной траектории конечно-оптимален не в ценах p^*, а в условных оценках $\mu_{1\,i}$, определенных в § 11.4.

Критерий оптимальности $V \geqq V^{**}$ теперь принял вид

$$\frac{(\gamma^*-\delta)^N (\gamma^*)^{N-M} p^* x(0)}{(\gamma^*-\delta)(\gamma^*)^{N-1} p^* x(0)} \geqq 1.$$

Отсюда $r^{M-1} \leqq 1$.

Поскольку $r > 1$, неравенство имеет единственное решение $M - 1 = 0$, или $M = 1$. Точка $x(0)$ уже лежит на указанном расстоянии ε от x^*. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Если траектория является оптимальной в неймановских ценах и начинается в точке, достаточно близкой к неймановскому лучу, то в течение всех остальных периодов траектория лежит ближе к лучу, чем начальная точка.

В частности, $d[x(1), x^*] < d[x(0), x^*]$. Из принципа оптимальности следует, что если рассмотреть начальную траекторию как начинающуюся из $x(1)$, то она будет конечно-оптимальна в неймановских ценах в течение последующих $N-1$ периодов. По тем же причинам, что и ранее, можно сказать, что

$$d[x(2), x^*] < d[x(1), x^*]$$

и

$$d[x(n+1), x^*] < d[x(n), x^*].$$

Эти неравенства и доказывают утверждение (2) теоремы.

Для доказательства утверждения (3) построим новую образцовую траекторию, совпадающую с траекторией, построенной для утверждения (2), вплоть до $(N-1)$-го периода. Стоимость выпуска в период $(N-1)$ на этой траектории

$$p^* x^* (N-1) = (\gamma^* - \delta)(\gamma^*)^{N-2} p^* x(0).$$

Затем экономика растет до некоторой точки $\mu x(N)$, где пропорции остаются теми же, что и в конечной точке оптимальной траектории. По предположению $d[x(N), x^*] = d[x(0), x^*]$. Будем предполагать, что точка $\mu x(N)$ обладает свойством

$$\mu p^* x(N) = (\gamma^* - \delta) p^* x^* (N-1)$$

по крайней мере в приближении, достаточном для наших целей. На образцовой траектории имеем

$$\mu p^* x(N) = (\gamma^* - \delta)^2 (\gamma^*)^{N-2} p^* x(0).$$

На предполагаемой оптимальной траектории имеем

$$p^* y(N) \leqq (\gamma^* - \delta)^M \quad (\gamma^*)^{N-M} \quad p^* x(0).$$

Здесь мы не используем конечные цены, так как обе конечные точки лежат на одном и том же луче. Траектория оптимальна, только если $\mu \leqq 1$, т. е. если

$$\frac{(\gamma^* - \delta)^2 (\gamma^*)^{N-2}}{(\gamma^* - \delta)^M (\gamma^*)^{N-M}} \leqq 1.$$

Отсюда $r^{M-2} \leqq 1$.

Поскольку $r > 1$, $M = 2$. Однако обе конечные точки лежат на расстоянии ε от x^*. Следовательно, все остальные точки траектории лежат ближе к неймановской траектории, чем крайние. Утверждение (3) теоремы доказано.

Очевидно, что доказательство утверждений (2) и (3) может быть сжато и можно дать общее доказательство этих утверждений.

11.6. ПРИМЕР МАГИСТРАЛИ *)

Общий вид эффективных траекторий роста, установленный теоремой о магистрали предыдущего параграфа, может быть проиллюстрирован приведенным ниже примером. Этот пример можно также рассматривать как пример использования методов вариационного исчисления.

Будем предполагать, что время непрерывно и соотношение преобразования имеет вид

$$T(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) =$$
$$= a^2 (\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2 - b^2 \dot{x}_1^2 [f(\dot{x}_2/\dot{x}_1)^2] = 0, \qquad (11.6.1)$$

где $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$ — скорости выпуска, а $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ — скорости затрат.

Относительно вида функции f будем предполагать только, что $f > 0$, $f' > 0$ и $f'' < 0$.

Очевидно, что T — неоклассическая функция преобразования, линейно однородная, с эллиптической кривой

*) Этот параграф требует использования простых методов вариационного исчисления. Необходимый материал приведен в § Д11.2.

Данный пример был построен, но не опубликован автором несколько лет тому назад. Начальный вариант примера содержал ошибку, на которую автору указал Самуэльсон.

производственных возможностей и неоклассическими кривыми одинаковых объемов.

Сделаем следующие предположения о динамике системы:

$$\dot{x}_1(t) = k_1 y_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = k_2 y_2(t). \tag{11.6.2}$$

Мы отождествляем $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$ с темпами возрастания запасов продуктивных ресурсов и предполагаем, что затраты меняются пропорционально запасам ресурсов.

Принятый здесь частный вид функции преобразования позволяет произвести замену переменных для того, чтобы получить почти явное выражение для траекторий эффективного роста. Сделаем следующую замену переменных:

$$y_1 = (1/a)\, e^u \cos v,$$
$$y_2 = e^u \sin v \text{ *)}. \tag{11.6.3}$$

Последнее соотношение вместе с (11.6.2) позволяет переписать выражение (11.6.1) в виде

$$(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 = \{(bk_1/a)(\cos v)\, f\,[(ak_2/k_1)\operatorname{tg} v)\}^2. \tag{11.6.4}$$

Обозначим выражение справа в фигурных скобках через $[\varphi(v)]^{-1}$ (причина выбора отрицательной степени станет ясной позже), а $\dot{v}/\dot{u}$ — через v' ($=dv/du$). Тогда (11.6.4) примет вид

$$\dot{u} = [1 + (v')^2]^{-1/2}\,[\varphi(v)]^{-1}. \tag{11.6.5}$$

Поскольку v зависит только от отношения y_1/y_2, то в случае сбалансированного роста $v' = 0$. Параметр u — показатель степени экспоненты в выражениях (11.6.3). Поэтому темп сбалансированного роста задается величиной $\dot{u}$. Таким образом, для сбалансированного роста в пропорциях, заданных вектором v, темп роста получается из (11.6.5) и равен

$$g(v) = \dot{u} = [\varphi(v)]^{-1}.$$

Легко показать, что всегда существует некоторая точка v^*, в которой $g'(v^*) = 0$ и $g''(v^*) < 0$. Следовательно,

---

*) Эта замена эквивалентна растягиванию или сжатию по оси y_1, позволяющему получить кривые производственных возможностей в виде окружностей. Затем производится переход к полярным координатам и, наконец, логарифмирование радиуса-вектора.

темп роста достигает строгого максимума в точке v^*, координаты которой можно отождествить с *неймановскими пропорциями*.

Интегрируя (11.6.5), получим в явном виде

$$t = \int [1 + (v')^2]^{1/2} \varphi(v)\, du, \qquad (11.6.6)$$

где интеграл взят по некоторой допустимой траектории между заданными концами. Траектория между заданными концами, отвечающая минимальному времени, будет эффективной. Другими словами, траектория, на которой минимален интеграл (11.6.6), эффективна. Приведенный пример иллюстрирует *первую задачу вариационного исчисления* (см. § Д11.2). Обозначим через F подынтегральное выражение. Заметим, что u не входит явно в F, и мы имеем случай (2) теоремы Эйлера. В этом случае имеем уравнение *)

$$F - v' F_{v'} = c,$$

где c — постоянная интегрирования. В нашем случае $F_{v'} = [1 + (v')^2]^{-\frac{1}{2}} v' \varphi(v)$. Поэтому после некоторых преобразований уравнение Эйлера примет вид

$$[1 + (v')^2]^{-1/2} \varphi(v) = c.$$

Решим это уравнение относительно v'. Получим условие эффективности для рассматриваемой задачи

$$v' = \left\{ \frac{[\varphi(v)]^2}{c^2} - 1 \right\}^{1/2}. \qquad (11.6.7)$$

Это выражение, вообще говоря, не может быть проинтегрировано в элементарных функциях. Однако из (11.6.7) можно получить свойства эффективных траекторий, поскольку это соотношение определяет наклон траектории как функцию от v — вектора пропорций запасов — и произвольной константы c. Каждому значению c соответствует своя траектория. Эффективная траектория, проходящая через некоторую точку, однозначно определяется при помощи c и начального значения v в этой точке.

---

*) В случае непрерывного времени уравнение Эйлера эквивалентно условию «межвременной эффективности» (§ 11.3). Подчеркнем, что здесь независимой переменной является u, а не t, как в § Д11.2.

Напомним, что максимальный темп роста $g(v) = [\varphi(v)]^{-1}$ достигается при неймановских пропорциях, так что $\varphi(v)/\varphi(v^*) \geqq 1$ для всех v. Таким образом, при $c \leqq \varphi(v^*)$ для каждого v существует действительное значение v'. Соответствующая траектория может проходить через любую заданную точку. При $c > \varphi(v^*)$ не существует действительных v' для $v = v^*$ и для некоторой окрестности v^*. Соответствующая траектория не может пересекать неймановский луч и не может касаться его. Однако существуют такие точки $\bar{v}$ и $\underline{v}$, при которых $\varphi(\bar{v}) = \varphi(\underline{v}) = c$ ($v' = 0$ для этих значений v). Для $v \geqq \bar{v}$ и $v \leqq \underline{v}$ существуют действительные значения v'. Следовательно, имеются эффективные траектории, соответствующие таким значениям c.

Из (11.6.7) можно вычислить v'':

$$v'' = \frac{\varphi(v)}{c^2}\varphi'(v). \tag{11.6.8}$$

Функция $\varphi(v)$ $[=1/g(v)]$ достигает минимума при неймановских пропорциях. Это значит, что $\varphi'(v) \gtreqless 0$, если $v \gtreqless v^*$. Поэтому *эффективные траектории выпуклы в сторону неймановского луча* (как снизу, так и сверху). Траектории, пересекающие неймановский луч, будут иметь перегиб в точке пересечения. Траектории, не пересекающие неймановский луч, будут выпуклы по направлению к лучу. Ближайшей к лучу точкой будет $\bar{v}$ (для траекторий, начинающихся из $v_0 > v^*$) или $\underline{v}$ (для траекторий, начинающихся из $v_0 < v^*$).

Пусть $\varphi(v) \neq 0$. Тогда $v'' = 0$ в том и только в том случае, когда $\varphi'(v) = 0$. Последнее справедливо только при $v = v^*$. Таким образом, единственной эффективной траекторией сбалансированного роста конечной длины ($v' = v'' = 0$) является сам неймановский луч (соответствующая часть). Все другие траектории, для которых $c > \varphi(v^*)$, имеют $v' = 0$ при $v = \bar{v}$ или $v = \underline{v}$, однако $v'' \neq 0$ в этих точках. Следовательно, они только один раз касаются луча в точке $\bar{v}$ или $\underline{v}$ и не содержат общего отрезка с лучом.

Наконец, заметим, что (11.6.7) задает как положительное, так и отрицательное значение v' для данного v. Следовательно, траектории, для которых $c > \varphi(v^*)$, симметричны относительно оси, проходящей через точку, ближайшую к неймановскому лучу, параллельно оси v.

Подытожим теперь материал, полученный для описания эффективных траекторий. При данной начальной точке

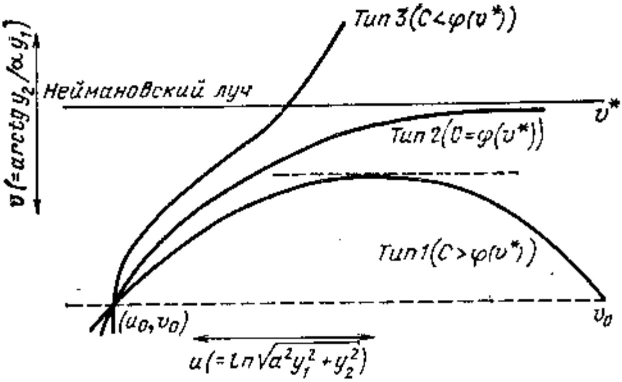


Рис. 11.3. Типы эффективных траекторий.

каждое значение c определяет единственную эффективную траекторию. Каждая траектория принадлежит одному из трех типов:

Тип 1. $c > \varphi(v^*)$. Траектория непрерывно искривлена и выпукла по направлению к неймановскому лучу. Траектория не достигает неймановского луча. Ближайшей к лучу точкой траектории является точка $\underline{v}$ (предполагается, что $v_0 < v^*$) такая, что $\varphi(\underline{v}) = c$. Такая траектория полностью лежит с той стороны от неймановского луча, с которой расположена начальная точка.

Тип 2. $c = \varphi(v^*)$. В этом случае $\underline{v} = v^*$. Следовательно, траектория достигает неймановского луча. Однако $v' = 0$ при $v = v^*$. Поэтому траектория не пересекает луч. Можно показать, что такая траектория не достигает неймановского луча за конечный период времени. Траектория асимптотически стремится к лучу, если только v^* не равно v_0. При $v_0 = v^*$ траекторией является сам неймановский луч.

Тип 3. $c < \varphi(v^*)$. В этом случае v' имеет действительные значения при всех v. Следовательно, траектория пересекает лучи, отвечающие любым пропорциям. Поскольку $v' \neq 0$ для любого v, то траектория пересекает неймановский луч под углом. У неймановского луча $v'' = 0$, следовательно, знак кривизны траектории меняется в точке пересечения с неймановским лучом (траектория, выпуклая вверх до пересечения, становится выпуклой вниз после пересечения с лучом). В этом случае концы траектории лежат по разные стороны от неймановского луча. Может быть также случай, когда один конец траектории лежит на неймановском луче.

Заметим, что траектории, определяемые произвольной точкой и заданным значением c, простираются бесконечно в обе стороны. Траектория частной задачи, заданной концами, есть часть полной траектории, на которой лежат концы.

Три типа траекторий показаны на рис. 11.3. Здесь u и v изображены как прямоугольные координаты. Если вернуться снова к переменным y_1, y_2, получим траектории, подобные траекториям, изображенным на рис. 11.2.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Читателю, не сделавшему это ранее, рекомендуем прочесть гл. 12 книги Дорфмана, Самуэльсона и Солоу; работы Хана и Мэтьюза; Купманса [4]. Затем целесообразно изучить теорему о магистрали Моришимы (Моришима [1], гл. VI), которая следует из § 10.4 предыдущей главы, Мак-Кензи [6] и вернуться к литературе, указанной ранее.

12. УСТОЙЧИВОСТЬ

Глава требует знакомства с дифференциальными уравнениями (дополнение Д10), а также со свойствами доминантных матриц (дополнение Д7, § Д7.4).

12.1. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ *)

Понятие «устойчивость» так же, как и понятие «равновесие», интуитивно ясно каждому исследователю. Эти понятия должны быть определены в каждом конкретном случае. Некоторая общая идея способов использования понятия «устойчивость» приведена ниже.

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой характеризуется траекторией

$$y(t) = ae^{\alpha t} + be^{\beta t} + c,$$

где $y(t)$ — скалярная функция, а α и β — действительные числа.

Траектория, описанная этим уравнением, представляет различные типы экономических моделей. Рассмотрим две модели.

а) *Статическая модель*, стремящаяся к состоянию равновесия при $t \to \infty$.

Можно интерпретировать c как равновесное значение $y(t)$. Константы a и b определяются начальными условиями $y(0)$, $Dy(0)$. Очевидно, что $y(t) \to c$ при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha, \beta < 0$. Не возникает сомнения в том, чтобы назвать систему устойчивой, если $\alpha, \beta < 0$, и неустойчивой, если либо α, либо β положительно.

б) *Модель роста*. Можно интерпретировать эту модель, скажем, как модель мультипликатора-акселератора.

---

*) Простые модели устойчивости рынка обсуждались во многих работах, связанных с установлением цен, например у Баумоля [1] и [2]. Карлин [1] рассматривает на более современном уровне различные варианты представленных здесь моделей. Поэтому дальнейшее чтение желательно было бы начать с Карлина. Моришима [1] обсуждает устойчивость рынка с несколько другой точки зрения.

Пусть $\beta > 0$. С точки зрения пункта а) модель неустойчивая. Однако с точки зрения б) все такие процессы являются установившимися процессами роста.

Предположим, что мы рассматриваем траекторию $be^{\beta t}$ как *равновесную* траекторию роста. Здесь мы попытаемся установить целесообразность понятия устойчивости.

Определим величины, естественные для анализа экономической системы как модели роста. Темп роста $g(t)$:

$$g(t) = [1/y(t)]\, Dy(t) = \frac{a\alpha e^{\alpha t} + b\beta e^{\beta t}}{ae^{\alpha t} + be^{\beta t} + c} =$$

$$= \frac{(a/b)\,\alpha e^{(\alpha-\beta)t} + \beta}{(a/b)\,e^{(\alpha-\beta)t} + 1 + (c/b)\,e^{-\beta t}}.$$

Отклонение от равновесия $h(t)$:

$$h(t) = y(t) - be^{\beta t} = ae^{\alpha t} + c.$$

Как видим, $g(t) \to \beta$ при $t \to \infty$, если $\alpha - \beta < 0$. Так как $\beta > 0$, то последнее неравенство возможно и при $\alpha > 0$. Таким образом, можно было бы сказать, что система устойчива при $0 < \alpha < \beta$, поскольку при этих условиях *равновесный темп роста* устойчив. С другой стороны, можно считать, что система неустойчива при этих условиях, так как отклонение от равновесной траектории роста $[h(t)]$ возрастает при росте t, если $\alpha > 0$. Однако же *приведенное отклонение* от равновесной траектории $[h(t)/be^{\beta t}]$ сходится к нулю при $0 < \alpha < \beta$. Если же $\alpha < 0$, то $h(t) \to c$ при $t \to \infty$.

Можно ли это состояние рассматривать в качестве устойчивого *)? Одна и та же математическая модель может иметь несколько различных критериев устойчивости, зависящих от содержательного смысла модели. Подчеркнем, что определение устойчивости зависит от определения равновесия.

Пусть имеется некоторая траектория $y^*(t)$, которая рассматривается как равновесная траектория. Здесь y —

---

*) Фактически, мы показали устойчивость неймановской траектории роста из § 11.5 предыдущей главы. Здесь мы не будем обсуждать подробнее проблемы устойчивости роста. Свойства устойчивости односекторной модели роста смотри, например, у Й о р г е н с о н а.

точка из R^n. Предположим также, что существуют и другие траектории, функционально связанные с $y^*(t)$. Тогда обычно говорят, что система *устойчива*, если каждая траектория $y(t)$ при возрастании t в конечном счете входит в некоторую ограниченную область, содержащую $y^*(t)$, и остается в ней. Говорят, что система *асимптотически устойчива*, если эта область является окрестностью $y^*(t)$. В приведенном ранее примере роста мы сказали бы, что $y(t)$ устойчива при $\alpha < 0$, так как $y(t)$ сходится к $y^*(t) + c$, и асимптотически устойчива при $\alpha < 0$ и $c = 0$. С другой стороны, можно произвести замену переменных $z(t) = y(t)/y^*(t)$, $[y^*(t) = be^{\beta t}]$, $z^*(t) = 1$; тогда $z(t) \to z^*(t)$ при $t \to \infty$. Следовательно, преобразованная система асимптотически устойчива при любых c и $0 < \alpha < \beta$. Таким образом, нельзя просто механически использовать определения устойчивости. Необходимо связывать эти определения с рассматриваемой задачей.

Существует ряд терминов, широко используемых при обсуждении устойчивости. Термины «слабая» и «сильная устойчивость» применяются часто вместо терминов «устойчивость» и «асимптотическая устойчивость». Кроме того, в литературе используется и ряд других терминов, в частности термин «регулярная устойчивость». Для каждой модели используемый термин должен быть четко определен.

При анализе устойчивости экономических систем весьма важны понятия *глобальной* и *локальной* устойчивости. Система глобально устойчива, если свойство устойчивости выполняется для всех траекторий системы внутри всей области, в которой исследуется система. Система локально устойчива, если свойство устойчивости установлено только для траекторий, лежащих «вблизи» (в некотором подходящем смысле) равновесной траектории.

Трудоемкость исследования системы возрастает при существовании нескольких равновесных состояний. Во многих экономических моделях равновесным может быть множество точек, а не единственная точка. Это тот случай, когда приходится иметь дело с равновесными ценами в моделях рынка. При анализе ряда моделей естественно ожидать, что, если цены p^* приводят рынок в равновесие, то и цены λp^* также являются равновесными ценами для всех $\lambda > 0$. Обычно процесс установления цен считается устойчивым, если он сходится к λp^* для любого $\lambda > 0$.

12.2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Существуют два основных метода анализа устойчивости — *метод вычисления явного решения* и *метод Ляпунова*. При обсуждении обоих методов будем предполагать, что:

а) система представляется в виде разностных или дифференциальных уравнений;

б) проведена, если в этом была необходимость, замена переменных для того, чтобы в состоянии равновесия имело место $y^*(t) = 0$. То есть поведение системы описывается в переменных, представляющих собой отклонения от равновесия.

Если соответствующие дифференциальные или разностные уравнения могут быть решены, мы получаем функцию $y(t)$. Тогда поведение $y(t)$ при возрастании t может быть исследовано непосредственно. В частности, если рассматриваемая система является линейной системой с постоянными коэффициентами, то решение имеет вид

$y(t) = \sum k_j e^{\lambda_j t} v^j$ (решение дифференциального уравнения),
$y(t) = \sum k_j (1+\lambda_j)^t v^j$ (решение разностного уравнения),
где λ_j — характеристические корни матрицы системы (или соответствующего полинома). Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$Re(\lambda_j) < 0 \text{ для всех } j$$

(случаи дифференциального уравнения),

$$|1+\lambda_j| < 1 \text{ для всех } j$$

(случай разностного уравнения).

В практических приложениях не всегда легко указать подходящий критерий, гарантирующий выполнение условий устойчивости, если численные значения параметров не заданы. В теории устойчивости электрических цепей и теории автоматического регулирования широко используется ряд методов, позволяющих выяснить при заданных численных значениях параметров задачи, является ли решение устойчивым или нет. В экономических моделях мы редко располагаем информацией подобного рода. Поэтому мы должны основывать свои выводы на свойствах матрицы системы. Наиболее полезным свойством таких матриц является наличие мажорирующей диагонали. Результаты, полученные для таких матриц (§ Д7.4), важны для анализа моделей рынка. В следующем параграфе эти результаты будут использоваться.

Если система описывается линейными уравнениями с непостоянными коэффициентами или нелинейными уравнениями, то методы непосредственного решения используются редко. Анализ устойчивости системы по явному решению проводится лишь для некоторых специальных классов уравнений. Единственным методом непосредственного решения, который обычно применяется в экономических исследованиях линейной системы с непостоянными коэффициентами, является *аппроксимация* системы более простой системой с постоянными коэффициентами. Существующие методы вычислений позволяют получить линейную аппроксимацию вблизи состояния равновесия. Любая устойчивость, которая таким образом установлена, является необходимо *локальной* устойчивостью. До 1950 г. все теоремы устойчивости в экономике для нелинейных систем были локальными, полученными указанным методом.

Наиболее сильным аппаратом исследования устойчивости является метод Ляпунова *). Оригинальная статья Ляпунова была опубликована в 1892 г. (в России, французский вариант был опубликован в 1907 г.). Однако в англо-американскую литературу по анализу устойчивости этот метод проник только после второй мировой войны. Достоинство метода Ляпунова состоит в том, что для исследования устойчивости нет необходимости в вычислении решения уравнений системы.

Метод, который будет здесь рассматриваться, называется *вторым методом Ляпунова*. Первый метод требует явного решения уравнений. Метод (второй) состоит в следующем. Мы пытаемся найти некоторую *скалярную* функцию $V(y)$, обладающую четырьмя указанными ниже свойствами. Первые три свойства определяются соотношениями:

1) $V(y) \in C^1$,

2) $V(y) \geqq 0$ для всех y,

3) $V(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$.

Такая функция является *положительно определенной функцией*. Простым примером такого вида функций являет-

---

*) Подробное изложение метода Ляпунова приводится у Л а с с а л я и Л е ф ш е ц а.

См. также П о н т р я г и н Л. С., П е т р о в с к и й И. Г. (*Прим. перев.*)

ся $y'y$ — евклидова норма y (в следующем параграфе будет использоваться именно такая функция). Более общий пример — функция $y'Ay$, где A — положительно определенная матрица. Важно заметить, что $V(y)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам нормы. Поэтому $V(y)$ можно рассматривать как обобщенную норму y.

Мы привели три желаемых свойства функции $V(y)$. Чтобы получить четвертое, заметим, что V — функция аргумента y, а y — функция от t. Следовательно, V зависит от t и является характеристикой динамической системы. Применяя правило дифференцирования, получим

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt},$$

или в векторной форме

$$\dot{V} = \nabla V \cdot Dy\ ^{*)}.$$

Последнее свойство функции V состоит в следующем:

4а) $\dot{V} \leqq 0$,

или

4б) $\dot{V} < 0$.

Любая функция, обладающая свойствами 1) — 4), называется *функцией Ляпунова*. Заметим, что свойства 1) — 3) не связаны с динамикой системы. При использовании метода Ляпунова трудность состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую 1) — 3), которая удовлетворяла бы также и 4).

Пусть система представлена, как это и будет обычно в интересующих нас примерах, в виде

$$Dy(t) = F[y(t)].$$

Тогда в выражении для $\dot{V}$ можно заменить Dy и получить

$$\dot{V} = \nabla V \cdot F(y).$$

Так что $\dot{V}$ выражается непосредственно через y.

Ради чего же разыскивается функция Ляпунова? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема устойчивости.

Теорема устойчивости Ляпунова. *Если для системы существует функция Ляпунова, то систе-*

---

*) Обозначение $\dot{V}$ будет использоваться для dV/dt, так как символ DV легко спутать с произведением матриц.

ма устойчива. Если, кроме того, функция удовлетворяет сильному условию (4б), *то система асимптотически устойчива.*

Мы не будем приводить здесь строгого доказательства этого утверждения. Однако эвристическое доказательство сильного варианта теоремы Ляпунова не представляет труда.

Пусть $y(0) \neq 0$. Тогда $V(0) > 0$.

Поскольку $\dot{V} < 0$, V убывает по t и стремится к нулю при $t \to \infty$. Однако если $V = 0$, то $y = 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива.

Будем называть функцию, удовлетворяющую условиям 1) — 3) и 4а), *слабой* функцией Ляпунова, а функцию, удовлетворяющую условиям (1) — (3) и 4б) — *сильной* функцией Ляпунова.

Принцип Ляпунова может быть применен к системам разностных уравнений. Однако наибольшее применение он получил для анализа устойчивости систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка. Это объясняется простотой выражения для V в этом случае.

12.3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЫНКА *)

В настоящее время опубликовано достаточно много теорем по устойчивости конкурентных рынков. Три представленных здесь примера выбраны так, чтобы проиллюстрировать как метод Ляпунова, так и метод явного решения. Кроме того, примеры демонстрируют требования, необходимые для того, чтобы обосновать устойчивость системы разностных уравнений. Эти требования более жесткие, чем требования, гарантирующие устойчивость системы дифференциальных уравнений.

Во всех случаях предполагается, что динамическое поведение рынка выражается соотношением, имеющим одну из следующих форм:

$$Dp(t) = Kz[p(t)], \qquad (1а)$$

$$\Delta p(t) = Kz[p(t)], \qquad (2а)$$

*) Основными работами по современному анализу устойчивости рынка являются работы Эрроу и Гурвица [1] и [3]; Хана; Эрроу; Блока и Гурвица и Удзавы. Карлин [1] в гл. 9 дает много примеров теорем того же типа, что и рассматриваемые здесь.

где $z[p(t)]$ — вектор избыточного спроса в ценах $p(t)$, а K — диагональная матрица с положительными диагональными элементами.

В дифференциальном уравнении (1а) цена на i-м рынке меняется *мгновенно* как реакция на возникновение избыточного спроса на этом рынке. Поскольку $k_i > 0$, скорость изменения цены положительна, если избыточный спрос положителен, и отрицательна, если избыточный спрос отрицателен. Фактическая скорость изменения цены пропорциональна величине избыточного спроса. Коэффициент пропорциональности k_i можно интерпретировать как *скорость реакции*.

В разностном уравнении имеем $\Delta p(t) = p(t+1) - p(t)$. Следовательно, цены реагируют на избыточный спрос со сдвигом на период. Изменение $\Delta p(t)$ цены от момента t к моменту $t+1$ связано с избыточным спросом, зафиксированным в момент t таким же образом, как и мгновенная скорость dp/dt в случае дифференциального уравнения.

В случае запаздывания реакции было бы более естественно рассматривать k_i как *интенсивность реакции*, поскольку скорость реакции зависит и от длины периода.

Заметим, что при обсуждении рыночного равновесия мы предполагали возможным существование целого множества $Z(p)$ векторов избыточного спроса, связанных с каждым вектором цен. Здесь будет предполагаться существование единственной точки $z(p)$. Кроме того, заметим, что процесс управления, подразумеваемый уравнением (1а) либо (1б), не аргументирован какими-либо экономическими соображениями. Уравнения (1а) и (1б) представляют собой некоторые произвольные предположения о поведении экономической системы. Хотя эти процессы достаточно правдоподобны, мы должны осознавать, что *не существует фундаментальной теории, связанной с поведением лиц, принимающих решение в экономике, вне состояния равновесия. Существует только теория поведения в состоянии равновесия.*

Наконец, заметим, что динамические уравнения *агрегированы*. В уравнениях отсутствуют указания об индивидуальных избыточных спросах и об их влиянии на изменение цен.

Прежде чем продолжить, мы должны прерваться, чтобы исследовать некоторые трудности, связанные с единицами измерения. Каждая компонента z_i измерена в собственных, вообще говоря, произвольных единицах. Можно упростить задачу, сделав изменение единиц, при которых отношение избыточного спроса к реакции будет одним и тем же для всех рынков. Следовательно, системы можно будет рассматривать в виде

$$Dp(t) = \mu z[p(t)], \tag{1б}$$

$$\Delta p(t) = \mu z[p(t)], \tag{2б}$$

где μ — положительный скаляр, представляющий скорость или интенсивность реакции, а p, z взяты в подходящих новых единицах.

Другие проблемы, связанные с единицами измерения, возникают из однородности нулевой степени избыточного спроса как функции цен. Отсюда $z(\lambda p) = z(p)$ $(\lambda > 0)$. В частности, равновесные цены задаются не точкой p^*, а лучом λp^*. Обойти эту трудность можно, например, при помощи нормализации цен. Это может быть сделано, как и при исследовании общего равновесия (гл. 9), введением чисто математической нормы. Тем не менее при анализе устойчивости обычно следуют Вальрасу и выбирают один продукт (скажем, n-й) в качестве *масштабного* (numeraire). Тогда n-мерный вектор p заменяется нормализованным $(n-1)$-мерным вектором $\hat{p}$, где $\hat{p}_i = p_i/p_n$. При этом p и λp соответствуют одному и тому же нормализованному вектору $\hat{p}$. Функции избыточного спроса $z_i(p)$ — однородные степени нуль. Поэтому $z_i(p) = z_i(\hat{p}, 1)$ для всех i. Нормализованную систему можно переписать в виде

$$D\hat{p}(t) = \mu\hat{z}[\hat{p}(t)], \tag{1в}$$

$$\Delta\hat{p}(t) = \mu\hat{z}[\hat{p}(t)]\ ^{*}). \tag{2в}$$

Будем называть систему 1в) — 2в) *нормализованной*, а систему (1б) — (2б) — *ненормализованной* системой.

Теперь можно перейти к исследованию теорем устойчивости.

Теорема 1. *Пусть всюду справедливы закон Вальраса и агрегированная аксиома выявленного предпочтения.*

---

*) μ в (1б) и (1в) различные. Естественно, что при такой нормализации масштабный продукт никогда не бывает в избыточном предложении и $p_n \neq 0$.

Тогда модель, описанная ненормализованными дифференциальными уравнениями, глобально устойчива *).

Здесь будет использоваться метод Ляпунова. Прежде всего установим суть двух основных предположений. Обозначим через p^* равновесный вектор цен, а через p — любой вектор цен. Поскольку система ненормализованная, то λp^* является равновесным вектором цен при любом $\lambda > 0$. Будем считать систему устойчивой, если она устойчива при ценах λp^* для любого $\lambda > 0$.

Закон Вальраса утверждает, что для всех p:

$$p \cdot z(p) = 0.$$

Агрегированная аксиома выявленного предпочтения утверждает, что для любых p, p', связанных так, что $pz(p') \leqq pz(p)$, выполняется $p'z(p) \geqq p'z(p')$, причем равенство имеет место только в случае $z(p) = z(p')$ (штрих не означает транспонирование). Пусть $p' = p^*$. Тогда $z(p^*) \leqq 0$ (по определению равновесия) и $p \cdot z(p) = 0$ (закон Вальраса). Следовательно,

$$p \cdot z(p^*) \leqq 0 = p \cdot z(p).$$

То есть p, p^* удовлетворяют первому неравенству аксиомы выявленного предпочтения. Тогда мы должны иметь

$$p^* z(p) \geqq p^* z(p^*) \geqq 0 \text{ (определение равновесия).}$$

Последнее неравенство справедливо для всех цен p.

Построим теперь положительно определенную функцию, связанную с евклидовой нормой отклонения $p(t)$ от p^*,

$$V(t) = \frac{1}{2}[p(t) - p^*][p(t) - p^*]'.$$

Построенная функция отличается от обычной функции Ляпунова тем, что

$$V(p) = 0 \text{ как для } p = p^*, \text{ так и для } p = \lambda p^*.$$

Градиент функции V равен

$$\nabla V = [p(t) - p^*].$$

Тогда

$$\dot{V} = \nabla V D p(t) = \mu [p(t) - p^*] D p(t) = (\text{из } 1б)$$
$$= \mu [p(t) - p^*] z[p(t)] =$$

*) Эта теорема впервые упоминалась у Эрроу, Блока и Гурвица. См. также, Карлин [1].

$$= \mu p(t) z[p(t)] - \mu p^* z[p(t)] =$$

$$= -\mu p^* z[p(t)] \text{ (из закона Вальраса).}$$

Однако уже было показано, что $p^* z[p(t)] \geqq 0$. Следовательно, $\dot{V} \leqq 0$ и V есть *слабая* функция Ляпунова. Таким образом, система устойчива (но не асимптотически устойчива).

Пусть состояние равновесия единственно, т. е. $z(p) \neq \neq z(p')$, если $p \neq \lambda p'$ [из того, что $pz(p') \leqq pz(p)$ следует, что $p'z(p) > p'z(p')$, если $p \neq \lambda p'$]. Тогда можно получить сильную функцию Ляпунова и прийти к следующему утверждению.

Если равновесие единственно, то система асимптотически устойчива в смысле сходимости к λp^* для некоторого $\lambda > 0$ *).

Поскольку мы не использовали никаких ограничений относительно величины нормы V, то доказанная выше устойчивость является *глобальной* устойчивостью.

Теорема II. *Пусть справедлив закон Вальраса, и все продукты нормальные* **). *Если все продукты являются валовыми заменителями друг друга, причем для каждого продукта имеет место сильная заменимость его масштабным продуктом, тогда нормализованная модель* (1в), *описанная дифференциальными уравнениями, является локально асимптотически устойчивой* ***).

Вначале эта теорема приводилась как пример использования локальной линейной аппроксимации и свойств матриц с мажорирующей диагональю. Теперь при тех же условиях можно показать глобальную устойчивость, что исключает необходимость в доказательстве локальной устойчивости.

Говорят, что j-й продукт является *валовым заменителем* i-го продукта, если $\partial z_j / \partial p_i \geqq 0$, т. е. если избыточный спрос на j-й продукт не падает при возрастании цены i-го про-

---

*) Отсюда следует, что нормализованная система асимптотически устойчива при приведенных выше условиях (сходимость к p^*).

**) Автор под нормальными продуктами понимает продукты, для которых $\partial z_i / \partial p_i < 0$. (*Прим. перев.*)

***) Эта формулировка теоремы приведена у Эрроу, Гурвица и Хана. Доказательство глобальной устойчивости при почти тех же предположениях приводится у Эрроу, Блока и Гурвица и у Удзавы.

дукта. Если же частная производная $\partial z_j/\partial p_i$ строго положительна, то j-й продукт является *сильным* валовым заменителем i-го. Термин «*валовый*» связан с тем, что мы измеряем суммарный рыночный эффект с учетом влияния доходов, распределения и т. д.

Рассмотрим уравнение управления ценами

$$D\hat{p}(t) = \mu\hat{z}[\hat{p}(t)].$$

Каждая компонента $\hat{z}_i$ предполагается непрерывной функцией ($\in C^1$) цен. Поэтому можно построить линейную аппроксимацию вблизи точки равновесия следующим образом:

$$\hat{z}_i(\hat{p}) - \hat{z}_i(\hat{p}^*) = \nabla\hat{z}_i^*(\hat{p} - p^*)$$

$$[\hat{z}_i^* \text{ обозначает } \hat{z}_i(p^*)].$$

Обозначим через M матрицу со строками $\nabla\hat{z}_i^*$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n - 1$. Тогда можно записать аппроксимирующий вектор в виде

$$\hat{z}(\hat{p}) - \hat{z}(\hat{p}^*) = M(\hat{p} - p^*).$$

Далее имеем $D(\hat{p} - \hat{p}^*) = D\hat{p}$. Поэтому, если ввести обозначение $u = (\hat{p} - \hat{p}^*)$, то уравнение управления ценами можно будет переписать в линейной форме (для малых отклонений от равновесия)

$$Du(t) = \mu M u(t).$$

Приведенное уравнение и представляет собой векторное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Оно будет асимптотически устойчивым, если все корни матрицы M имеют отрицательные действительные части. В противном случае оно неустойчиво. Величина μ не играет роли в определении устойчивости, поскольку $\mu > 0$.

Задача свелась к исследованию матрицы M, элементы которой равны $\partial\hat{z}_i/\partial\hat{p}_j$. Поскольку каждый продукт нормальный, то матрица имеет отрицательную диагональ. Если бы мы показали, что эта матрица имеет мажорирующую диагональ, то можно было бы для доказательства теоремы воспользоваться результатами дополнения Д7 (§ Д7.4). Из свойств матриц с мажорирующей диагональю устанавливаем, что все корни матрицы с отрицательной диагональю имеют отрицательную действительную часть.

Рассмотрим закон Вальраса

$$pz(p) = 0.$$

Возьмем производную по p_j:

$$z_j(p) + \sum_i p_i \frac{\partial z_i}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В точке равновесия $z_j(p^*) = 0$ для всех j. В соответствии с предположением масштабный продукт является сильным валовым заменителем каждого продукта. Отсюда следует, что $\partial z_n/\partial p_j > 0$ для всех j, и, следовательно, $p_n(\partial z_n/\partial p_j) > 0$.

Таким образом, в равновесной точке

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i^* \left(\frac{\partial z_i^*}{\partial p_j}\right) < 0.$$

Такое же неравенство должно быть справедливо и для нормализованных цен, т. е. имеет место

$$\sum_{i=1}^{n-1} \hat{p}_i^* \left(\frac{\partial \hat{z}_i^*}{\partial \hat{p}_j}\right) < 0.$$

Из условий теоремы следует, что $\partial \hat{z}_j^*/\partial \hat{p}_j < 0$, а $\partial \hat{z}_i^*/\partial \hat{p}_j \geqq 0$ $(i \neq j)$. Следовательно, из верхнего неравенства находим, что

$$\hat{p}_j^* \left|\frac{\partial \hat{z}_j^*}{\partial \hat{p}_j}\right| > \sum_{i \neq j} \hat{p}_i^* \left|\frac{\partial \hat{z}_i^*}{\partial \hat{p}_j}\right|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Полученное условие означает, что матрица M имеет мажорирующую диагональ. Поскольку диагональ отрицательна, все корни M имеют отрицательные действительные части, что и доказывает теорему.

Заметим, что требования к знакам недиагональных элементов необходимы для того, чтобы показать, что диагональ мажорирующая. После того как это сделано, необходимость в учете знаков отпадает. Если бы мы могли другим способом показать, что M имеет мажорирующую диагональ, можно было бы ограничиться случаем, когда недиагональные элементы имеют любые знаки, при которых диагональные элементы отрицательны.

Т е о р е м а III. *Пусть условия теоремы* II *выполняются. Тогда существует такое положительное число* μ_0, *что модель, описанная разностным уравнением* (2в), *локально асимптотически устойчива при* $\mu < \mu_0$ *и неустойчива при* $\mu > \mu_0$ *).

Приведенная теорема рассматривается как иллюстрация важности понятия интенсивности реакции при определении устойчивости модели с замедленной реакцией. В моделях с мгновенной реакцией (теоремы I и II) параметр μ не играет роли. В модели с разностными уравнениями этот параметр важен.

Так же как и в теореме II, построим линейную аппроксимацию вблизи точки равновесия и получим локальное уравнение управления ценами

$$\Delta u(t) = \mu M u(t),$$

где $u(t)$ и M имеют тот же смысл, что и в теореме II.

Из общей теории разностных уравнений (§ Д10.5) известно, что система устойчива тогда и только тогда, когда

$$|1 + \mu\lambda_i| < 1 \quad \text{для всех } i,$$

где λ_i — корни матрицы M.

По определению $|1+\mu\lambda_i|$ имеем

$$\begin{aligned}(|1+\mu\lambda_i|)^2 &= [\mathrm{Re}(1+\mu\lambda_i)]^2 + [\mathrm{Im}(1+\mu\lambda_i)]^2 = \\ &= [1+\mu\,\mathrm{Re}(\lambda_i)]^2 + \mu^2[\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2 = \\ &= 1 + 2\mu\,\mathrm{Re}(\lambda_i) + \mu^2[\mathrm{Re}(\lambda_i)]^2 + \mu^2[\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2] = \\ &= 1 + 2\mu\,\mathrm{Re}(\lambda_i) + \mu^2(|\lambda_i|)^2.\end{aligned}$$

Тогда $(|1+\mu\lambda_i|)^2 < 1$, если

$$2\mu\,\mathrm{Re}(\lambda_i) + \mu^2(|\lambda_i|)^2 < 0,$$

т. е., если

$$\mu < -\frac{2\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}{(|\lambda_i|)^2} \quad (\text{так как } \mu > 0).$$

По предположению, условия теоремы II выполняются. Поэтому для всех корней матрицы M имеет место неравенство $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Это значит, что выражение, стоящее

*) Другая задача с дискретным временем рассматривается у К а р л и н а [1]. Довольно слабая теорема, приведенная здесь, вначале рассматривалась как пример.

справа в верхнем неравенстве, положительно для всех i. Обозначим это выражение через $m(i)$ и введем параметр

$$\mu_0 = \min_i m(i).$$

Очевидно, что μ_0 удовлетворяет требованию теоремы.

Теорема *поучительна*, но *не конструктивна*, так как параметр μ_0 не имеет осязаемой экономической интерпретации. Величина μ_0 не может быть найдена без детального знания свойств матрицы M (хотя интуитивно можно указать для нее некоторые границы). Теорема хорошо иллюстрирует трудности, связанные с анализом устойчивости системы с замедленной и не непрерывной реакцией.

12.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ*)

В этом параграфе изучается задача, отличающаяся от обычных задач на устойчивость. Мы попытаемся построить устойчивую матрицу, исходя из некоторых ее свойств, а не исследовать устойчивость заданной матрицы.

Рассмотрим экономическую систему с n переменными, которые являются основными параметрами экономической политики (уровень занятости, темп изменения уровня цен, баланс платежей и т. д.). Назовем эти переменные *плановыми (целевыми) параметрами*. Предполагается, что существует желаемый уровень, или *планируемая величина*, для каждой переменной. Правительство имеет в своем распоряжении *m инструментов* экономической политики (бюджет — количество денег, темп обмена и т. д.). Будем их называть *параметрами управления*.

Уровень каждой переменной является некоторой функцией уровня различных параметров управления. Обозначим вектор плановых параметров через y, а вектор параметров управления через x. Предположим, что все параметры измеряются в равновесных величинах (планируемые величины для плановых параметров, уровни, определяющие планируемые величины, для параметров управления).

*) Общий тип задач, при исследовании которых появилась необходимость в изучении здесь этих вопросов, приведен впервые Т и н б е р г е н о м. Частная задача, рассмотренная ниже, возникла в работе М у н д е л л а и К у п е р а.

Представляется целесообразным завершить основную часть книги интересной, но не полностью разрешенной задачей.

Тогда существует вектор-функция $F(x)$, такая, что

$$y = F(x).$$

Упростим анализ, полагая, что $m = n$ и что F линейна, либо локально линеаризована вблизи планируемых величин. Тогда система может быть записана в виде

$$y = Ax,$$

где A — квадратная матрица порядка n.

Предполагается, что в системе могут возникать случайные затраты. Следовательно, система должна быть устойчивой относительно равновесия $y = 0$.

В *полностью централизованной* экономике связь между параметрами управления и плановыми параметрами известна. Поэтому здесь не возникает задачи стабилизации (обеспечения устойчивости).

Нас интересует *децентрализованная система* следующего вида:

а) существует n полуавтономных *контролеров* политики (центральный банк, секретариат государственного казначейства и т. д.). Каждый контролер единолично проводит контроль над отдельным параметром управления (центральный банк, например, контролирует количество денег);

б) каждый контролер может менять параметр управления в ответ на изменение единственного планового параметра, за которым ему предназначено наблюдать;

в) центральные плановые органы определяют начальное распределение задач. В частности, центральный орган решает:

(i) какой контролер должен приспосабливать свой параметр управления к какому из плановых параметров;

(ii) в каком направлении контролер может менять параметр управления при заданном направлении отклонения планового параметра от планируемой величины;

г) предполагается, что каждый контролер реагирует без запаздывания и меняет свою стратегию со скоростью, пропорциональной отклонению планового параметра от значения планируемой величины.

При подходящем выборе единиц поведение контролера, отвечающего за i-й параметр, может быть описано соотношением

$$Dx_i = \pm y_j,$$

где знак и номер j задаются из центра.

Так как $y_j = A_j x$, где A_j — j-я строка матрицы A, то поведение всех контролеров может быть описано соотношением

$$Dx = A^{**}x,$$

где матрица A^{**} получена из A некоторой перестановкой строк (но не столбцов), причем знаки всех или некоторых строк изменены.

Очевидно, что модель децентрализованной экономической системы устойчива тогда и только тогда, когда устойчива матрица A^{**}. Рассматриваемая здесь задача состоит не в исследовании устойчивости матрицы A (т. е. не в выяснении вопроса, все ли ее корни имеют отрицательную действительную часть). Мы пытаемся установить, можно ли построить устойчивую матрицу A^{**} из A при помощи перестановки строк и изменения знаков отдельных строк.

Строки матрицы A можно переставлять $n!$ способами. Является ли хотя бы одна из них устойчивой, пусть даже после изменения знаков некоторых строк? Если да, то как найти такую матрицу? Если существует несколько таких матриц, то какая из них в некотором смысле «лучшая»? На последний вопрос мы не будем пытаться отвечать. Рассмотрим первые два вопроса.

Представляется, что наиболее плодотворным подходом является выяснение возможности получить матрицу с мажорирующей диагональю при перестановке строк матрицы A. Если это возможно, то знаки строк меняются таким образом, чтобы получить *отрицательную* мажорирующую диагональ. Тогда устойчивость системы будет обеспечена (см. § Д7.4). Здесь мы используем некоторые свойства мажорирующей диагонали из § Д7.4.

Необходимое условие может быть сразу же сформулировано.

Если матрица A не имеет строки или столбца, содержащих абсолютно мажорирующего элемента (т. е. элемента, превосходящего по абсолютной величине сумму абсолютных величин остальных элементов этой строки или столбца), то матрица A^{**} не может иметь мажорирующей диагонали.

Из § Д7.4 следует, что матрица с мажорирующей диагональю должна иметь по крайней мере один *диагональный* элемент, который является абсолютно мажорирующим в указанном выше смысле.

При выполнении приведенного выще необходимого условия предлагается следующая процедура.

1. Пусть (i, j)-й элемент матрицы A является абсолютно мажорирующим. Перенумеруем столбцы так, чтобы j-й столбец стал первым. Затем выберем i-ю строку в качестве первой в матрице A^* (A^* получается при перестановке строк матрицы A; A^{**} получается из A^* изменением знаков некоторых строк).

2. В результате перенумерации абсолютно мажорирующий элемент матрицы A стал элементом a_{11}^* матрицы A^*. Рассмотрим подматрицу A, полученную при вычеркивании строки и столбца, содержащих a_{11}^*. Эта подматрица (после того как ее строки будут подходящим образом упорядочены) окажется главной подматрицей A^*. Поэтому она должна иметь мажорирующую диагональ, если A^* имеет ее. Следовательно, какая-либо строка (или столбец) подматрицы должна иметь абсолютно мажорирующий элемент (он должен превышать по абсолютной величине сумму абсолютных величин других элементов строки (или столбца) подматрицы. Здесь элемент сравнивается с суммой $n-2$ элементов). Если таких элементов не существует, то A^* не может иметь мажорирующую диагональ. Процедура прекращается.

3. Если же такой элемент существует, то положим a_{22}^* равным ему. Рассмотрим подматрицу $(n-2)$-го порядка из оставшихся строк и столбцов. Поступаем дальше так же, как и в пункте в). Таким образом продолжаем шаг за шагом.

Если A^* *не имеет* мажорирующей диагонали, то процедура может кончиться на некотором шаге, когда необходимое условие для соответствующей матрицы не удовлетворяется. Если A^* *имеет* мажорирующую диагональ, то приведенная выше процедура, конечно, укажет соответствующую перестановку для получения A^*. Можно получить различные перестановки, если на некотором шаге существует более одной строки (или столбца) с абсолютно мажорирующим элементом.

Условия выполняются на каждом шаге. Тем не менее условия являются *необходимыми, но не достаточными*. После того как найдена матрица A^* (или другая), мы должны убедиться, что существует строго положительное решение системы линейных неравенств

$$|a_{ii}^*|\,x_i - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^*|\,x_j > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если последнее условие выполняется, то A^* имеет мажорирующую диагональ. Поменяем, если это необходимо, знаки строк матрицы A^* так, чтобы получить отрицательную диагональ. В результате получим матрицу A^{**}. Матрица A^{**} устойчива, и соответствующая децентрализованная экономическая система окажется работоспособной.

Заметим, что нам необходимо знать *знаки* только тех элементов матрицы A, которые в конце концов стали диагональными элементами матрицы A^*. Таким образом, целесообразно рассматривать системы, в которых «решающие» параметры матрицы A предполагаются известными, а другие заданы с точностью до «$\pm\,\varepsilon$».

ЧАСТЬ IV

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

ДОПОЛНЕНИЕ Д1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Знакомство с материалом этого дополнения (исключая § Д1.6) существенно для всей дальнейшей работы. Материал § Д1.6 не потребуется вплоть до дополнения Д5.

Д1.1. МНОЖЕСТВА

Множество — это набор объектов любого вида, называемых *элементами* множества. Обычно запись $a \in S$ означает, что объект a является элементом множества S, запись $a \notin S$ — что объект a не является элементом S. Если множество *конечно*, т. е. состоит из n элементов, то оно может быть определено перечислением его элементов (например, множество из 50 штатов США: Айова, . . ., Юта) или некоторым свойством, общим для элементов этого множества (например, штаты США). Если множество *бесконечно*, т. е. содержит бесконечное число элементов, то принадлежность множеству определяется по некоторому правилу, указывающему на свойство, которым обладают элементы множества и не обладают элементы, не принадлежащие множеству. Примером такого правила является следующая запись:

$$S = \{x \mid 0 < x < a\},$$

которая означает, что множество S содержит такие и только такие числа x, которые заключены между 0 и a. Символ в скобках слева от черты показывает, как мы обозначаем элементы множества S; справа от черты дано правило, определяющее принадлежность множеству.

Пусть заданы два множества. Связь между ними целиком определяется множеством их общих элементов. Запись $A \subset B$ читается так: A *содержится* в B, или A является *подмножеством* B. Эта запись означает, что каждый элемент множества A является также элементом множества B. Если же $A \subset B$ и $B \subset A$, то оба множества содержат одни и те же элементы, и мы пишем $A = B$. Если $A \subset B$, но $B \not\subset A$, т. е. существуют элементы множества B, не принадлежащие A, то говорят, что A есть *собственное подмножество* множества B.

Пусть даны два или более множеств. Можно определить новые множества, образованные элементами, которые либо принадлежат всем первоначальным множествам, либо, по крайней мере, одному из них. Определим два новых множества.

Пересечением множеств A и B называется множество элементов, которые принадлежат как A, так и B. Пересечение A и B обозначается символом $A \cap B$.

Объединением A и B называется множество элементов, принадлежащих по крайней мере одному из множеств A или B. Объединение A и B обозначается символом $A \cup B$.

Справедливость следующих предложений может быть установлена непосредственно:

$$(A \cap B) \subset A, \quad (A \cap B) \subset B, \quad A \subset (A \cup B), \quad BC\,(A \cup B),$$

$$(A \cap B) \subset (A \cup B),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Как следствие двух последних предложений можно определить объединение и пересечение семейства множеств. Для этого используются обозначения $\bigcap\limits_i A_i; \bigcup\limits_i A_i$, где A_i — множества рассматриваемого семейства.

Для полноты схемы определим *пустое* множество $\varnothing$ как множество, не содержащее элементов. Два множества A и B, такие, что $A \cap B = \varnothing$, называются *непересекающимися*. Непересекающиеся множества не имеют общих элементов. Множества A_i, такие, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$ и $\bigcup\limits_i A_i = A$, образуют *разбиение* множества A (каждый элемент из A принадлежит одному и только одному A_i).

Пустое множество $\varnothing$ и множество $\{0\}$, содержащее единственный элемент — нуль, часто обозначаются одним и тем же символом 0. Однако из текста обычно ясно, какое из этих множеств имеется в виду.

Иногда $A \cap B$ называют *произведением*, или *логическим произведением* A и B, и обозначают $A \cdot B$, а $A \cup B$ называют *суммой*, или *логической суммой*, и обозначают $A + B$. В экономической литературе целесообразно избегать такие обозначения. Большинство множеств в экономике являются векторными множествами, а не множествами обобщенных объектов, и в дальнейшем мы будем придавать обозначениям $A \cdot B$, $A + B$ (а также $A - B$) совершенно иной смысл.

Рассмотрим множества A и B, где A — собственное подмножество множества B. Множество, состоящее из тех элементов B, которые не входят в A, называется *дополнением* A до B. Его обычно записывают $B - A$. По причинам, указанным выше, это обозначение нежелательно, но кроме символа «$\sim$» вместо «—» не существует стандартного обозначения и поэтому иногда оно может использоваться *).

Если множество B настолько широко, что включает в себя все объекты, с которыми имеют дело в рассматриваемой задаче (все допустимые элементы), то оно называется *универсальным множеством*. Дополнение A до универсального множества называется просто *дополнением* A и обозначается через A' или $\bar{A}$. A' есть множество всех допустимых элементов, не входящих в A.

Д1.2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ И ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие порядка интуитивно понятно каждому. Рассмотрим формальные свойства упорядоченности.

Пусть $x, y, z, \ldots$ — элементы множества S. Введем понятие бинарного отношения между элементами S с помощью следующего определения.

R есть бинарное отношение, определенное на S, если для каждой пары элементов $x, y \in S$, где порядок («x — первый элемент») имеет решающее значение, утверждение xRy либо истинно, либо ложно.

---

*) В математической литературе дополнение A до B часто обозначается символом $B \setminus A$. (*Прим. перев.*)

Если, например, S — множество членов некоторого союза, то утверждение «x вступил в союз не позже, чем y», либо истинно, либо ложно, так что отношение «вступил в союз не позже, чем» есть бинарное отношение. Различие между xRy и yRx здесь очевидно. Более общими бинарными отношениями, с которыми мы будем иметь дело, являются отношения, подобные отношениям: «не меньше, чем» (упорядоченность чисел), «каждая компонента... не меньше, чем соответствующая компонента...» (упорядоченность точек или векторов) и «не менее желательный, чем» (предпочтение потребителя).

Бинарное отношение приводит к *полуупорядоченности*, если, кроме того, имеют место следующие свойства:

1) xRx для всех $x \in S$ (рефлексивность),

2) из xRy и yRz следует xRz (транзитивность).

В приведенных примерах бинарные отношения, очевидно, обладают этими свойствами. Если, например, R представляется отношением «вступил в союз не позже, чем», то рефлексивность (член союза вступил в него не позже самого себя) и транзитивность (если член союза x вступил в него не позже, чем y, а член союза y — не позже, чем z, то x вступил в союз не позже, чем z) имеют место.

Рассмотрим теперь множество всех стран и отношение «экспортирует пшеницу в...». Это есть бинарное отношение, и оно может считаться рефлексивным, так как каждую страну можно рассматривать как экспортера пшеницы самой себе. Однако ошибочно полагать, что из того, что «страна A экспортирует пшеницу в страну B», а «страна B экспортирует пшеницу в страну C» следует, что «страна A экспортирует пшеницу в C», т. е. рассматриваемое отношение не обладает свойством транзитивности.

Полуупорядоченность является *упорядоченностью*, если из xRy и yRx следует, что $x = y$. Множество действительных чисел упорядочено в смысле бинарного отношения «$\geqslant$», так как из $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$ следует, что $a = b$. Предпочтение потребителя, с другой стороны, представляет собой типичную полуупорядоченность, так как из двух партий товаров x и y партия x может быть, по крайней мере, так же желательна, как и y, а партия y, по крайней мере, так же желательна, как и x, в то время как партии x и y не идентичны. Если имеют место xRy и yRx, но $x \neq y$, то говорят, что x и y являются *эквивалентными* по отношению к полуупорядоченности R.

Упорядоченность или полуупорядоченность над множеством S называется *совершенной*, если для любых $x, y \in S$ имеем xRy или yRx (или как то, так и другое отношение). В противном случае упорядоченность или полуупорядоченность называется *частичной*. Рассмотрим множество пар в R^2 и бинарное отношение в форме «обе компоненты x не меньше, чем соответствующие компоненты y». Обозначим это отношение xRy. Тогда R, конечно, рефлексивно и транзитивно, а xRy и yRx вместе влекут равенство $x = y$, так что налицо упорядоченность. Если же x и y таковы, что первая компонента x меньше первой компоненты y, а вторая компонента x больше второй компоненты y, то ни одно из отношений xRy и yRx не имеет места и упорядоченность частичная.

Заметим, что строгие отношения порядка, подобные «$>$», не должны использоваться при построении упорядоченности или полуупорядоченности, поскольку для них не справедливо отношение xRx. Мы должны формально вывести строгие отношения, подобные «$>$» или «предпочтительнее, чем» из рефлексивных отношений «$\geqslant$» или, «по крайней мере, также желательно, как». Если обозначить строгое отношение через R^*, то xR^*y тогда и только тогда, когда xRy, но не yRx. Отношение эквивалентности ($x \sim y$ означает, что xRy и yRx) задает бинарное отношение, но ведет лишь к частичной полуупорядоченности.

При рассмотрении предпочтений потребителя иногда удобно пользоваться строгим отношением P («предпочтительнее, чем») и отношением эквивалентности I («безразличие между... и...»). Если $x\bar{P}y$ означает, что «xPy ложно», то, очевидно, $\bar{P}$ есть бинарное отношение. Следовательно, можно использовать $\bar{P}$ для получения полуупорядоченности, а эквивалентность вытекает из истинности двух отношений $x\bar{P}y$ и $y\bar{P}x$.

Д1.3. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВА

Множество *пар* (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$, называется *декартовым произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$. Важно заметить, что элементы $A \times B$ рассматриваются не как два объекта, а как пара объектов. Составляющие пары упорядочены в том смысле, что первый объект всегда берется из первого множества, а второй — из второго.

Очевидно, что $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$, так что можно формировать декартово произведение семейства множеств. Для этого используется обозначение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Элемент этого множества называется *n-мерным* и является аналогом пары, но с n составляющими. Как и в случае $n = 2$, i-я составляющая n-мерного элемента всегда является элементом i-го множества. Составляющие n-мерного элемента называются *компонентами* или *координатами*. Обычно i-ю компоненту записывают в виде a_i $(a_i \in A_i)$, а n-мерный элемент — $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Если порядок a_i не существен, то мы будем писать $a = (a_1, a_2, \ldots, a_3)$, где a скорее множество, нежели n-мерный элемент. С n-мерными элементами мы будем обращаться как с элементами множеств, а не как с множествами, и чаще всего как с точками или векторами.

Термин *пространство* используется в различных смыслах. Пространство, с которым мы чаще всего будем иметь дело, определяется следующим образом. Пусть R — множество всех действительных чисел. Тогда множество, заданное декартовым произведением n множеств $R \times R \times \ldots \times R$, есть действительное n-мерное пространство R^n. Если в R^n введено, кроме того, определенное «расстояние», то оно называется *евклидовым n-мерным пространством* и обозначается через E^n. Мы будем использовать пространства R^n, которые являются в то же время и евклидовыми. Поэтому можно считать пространства R^n и E^n эквивалентными.

Элемент из R^n есть n-мерный элемент, каждая компонента которого является действительным числом. Мы называем элемент из R^n *точкой* или *вектором*.

В некоторых случаях, возникающих главным образом в математических основах экономического анализа, а не в самом экономическом анализе, будем рассматривать пространство C^n, элементами которого являются точки с комплексными компонентами. Мы не будем делать различия между этим пространством и *унитарным пространством* U^n (комплексным аналогом евклидова пространства).

Д1.4. ФУНКЦИИ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ, СООТВЕТСТВИЯ

В литературе существуют различия в истолковании перечисленных в заголовке терминов. В сущности, все четыре термина сводятся к некоторому правилу, связывающему элементы одного множества с элементами другого. «Месяц рождения» может быть правилом, связывающим элементы множества людей с элементами множества месяцев. Здесь мы имеем дело с множествами весьма общего вида. Для определения правила, связывающего элементы таких множеств, мы будем обращаться к термину *отображение*.

Отображение содержит в себе некоторую идею направленного соответствия. Одно из множеств (скажем, S) считается первым. Отображение — правило, которое используется для того, чтобы установить, какой элемент (или элементы) второго множества (S') связаны с данным элементом множества S. Символически будем изображать отображение записью $S \to S'$. В приведенном примере имеет место отображение множества людей (P) в множество месяцев (M); $P \to M$. Для каждого $p \in P$ существует единственный элемент $m \in M$, так как каждый человек родился в каком-то определенном месяце. Элемент $m \in M$, соответствующий p, называется *образом* p при рассматриваемом отображении. Мы будем говорить об отображении, подразумевая при этом отображение P *в* M *).

Рассмотренную выше связь мы могли получить и другим путем, рассматривая правило «люди, рожденные в данном месяце». Это правило задает отображение $M \to P$, т. е. множества месяцев в множество людей. Будем называть отображение $M \to P$ *обратным* к отображению $P \to M$. Заметим, что каждый $m \in M$, вообще говоря, связан с целым множеством элементов $p \in P$, а не с единственным p. В то время как исходное отображение каждому p ставило в соответствие единственный элемент из M, обратное отображение каждому m ставит в соответствие подмножество множества P.

---

*) Говорят, что множество S отображается *на* множество T, если: а) любая точка из S имеет образ в T; б) каждая точка множества T является образом некоторой точки из S.

Множество S отображается в T, если любая точка из S имеет образ в T.

Отображение, которое ставит в соответствие элементу $x \in S$ единственный $y \in S'$, называется *точечным*. Отображение, ставящее в соответствие элементу $x \in S$ подмножество $Y \subset S'$, называется *точечно-множественным* отображением.

Класс отображений, приводящий в соответствие некоторому множеству элементов множество действительных чисел R, играет особую роль в анализе. За этим классом отображений мы закрепим термин *функции*. Таким образом, функция (более строго, вещественная функция, поскольку иногда мы будем иметь дело с функциями, принимающими комплексные значения) есть правило, ставящее в соответствие каждому элементу множества число. Функция полезности — правило, ставящее в соответствие действительные (в данном случае положительные) числа каждому элементу из набора благ. Функция $y = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2$ связывает действительное число y с каждой парой (x_1, x_2) действительных чисел из R^2.

Будем обозначать функцию символом $f(x)$. Из текста должно быть ясно, является ли x действительным числом или n-мерным элементом.

В линейной алгебре мы будем встречаться с классом отображений R^n в R^m. Обычно их называют *линейными преобразованиями*.

Иногда мы будем иметь дело с множеством функций, не обязательно линейных, каждая из которых отображает точку из R^n в число, которое может рассматриваться как координата точки в R^m. Часто бывает удобно рассматривать такое множество функций, как одно отображение точки из R^n в точку из R^m. Такое отображение будем называть *вектор-функцией*.

Для экономических моделей наиболее естественны зависимости, которые представляются точечно-множественными отображениями. Рассмотрим, например, простое бюджетное ограничение

$$p_1x_1 + p_2x_2 = k.$$

Если доход (k) изменяется на некотором множестве K, то каждое значение k связано с множеством точек (x_1, x_2) так, что отображение K в X — точечно-множественное. Такие отображения иногда называют также *соответствиями* или *многозначными функциями*.

Анализ точечно-множественных отображений требует специального математического аппарата (см. Д9).

Говорят, что в пространстве S определена *метрика* или *расстояние*, если для любых двух точек $x, y \in S$ существует действительное неотрицательное число $d(x, y)$, такое, что

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$,

и для любых трех точек $x, y, z \in S$ справедливо *неравенство треугольника*,

3) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.

Хорошо известной метрикой является *евклидово расстояние*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}.$$

Хотя в экономическом анализе рассматриваются главным образом евклидовы пространства, мы в этом параграфе потребуем только, чтобы пространство обладало некоторой метрикой.

При заданной метрике определим *окрестность* точки $x \in S$ как множество всех точек y, для которых $d(x, y) < \varepsilon$, где ε — действительное положительное число, которое обычно предполагается достаточно малым.

Говорят, что множество $T \subset S$ *открыто*, если каждая точка $x \in T$ имеет некоторую окрестность (с достаточно малым ε), которая целиком лежит в T. Множество $X = \{x \mid 0 < x < 1\}$ открыто, так как для любой точки $x = (1 - h) \in X$ и расстояния $d(x, y) = |x - y|$ окрестность $u_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ при $\varepsilon < h/2$ полностью состоит из точек множества X. Между строгим неравенством ($>$) и открытыми множествами существует важная в экономических приложениях связь.

Говорят, что $y \in S$ есть *предельная точка* (или *точка накопления*) множества T, если любая окрестность точки y содержит некоторую точку множества T, отличную от y *). В упомянутом выше множестве X каждая точка этого множества является предельной. Точки 0 и 1, которые не принадлежат X, также являются предельными точками этого множества. С другой стороны, элементы конечного мно-

*) В математической литературе предельная точка множества иногда определяется следующим образом. Точка $y \in S$ называется предельной точкой множества T, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек из T. Однако нетрудно показать эквивалентность этих двух определений. (*Прим. перев.*)

жества $\{0, 1, 2\}$ не являются его предельными точками, и вообще это множество не имеет предельных точек.

Пусть $\hat{T}$ — множество предельных точек множества T. Тогда множество $\hat{T} \cup T$ называется *замыканием* T. Замыкание T состоит из всех точек множества T, а также всех его предельных точек. Если множество содержит все свои предельные точки, то говорят, что оно *замкнуто*. Такое множество, очевидно, совпадает со своим замыканием. Для рассмотренного выше множества X замыканием является само множество X вместе с точками 0 и 1. С другой стороны, множество $\overline{X} = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ замкнуто (оно является также замыканием X). Здесь можно заметить связь замкнутого множества с нестрогим неравенством *).

Типичные бесконечные множества, встречающиеся в экономике, обладают тем свойством, что все точки множества являются его предельными точками (но не обязательно все предельные точки принадлежат множеству).

В таком множестве различают внутренние и граничные точки. Внутренние точки множества — это такие точки, достаточно малые окрестности которых состоят *целиком* из точек этого множества. Любая окрестность граничных точек содержит как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству точки. Для рассмотренного выше множества X точка $x = 3/4$, очевидно, внутренняя, а $x = 1$ — граничная, так как $x_1 = 1 - \varepsilon$ всегда (при $0 < \varepsilon < 1$) принадлежит X, а $x_2 = 1 + \varepsilon$ — не принадлежит. Поскольку граничные точки не имеют окрестностей, состоящих целиком из точек множества, то открытое множество не содержит своих граничных точек. С другой стороны, так как граничные точки всегда содержат в своей окрестности некоторую точку множества, то они обязательно являются предельными точками множества и, следовательно, должны содержаться в замкнутом множестве **).

В экономических задачах множества обычно определяются неравенствами. Такое множество будет замкнутым (как мы увидим, это свойство встречается часто), если все неравенства заданы в нестрогой форме.

*) Можно указать множества, например, множество $\{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$, которые не являются открытыми и в то же время не являются замкнутыми.

**) Множество не обязательно обладает граничными точками. Таким множеством является, например, множество $\{x \in R^n\}$.

Другим важным для дальнейшего анализа свойством множеств в пространстве с метрикой является *ограниченность*. Множество ограничено, если расстояние между любыми двумя его точками не больше некоторого конечного числа. Чтобы доказать ограниченность множества, достаточно убедиться, что оно может быть заключено в некоторую простую геометрическую фигуру, такую, как гиперкуб или гиперсфера. В некоторых случаях это может потребовать изобретательности.

Заметим, что множество может иметь границу и быть неограниченным (например, выпуклый конус, который рассматривается в дополнении Д4), и множество может быть бесконечным, но ограниченным (типичными примерами этого будут являться множества, с которыми мы будем иметь дело).

Замкнутое ограниченное множество $S \subset E^n$ называется *компактным*.

Д1.6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Материал настоящего параграфа потребуется только в дополнениях Д5 (характеристические корни и собственные векторы матриц) и Д10 (дифференциалы и дифференциальные уравнения).

Комплексные числа определяются с помощью действительных чисел и специального числа i, равного по определению $\sqrt{-1}$. Комплексное число u может быть записано в форме

$$u = a + ib,$$

где a, b — действительные числа. Число a называется *действительной частью* u и обозначается $[\mathrm{Re}\,(u)]$, а b — *мнимой частью* числа u, $b = [\mathrm{Im}\,(u)]$.

Сложение и умножение на скаляр комплексных чисел определяются следующим образом:

$$\mathrm{Re}\,(u + v) = \mathrm{Re}\,(u) + \mathrm{Re}\,(v),$$

$$\mathrm{Im}\,(u + v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v); \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Re}\,(u) \qquad (\lambda \text{ — действительное число}),$$

$$\mathrm{Im}\,(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Im}\,(u); \tag{2}$$

$u = v$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(v),$$
$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(v). \tag{3}$$

Умножение комплексных чисел определяется соотношениями:

$$\operatorname{Re}(uv) = \operatorname{Re}(u)\operatorname{Re}(v) - \operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(v),$$
$$\operatorname{Im}(uv) = \operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(v) + \operatorname{Im}(u)\operatorname{Re}(v). \tag{4}$$

Легко показать, что сложение и умножение удовлетворяют обычным алгебраическим законам. Полагая u и v равными $a_1 + ib_1$ и $a_2 + ib_2$ соответственно, легко видеть, что правило умножения комплексных чисел следует обычному правилу умножения двучленов при условии, что $i^2 = -1$.

Каждому комплексному числу u приводится в соответствие *сопряженное* ему комплексное число, обозначаемое через $\bar{u}$ или u^*. Составляющие комплексных чисел u и u^* удовлетворяют соотношениям:

$$\operatorname{Re}(u^*) = \operatorname{Re}(u),$$
$$\operatorname{Im}(u^*) = -\operatorname{Im}(u). \tag{5}$$

Из правила умножения комплексных чисел следует, что uu^* является *действительным числом* и равно $[\operatorname{Re}(u)]^2 + [\operatorname{Im}(u)]^2$. Квадратный корень $\sqrt{uu^*}$ называется *модулем* комплексного числа u и обозначается через $|u|$. Сумма $u + u^*$ также является действительным числом и равна $2\operatorname{Re}(u)$.

Если $\operatorname{Im}(u) = 0$, то u *действительно*. Если $\operatorname{Re}(u) = 0$, а $\operatorname{Im}(u) \neq 0$, то u *чисто мнимое*. Для комплексных чисел равенство $u = 0$ означает, что как $\operatorname{Re}(u) = 0$, так и $\operatorname{Im}(u) = 0$. Важным свойством, связывающим комплексные, действительные и чисто мнимые числа, является следующее:

$u = u^*$ тогда и только тогда, когда u действительно, и
$u = -u^*$ тогда и только тогда, когда u чисто мнимое.

Операция сопряжения удовлетворяет алгебраическим законам. Легко видеть, что $(u + v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = u^*v^*$, $(u^*)^* = u$.

Рассмотрим теперь комплексное число $e^{i\omega}$. Определим его рядом

$$e^{i\omega} = 1 + i\omega + (i\omega)^2/2! + (i\omega)^3/3! + \ldots =$$
$$= 1 + i\omega - \omega^2/2! - i\omega^3/3! + \omega^4/4! + \ldots =$$
$$= (1 - \omega^2/2! + \omega^4/4! - \ldots) +$$
$$+ i(\omega - \omega^3/3! + \omega^5/5! - \ldots).$$

Ряды в скобках известны как ряды, определяющие $\cos\omega$ и $\sin\omega$, так что имеем

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega.$$

Поскольку разложение в ряд функции $\cos\omega$ содержит только четные степени ω, а $\sin\omega$ — нечетные, то отсюда следует, что

$$e^{-i\omega} = \cos\omega - i\sin\omega\ [= (e^{i\omega})^*].$$

Если ρ — действительное число, то $\rho e^{i\omega}$ — комплексное. Учитывая полученные соотношения, имеем

$$\mathrm{Re}\,(\rho e^{i\omega}) = \rho\cos\omega,$$
$$\mathrm{Im}\,(\rho e^{i\omega}) = \rho\sin\omega.$$

Отсюда $[\mathrm{Re}\,(\rho\, e^{i\omega})]^2 + [\mathrm{Im}\,(\rho\, e^{i\omega})]^2 = \rho^2$, так что можно отождествлять ρ с модулем числа $\rho e^{i\omega}$. Таким образом,

$$\rho = |u|,$$
$$\mathrm{tg}\,\omega = [\mathrm{Im}\,(u)]/[\mathrm{Re}\,(u)].$$

Полярная форма записи комплексных чисел удобна для операций умножения и возведения в степень, так как если $u = \rho_1 e^{i\omega_1}$, $v = \rho_2 e^{i\omega_2}$, то

$$uv = \rho_1\rho_2\, e^{i(\omega_1+\omega_2)},$$
$$u^n = \rho_1^n\, e^{in\omega_1}.$$

Упражнения

1. Пусть заданы следующие множества:

$$S_1 = \{x \mid 0 \leqslant x < 2\},$$
$$S_2 = \{x \mid -1 < x \leqslant 1\},$$
$$S_3 = \{y \mid 0 \leqslant y < 1\},$$
$$S_4 = \{y \mid 0 < y \leqslant 1\}.$$

а) Покажите, что множество $S_1 \cap S_2$ замкнуто, а множество $S_1 \cup S_2$ открыто.

б) Покажите, что множество $S_3 \cup S_4$ замкнуто, а множество $S_3 \cap S_4$ открыто.

б) Найдите граничную точку множества $S_2 \times S_3$, которая содержится в этом множестве.

г) Найдите граничную точку множества $S_2 \times S_3$, которая не содержится в этом множестве.

2. Верно ли, что для множества действительных чисел, больших единицы, бинарное отношение «$x \leqslant y^2$» задает полуупорядоченность?

3. Покажите, что для комплексных чисел u и v справедливо неравенство $|u+v| \leqslant |u|+|v|$.

ДОПОЛНЕНИЕ Д2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Материал этого дополнения важен для всех частей книги, включая нелинейный анализ.

Д2.1. ВЕКТОРЫ *)

Будем рассматривать векторы в R^n, т. е. в n-мерном действительном пространстве. При этом не будем делать различия между R^n и евклидовым пространством E^n.

Вектор — это n-мерный элемент из R^n, записанный в форме $x = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n]$, где x_i есть i-я *координата* или i-я *компонента* вектора x. Определим следующие операции над векторами.

Умножение вектора на скаляр. Если λ — действительное число, а x — вектор, то вектор с координатами λx_i есть результат умножения вектора x на скаляр λ, т. е. λx.

Сложение векторов. Если x и y — два вектора из R^n, то их сумма $x + y$ — это вектор, i-я координата которого равна $x_i + y_i$. Если мы представим себе эти векторы на плоскости как отрезки, соединяющие начало координат с точками, координатами которых являются компоненты этих векторов, то сложение векторов соответствует «правилу параллелограмма», известному из курса физики средней школы. Умножение на скаляр соответствует растяжению

*) Линейная алгебра, обусловленная ее популярностью как математического курса, широко представлена в различных книгах. Для экономистов наиболее полезной является, по-видимому, книга Хэдли [1]. В приведенной библиографии хорошее и краткое изложение линейной алгебры содержится в работе Гейла [1] (гл. 2). Книга Аллена [2] (гл. 12 и 13) содержит изложение основ векторного и матричного анализа, но в недостаточно современных терминах. Книги по курсам эконометрики и линейного программирования обычно содержат краткое изложение материалов этого и двух следующих дополнений.

См. также работы Гельфанда [1], Мальцева [1]. (*Прим. перев.*)

или сжатию вектора. Эта геометрическая интерпретация дана лишь как иллюстрация. Обычно векторы из R^n будут рассматриваться как алгебраические объекты.

Определим [0] как вектор, все координаты которого равны нулю. Рассмотренные операции удовлетворяют следующим свойствам:

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$
$$x+y=y+x,$$
$$x+(-1)\,x=[0],$$
$$0x=[0],$$
$$1x=x,$$
$$\lambda\,(x+y)=\lambda x+\lambda y,$$
$$(\lambda+\mu)\,x=\lambda x+\mu x,$$
$$\lambda\,(\mu x)=\lambda\mu x,$$

где λ, μ, 0, $1 \in R$ (скаляры), а x, y, z, $[0] \in R^n$ (векторы). Сумма $x+(-1)\,y$ обычно записывается в виде $x-y$.

Векторы x и y *равны* между собой тогда и только тогда, когда $x-y=[0]$, т. е. если $x_i=y_i$ для всех i.

Обычно из текста будет ясно, какие элементы выражения являются скалярами, а какие векторами. В тех местах, где это потребуется, будут сделаны необходимые оговорки. Иногда векторы печатают жирным шрифтом, а скаляры обычным. Греческими буквами почти всегда обозначают скаляры, но в теории оптимизации мы будем использовать *вектор* λ. Договоримся о некоторых общих обозначениях. Так, индекс внизу буквы будет обычно означать компоненту вектора *), а при умножении вектора на скаляр первым *всегда* пишем скаляр.

Так как смысл написанного обычно ясен из текста, то будем обозначать символом 0 и вектор, и скаляр, а позже и нулевую матрицу.

Векторное пространство — это алгебраическая система, элементы которой удовлетворяют приведенным выше свойствам векторов. Очевидно, что R^n является векторным пространством. Векторное пространство зависит от двух множеств — множества R^n, на котором определены век-

*) Индексом вверху буквы обычно пользуются для различения векторов. Так, x^i, x^j — два различных вектора, а x_i, x_j — две различные компоненты одного и того же вектора.

торы, и множества R, на котором определены скаляры. Векторные пространства могут быть определены не только на множестве действительных чисел. Нас будут интересовать также пространства, определенные на множестве комплексных чисел. Они кратко рассмотрены в § Д2.6.

Д2.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определим *линейное подпространство*, или *векторное подпространство*, векторного пространства V, как подмножество L векторов из V, обладающее следующими свойствами:

$$x + y \in L, \quad \text{если } x,\ y \in L;$$

$$\lambda x \in L, \quad \text{если } x \in L,\ \lambda \in R.$$

Линейное подпространство может быть осмыслено как «плоское» неограниченное подпространство, проходящее через точку 0 в V. Рассмотрим векторное пространство R^3. Неограниченная плоскость, проходящая через точку 0, есть векторное подпространство, в то время как плоскость, не проходящая через 0, им не является.

Легко видеть, что если взять векторное пространство R^n, то множество векторов, k-я компонента которых равна нулю, образует линейное подпространство.

Пусть $v^1, \ldots, v^m$ — множество векторов из V. Говорят, что векторы $v^1, \ldots, v^m$ *линейно зависимы*, если существует набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все из которых равны нулю, и таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^i = 0.$$

Если таких чисел не существует, то векторы *линейно независимы*.

Вектор x является *линейной комбинацией* векторов $v^1, \ldots, v^m$, если

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i v^i = x$$

для некоторого набора чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$.

Пример. Укажем n линейно независимых векторов в R^n. Выберем следующие n векторов: $e^1 = [1, 0, \ldots, 0]$, $e^2 = [0, 1, \ldots, 0]$, ..., $e^n = [0, \ldots, 0, 1]$ (такие векторы называются *единичными*). Очевидно, что равенство $\sum \lambda_i e^i = 0$ соответствует n независимым уравнениям $\lambda_i e^i = 0$ и, таким образом, удовлетворяется лишь при $\lambda_i = 0$ для всех i. Следовательно, векторы $e^1, \ldots, e^n$ линейно независимы.

Сформулируем теперь теорему, из которой можно получить остальную теорию.

Основная теорема. Любые $m+1$ *векторов, каждый из которых является линейной комбинацией некоторых* m *векторов* $v^1, \ldots, v^m$, *линейно зависимы.*

Пусть каждый из векторов $x^1, \ldots, x^{m+1}$ является линейной комбинацией векторов $v^1, \ldots, v^m$. Тогда имеем

$$x^j = \sum_i \lambda_{ij} v^i, \quad j = 1, \ldots, m+1.$$

Требуется доказать, что существуют числа μ_j, не все равные нулю, и такие, что

$$\sum_j \mu_j x^j = 0.$$

Докажем это по индукции. Заметим сначала, что если $m = 1$, то $x^1 = \lambda_1 v$, $x^2 = \lambda_2 v$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то линейная зависимость очевидна. Предположим, что $\lambda_1 \neq 0$, и возьмем $\mu_1 = -\lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_1$. Тогда

$$\mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 = -\lambda_2 \lambda_1 v + \lambda_1 \lambda_2 v = 0,$$

и для $m = 1$ теорема доказана.

Теперь допустим, что теорема верна для $m = k-1$, и положим $m = k$. Имеем

$$x^j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} v^i, \quad j = 1, \ldots, k+1.$$

Пусть $\lambda_{11} \neq 0$. Определим новые векторы

$$z^j = x^j - \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{11}} x^1 = \sum_{i=2}^{k} \left[\lambda_{ij} - \left(\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{11}}\right) \lambda_{i1}\right] v^i.$$

Суммирование ведется от $i = 2$, так как коэффициент при v^1 равен нулю.

Таким образом, каждый вектор z^j является линейной комбинацией векторов $v^2, \ldots, v^k$. По предположению индукции векторы z^j должны быть линейно зависимы, т. е.

$$\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j z^j = \sum_{j=1}^{k+1} \mu_j x^j - \frac{1}{\lambda_{11}} \left(\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j \lambda_{1j} \right) x^1 = 0,$$

причем $\mu_j \neq 0$ для некоторого j.

Положим $\mu_1' = \mu_1 - (1/\lambda_{11}) \left(\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j \lambda_{1j} \right)$, а для $j = 2, \ldots, k$ $\mu_j' = \mu_j$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j' x^j = 0, \quad \mu_j' \neq 0 \text{ для некоторого } j,$$

т. е. x^j линейно зависимы, и теорема доказана.

Д2.3. БАЗИС И РАНГ

Пусть L — линейное подпространство в V. Максимальное число линейно независимых векторов, которые могут быть выбраны в L, называется *рангом* или *размерностью* L.

Пример. Размерность R^n равна n. В предыдущем параграфе мы видели, что единичные векторы e^i образуют множество из n линейно независимых векторов. Если x — произвольный вектор из R^n, то $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$. Таким образом, любой вектор из R^n может быть представлен в виде линейной комбинации n векторов e^i. Следовательно, по основной теореме любые $n + 1$ векторов в R^n должны быть линейно зависимы. Таким образом, n является максимальным числом линейно независимых векторов в R^n и, значит, его размерностью.

В линейном подпространстве размерности r (мы часто будем обозначать такое подпространство символом L^r) любые r линейно независимых векторов образуют *базис* в L. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Система линейно независимых векторов $v^1, \ldots, v^r$ тогда и только тогда образует базис в L, когда любой вектор из L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $v^1, \ldots, v^r$.*

Для доказательства теоремы заметим, во-первых, что если каждый вектор из L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $v^1, \ldots, v^r$, то любая система $n + 1$ векторов из L линейно зависима (основная теорема). Тогда L имеет размерность r, а векторы v^i образуют базис.

С другой стороны, если векторы v^i образуют базис, то размерность L равна r, так что $(r+1)$ векторов $v^1, \ldots$ $\ldots, v^r, x$ линейно зависимы для любого $x \in L$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v^i + \lambda_{r+1} x = 0,$$

где $\lambda_{r+1} \neq 0$, иначе векторы v^i были бы линейно зависимы.

Отсюда следует, что

$$x = -(1/\lambda_{r+1}) \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v^i,$$

т. е. x представлен в виде линейной комбинации векторов v^i, и теорема доказана.

Пример. Векторы с координатами (1,1) и (—3,2) образуют базис в R^2. Действительно, равенство $\sum \mu_j v^j = 0$ эквивалентно двум уравнениям

$$\mu_1 - 3\mu_2 = 0, \quad \mu_1 + 2\mu_2 = 0.$$

Отсюда $\mu_1 = \mu_2 = 0$, т. е. векторы линейно независимы и образуют базис.

Можно выразить произвольный вектор, скажем, $x = (2,1)$, через векторы базиса следующим образом. Найдем такие λ_1 и λ_2, что

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 = x,$$

т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1.$$

Решая систему, получим $\lambda_1 = \frac{7}{5}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$. Поэтому

$$x = \frac{7}{5} v^1 - \frac{1}{5} v^2.$$

Если векторы $v^1, \ldots, v^r$ образуют базис в L, то иногда говорят, что L есть *линейная оболочка* векторов $v^1, \ldots, v^r$, или что L *натянуто* на векторы $v^1, \ldots, v^r$. Термины «ранг» и «базис» будут также встречаться в связи с матрицами.

Д2.4. СУММА И ПРЯМАЯ СУММА*)

Пусть L_1 и L_2 — линейные подпространства векторного пространства V. Определим сумму $L_1 + L_2$ как множество всех векторов $u + v$, где $u \in L_1$, $v \in L_2$. Легко видеть, что $L_1 + L_2$ является линейным подпространством пространства V.

Если L_1 и L_2 не пересекаются (за исключением нуля, где пересекаются все линейные подпространства), т. е. $L_1 \cap L_2 = 0$, то мы называем сумму L_1 и L_2 *прямой суммой* и обозначаем $L_1 \oplus L_2$.

Важными свойствами прямых сумм являются следующие:

а) если $w \in L_1 \oplus L_2$, то векторы u, v, такие, что $u \in L_1$, $v \in L_2$ и $w = u + v$, определены единственным образом;

б) если L^r линейное подпространство V размерности r, а размерность V равна n, то существует подпространство L^{n-r} пространства V, такое, что $V = L^r \oplus L^{n-r}$.

Мы не будем доказывать эти свойства.

Д2.5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Для использования матричных обозначений в алгебре векторных пространств введем следующие терминологические понятия, которые могут показаться сейчас нецелесообразными.

Рассмотрим вектор в R^n как n-мерный элемент. Его можно записать двумя способами. Если записать компоненты вектора в виде

$$x = [x_1, \ldots, x_n],$$

то говорят, что x записан как *вектор-строка*. Если записать компоненты вертикально

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то говорят, что x записан как *вектор-столбец*.

Все векторы некоторого множества рассматриваются в одном и том же виде. В векторной алгебре не важно, как

*) Понятие «прямая сумма» приводится здесь для знакомства с основными понятиями линейной алгебры.

записывать векторы. Когда же введены матрицы, то способ записи обретает большое значение. Однако обычно из текста ясно, в какой форме задан вектор.

В большинстве экономических приложений векторы объемов продукции записываются как вектор-столбцы, а векторы цен — как вектор-строки.

Иногда может понадобиться переписать вектор-строку в виде вектор-столбца, и наоборот. Такое переписывание называется *транспонированием* и обычно обозначается штрихом. Таким образом, если x — вектор-столбец, то x' — вектор-строка, а $(x')'$ вновь вектор-столбец, причем $(x')' = x$.

Определим теперь очень важную операцию над вектор-столбцом и вектор-строкой одинаковой размерности.

Если y вектор-строка размерности n, а x вектор-столбец той же размерности, то скалярное произведение двух векторов определяется равенством

$$yx = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i,$$

т. е. скалярное произведение получается перемножением соответствующих компонент двух векторов и последующим сложением результатов.

Пример 1. Скалярное произведение векторов

$$y = [1,\ -2,\ 0] \quad \text{и} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

равно $yx = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -4$.

Различие между *умножением на скаляр* (операция над вектором и скаляром, которая дает в результате вектор) и *скалярным произведением* (операция над двумя векторами, результатом которой является число) очевидно.

Скалярное произведение иногда называют *внутренним произведением*, или в физической литературе — *точечным произведением*. В последнем случае произведение записывается $y \cdot x$. Это обозначение мы будем использовать в тех случаях, когда обозначение yx неудобно. *Векторное произведение* двух векторов (обозначается $y \times x$) есть специальная операция над векторами из E^2 и E^3, которая в экономике не встречается.

Если нужно получить скалярное произведение двух вектор-строк или двух вектор-столбцов, то один из них необходимо транспонировать. В большинстве описаний свойств векторов, в которых не упоминаются матрицы, различие между вектор-строкой и вектор-столбцом опускается, но в этой книге мы будем строго придерживаться его.

Наиболее типичным скалярным произведением из тех, с которыми мы будем иметь дело в экономических задачах, является произведение вектор-строки p (вектора цен) на вектор-столбец x (вектор объемов продукции). Скалярное произведение px отождествляется тогда с суммарной стоимостью продукции x при ценах p.

Среди всех скалярных произведений заслуживает внимание скалярное произведение вектора x на транспонированный вектор x', т. е.

$$x'x = \sum_i (x_i)^2.$$

Положительное значение квадратного корня из $x'x$ есть *евклидова норма*, или *длина* вектора x. Мы также будем использовать и другие нормы векторов *).

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Система попарно ортогональных векторов называется *ортогональной системой*. Ортогональная система векторов, каждый из которых имеет единичную евклидову норму, называется *ортонормированной*.

Пример 2. Единичные векторы образуют ортонормированную систему. В R^2 имеем $(e^1)'e^2 = 0$, $(e^1)'e^1 = 1$, $(e^2)'e^2 = 1$. В R^n имеем аналогичные результаты.

В R^2 и R^3 ортогональные векторы *перпендикулярны*. Обобщая это, мы будем отождествлять ортогональность и перпендикулярность.

---

*) В экономических задачах часто имеют дело с векторами, все компоненты которых неотрицательны. Если x такой вектор, то для него обычно используют *линейную норму* $\sum x_i$, так как это проще. Линейная норма обладает основными свойствами нормы (норма неотрицательна и равна нулю только в том случае, если все компоненты вектора равны нулю) тогда и только тогда, когда все компоненты вектора неотрицательны.

Д2.6. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕКТОРЫ

Читатель может опустить этот параграф вплоть до дополнения Д.5.

Комплексные векторы или векторы из C^n (иногда используется обозначение U^n), где C — множество комплексных чисел, рассматриваются в книге только в связи с собственными векторами и основанном на них анализе (в частности, в динамических моделях экономики).

Теория векторных пространств весьма просто обобщается на случай, когда скаляры и компоненты векторов являются комплексными числами. Такие векторные пространства называются *эрмитовыми*, или *унитарными*. Поскольку комплексные числа обладают всеми естественными алгебраическими свойствами действительных чисел (т. е. образуют поле), то все предыдущие рассуждения, касающиеся векторов из R^n, применимы и к векторам из C^n, за исключением определения скалярного произведения.

Пусть x — вектор из C^n. Тогда вектор $\bar{x}$ (иногда x^*), компонентами которого являются числа, комплексно-сопряженные соответствующим компонентам x, называется *комплексно сопряженным вектором* вектору x. Это значит, что если j-я компонента вектора x равна $x_j = a_j + ib_j$, то j-я компонента вектора $\bar{x}$ равна $\bar{x}_j = a_j - ib_j$. Тогда скалярное произведение векторов y и x, по определению, есть обычное скалярное произведение векторов y и $\bar{x}$, т. е.

$$y\bar{x} = \sum y_j\bar{x}_j.$$

Само произведение часто записывается просто yx. Заметим, что произведения $y\bar{x}$ и $\bar{y}x$ не эквивалентны, а являются комплексно-сопряженными числами. В этом легко непосредственно убедиться.

Однако скаляр $x'\bar{x}$ — действительное число $[\sum (a_j)^2 + \sum (b_j^2)]$ и является *нормой* (эрмитовой нормой) вектора x.

Как уже указывалось, произведение $y'x$ комплексных векторов y и x не соответствует обычному определению скалярного произведения. В целесообразности этого легко убедиться, вычислив $x'x$ для вектора размерности $2r$, r компонент которого равны единице, а остальные r компонент равны i. Имеем $x'x = r\cdot 1^2 + r\cdot i^2 = 0$, так что получается, что вектор имеет нулевую длину, хотя ни одна его компонента нулю не равна. Это противоречит основному свойству нормы (см. § Д1.5).

Корректно определенная норма в этом примере равна $x'\bar{x} = 2r$.

Д2.7. МАТРИЦЫ

Матрица порядка $m \times n$ — это прямоугольная таблица чисел (*элементов* матрицы), у которых первый индекс, или индекс *строки*, пробегает значения от 1 до m, а второй, или индекс *столбца*,— значения от 1 до n. Такая матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Часто записывают просто $A = \| a_{ij} \|$ или $A = [a_{ij}]$, чтобы показать, что элементами матрицы A являются числа a_{ij}. Когда будет понятно из текста, будем обозначать матрицу просто буквой A, подразумевая при этом, что ее элементами являются числа a_{ij}.

Первый индекс элемента a_{ij} является всегда индексом строки, а первое число, задающее порядок матрицы (например, $m \times n$), всегда означает число строк.

Элементами всех матриц, с которыми мы будем иметь дело, за исключением матрицы, составленной из собственных векторов (с ними мы встретимся в дополнении Д5), являются действительные числа.

Существует множество точек зрения на матрицу, но наиболее удобной, как нам представляется, является та, в которой матрица представляется как упорядоченное множество векторов. Однако и с этой точки зрения она может рассматриваться двояко. Матрица $m \times n$ может рассматриваться как составленная из m вектор-строк с n компонентами каждая, или из n вектор-столбцов, каждый из которых имеет m компонент. Эти два представления связаны с понятием двойственности, с которым в дальнейшем мы будем часто встречаться. Обычно строку матрицы A обозначают символом A_i, а столбец — A^j.

Пример. Матрицу

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

порядка 2×3 можно считать составленной из трех вектор-столбцов

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или из двух вектор-строк $[-2\ 0\ 3]$, $[1\ 2\ 1]$.

Матрица порядка $1 \times n$ есть просто вектор-строка размерности n, а матрица порядка $m \times 1$ — вектор-столбец размерности m.

Матрица порядка $n \times n$ называется *квадратной*. Квадратные матрицы имеют ряд свойств, которыми не обладают прямоугольные матрицы. Эти свойства рассмотрены в дополнении Д5.

Д2.8. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

Определим следующие операции над матрицами.

Умножение на скаляр. Произведение λA есть матрица, элементами которой являются числа λa_{ij}.

Сложение матриц. *Операция сложения определена только для матриц одного и того же порядка.* Суммой $A + B$ матриц A и B называется матрица с элементами $a_{ij} + b_{ij}$.

Определим нулевую матрицу (или нуль-матрицу) порядка $m \times n$ как матрицу, все элементы которой равны нулю, и обозначим ее символом 0. Следующие алгебраические соотношения справедливы для всего множества матриц *одного и того же порядка*:

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A + B = B + A,$$

$$A + (-1)\,A = 0,$$

$$0A = 0,$$

$$1A = A,$$

$$\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)\,A = \lambda A + \mu A,$$

$$\lambda\,(\mu A) = \lambda\mu A.$$

Как видим, перечисленные свойства матриц аналогичны алгебраическим свойствам векторов одной и той же размерности, установленным в § Д2.1. В самом деле, эти свойства непосредственно следуют из рассмотрения матрицы как упорядоченного множества векторов.

Как и для векторов, обозначим $A + (-1)B$ через $A - B$. Матрицы A и B *равны* тогда и только тогда, когда *все* их соответствующие элементы равны.

Операцию *транспонирования* определим следующим образом.

Матрица порядка $n \times m$ с элементами $[a_{ji}]$ называется *транспонированной* к A и обозначается A' или A^T. Другими словами, матрица A транспонируется заменой ее столбцов строками с сохранением их порядка, т. е. первый столбец становится первой строкой и т. д.

Пример. Транспонированной к матрице

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

является матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножение матриц. Определим операцию умножения матриц. Произведение двух матриц A и B (последовательность сомножителей здесь является важным фактором) определено только в том случае, если число *столбцов* в первой матрице равно числу *строк* во второй. Если A и B удовлетворяют этому условию, то элемент (i, j) матрицы $C = AB$ равен $c_{ij} = A_i B^j$. Другими словами, *(i, j)-й элемент произведения AB равен скалярному произведению i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.*

Очевидно, что операция может быть выполнена лишь в том случае, если размерности векторов A_i и B^j совпадают, т. е. при условии, что число столбцов матрицы A (размерность A_i) и число строк матрицы B (размерность вектор-столбца B^j) равны.

На число строк матрицы A и число столбцов матрицы B ограничений нет. Число строк матрицы A определяет число вектор-строк A_i, из которых могут быть образованы произведения $A_i B^j$ и, следовательно, число строк в произведении AB. Аналогично, число столбцов в B определяет число столбцов в AB.

Простое правило, определяющее возможность матричного умножения и его результат, можно записать следующим образом (здесь A — матрица порядка $m \times k$, B — $k \times n$):

(=)

$$(m \times k) \times (k \times n)$$

(порядок произведения)

Таким образом, произведение матриц определено только в том случае, когда внутренние индексы равны. Тогда порядок произведения получается вычеркиванием внутренних индексов.

Очевидно, что порядок, в котором перемножаются матрицы (здесь мы не можем избежать использования слова «порядок» в двух смыслах), имеет решающее значение. В произведении BA тех же матриц A и B мы имели бы

$$(k \times n) \times (m \times k).$$

Внутренние индексы здесь не равны, т. е. произведение BA не определено.

Если A — матрица порядка $m \times n$, а B — порядка $n \times m$, то определены оба произведения AB и BA. Однако AB будет матрицей порядка $m \times m$, в то время как BA — $n \times n$, т. е. $AB \neq BA$. Только тогда, когда A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, *возможно* равенство $AB = BA$, но даже и в этом случае оно, вообще говоря, не верно.

Заметим, что если рассматривать вектор-столбец x как матрицу порядка $n \times 1$, а вектор-строку y как матрицу порядка $1 \times n$, то умножение матриц yx эквивалентно скалярному произведению векторов y и x. Действительно, все алгебраические свойства x-вектора и x-матрицы совпадают.

Можно было заметить, что x и y могли быть перемножены и в обратном порядке, т. е. xy; тогда результатом произведения была бы матрица порядка $n \times n$. В нашем анализе мы не будем использовать такие произведения.

Так как порядок умножения матриц имеет решающее значение, то, если потребуется разъяснение, мы будем говорить об *умножении слева* и *умножении справа*. Так, в произведении AB матрица A умножена справа на B, а B умножена слева на A.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оба произведения AB и BA определены. Имеем

$$AB=\begin{bmatrix} (-2)\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 1 & (-2)\cdot 2+0\cdot 3+3\cdot 1 \\ 1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что если матрицы соответствующего порядка, то справедливы следующие свойства умножения:

$$(A+B)\,C = AC + BC,$$

$$A\,(BC) = (AB)\,C,$$

$$A\,(\lambda B) = \lambda AB.$$

Для матрицы A и ее транспонированной A^T всегда существуют произведения AA^T и A^TA. Если A — матрица порядка $m \times n$, то первое произведение есть матрица порядка $m \times m$, второе — $n \times n$.

Рассмотрим матрицы A и B порядка $m \times k$ и $k \times n$ соответственно. Произведение AB есть матрица порядка $m \times n$. Порядок транспонированной матрицы $(AB)^T$ $n \times m$, в то время как порядок транспонированных матриц A^T и B^T равен $k \times m$ и $n \times k$ соответственно. Очевидно, транспонированные матрицы могут быть перемножены только в обратном порядке. Таким образом, имеем равенство

$$(AB)^T = B^TA^T,$$

которое можно легко проверить непосредственным перемножением.

Д2.9. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ВЕКТОР И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Если A — матрица порядка $m \times n$, вектор-столбец x размерности n рассматривается как матрица порядка $n \times 1$, то определено произведение Ax, которое является матрицей порядка $m \times 1$, т. е. вектор-столбцом размерности m.

Таким образом, матрицу A можно рассматривать как правило для отображения вектора x из R^n в вектор Ax из R^m. Из свойств матричной алгебры следует, что

$$A(\lambda x) = \lambda Ax,$$

$$A(x + y) = Ax + Ay,$$

т. е. отображение $x \to Ax$ переводит линейное подпространство в линейное подпространство. Такое отображение называется *линейным отображением*, или *линейным преобразованием*. Существуют линейные отображения, отличные от тех, которые задаются матрицей, но этот класс наиболее важный.

Фактически матрица A задает не одно, а два линейных преобразования. Если y есть вектор-строка размерности m, то отображение $y \to yA$ переводит m-мерный вектор в n-мерный. Два отображения $x \to Ax$ и $y \to yA$ являются *двойственными*.

В экономической литературе преобразование $x \to Ax$ обычно представляет собой преобразование вектора затрат в вектор объемов выпусков. Двойственное преобразование, появляющееся в форме $p \to pA$, обычно представляет собой отображение затрат в потребительские цены.

Пусть A — матрица порядка $m \times n$, а v — n-мерный вектор-столбец. Обозначим через u вектор-столбец Av размерности m. Если B — матрица порядка $k \times m$, то можно определить преобразование $w = Bu$, где w — k-мерный вектор-столбец. Так как $u = Av$, то $w = B(Av) = (BA)v$. Таким образом, видим, что произведение BA, т. е. матрица порядка $k \times n$, задает непосредственное преобразование вектора v в вектор w. Первоначально умножение матриц было определено именно для этих целей.

Рассмотрим соотношение

$$Ax = b,$$

где b — заданный, а x — неизвестный вектор. Это соотношение представляет собой систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

или задачу обратного отображения, т. е. нахождения вектора x, который переводится в вектор b при отображении, заданном матрицей A. Существуют и другие полезные интерпретации произведения Ax матрицы на вектор. Мы будем рассматривать Ax как взвешенную с весами x сумму столбцов матрицы A. С этой точки зрения можно переписать соотношение $Ax = b$ в следующей форме:

$$\sum x_j A^j = b,$$

где x_j удобнее считать скалярами, нежели компонентами вектора.

Если принять, что вектор b есть линейная комбинация векторов A^j, то в этой форме можно рассматривать задачи нахождения величин x_j как коэффициентов этой линейной комбинации. Если $Ax = 0$, то этот подход означает, что при $x \neq 0$ столбцы матрицы A линейно зависимы.

Аналогично можно рассматривать произведение yA как взвешенную сумму строк матрицы A.

Представляет интерес еще одна интерпретация однородной системы уравнений $Ax = 0$. Эта система эквивалентна m соотношениям $A_i x = 0$, так что решение x можно рассматривать как вектор, ортогональный всем строкам матрицы A.

Д2.10. РАЗБИЕНИЕ МАТРИЦ

Иногда бывает полезно *разбить* матрицу на подматрицы. Например, матрица A может быть разбита на четыре подматрицы следующим образом:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} r \text{ строк} \\ (m-r) \text{ строк} \end{array}$$

$$s \text{ столбцов} \quad (n-s) \text{ столбцов}.$$

Допустим, что мы имеем другую матрицу B того же порядка, что и A, и точно так же разбитую, т. е. так, что порядок B_1 равен порядку A_1, порядок B_2 равен порядку A_2 и т. д. Из определения сложения матриц непосредственно следует, что

$$A+B=\left[\begin{array}{c:c} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ \hdashline A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{array}\right].$$

Если матрицы разбиты так, что можно выполнять некоторую операцию подобно тому, как это сделано при сложении матриц A и B в предыдущем примере, то разбиение называется *соответствующим*.

Выясним, какое разбиение является соответствующим для операции умножения. Пусть A — матрица порядка $m \times k$, а B — порядка $k \times n$. Тогда существует произведение AB. Предположим, что A разбита на две подматрицы следующим образом *):

$$A = \underset{s \text{ столбцов}}{[A_1} \;\vdots\; \underset{(k-s) \text{ столбцов}}{A_2]}.$$

Если B разбита так, что

$$B=\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right]\begin{array}{l} s \text{ строк} \\ (k-s) \text{ строк,} \end{array}$$

то произведение AB включает в себя четыре подматрицы

A_1 порядка $m\times s$,

A_2 порядка $m\times (k-s)$,

B_1 порядка $s\times n$,

B_2 порядка $(k-s)\times n$.

Определены два произведения подматриц: A_1B_1 и A_2B_2, причем оба порядка $m \times n$, так что их можно сложить. Таким образом, все операции, содержащиеся в выражении $A_1B_1 + A_2B_2$, могут быть выполнены.

Непосредственное вычисление, использующее обычное правило умножения матриц, показывает, что действительно

$$AB = A_1B_1 + A_2B_2.$$

Пусть матрица A разбита на s и $k-s$ столбцов, а также на r и $m-r$ строк. Можно показать, что соответствующим разбиением матрицы B является разбиение на s и $k-s$

*) Заметим, что матрица может быть разбита на любое число частей по вертикали и по горизонтали. Число разбиений по вертикали и по горизонтали не обязано совпадать.

строк и на t и $n-t$ столбцов, где r и t могут быть выбраны произвольно, лишь бы s было одним и тем же в обеих матрицах. Если обозначить четыре подматрицы каждой матрицы так же, как мы это делали в случае сложения, то найдем, что

$$AB = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c:c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hdashline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_3B_4 \end{array}\right] & \begin{array}{l} r \text{ строк} \\ (m-r) \text{ строк.} \end{array} \\ \quad t \text{ столбцов} \quad (n-t) \text{ столбцов} & \end{array}$$

Заметим, что правила сложения и умножения соответствующим образом разбитых матриц такие же, как если бы подматрицы рассматривались как элементы обычной матрицы, за тем исключением, что при умножении мы должны быть осторожны в соблюдении порядка перемножения подматриц, а именно подматрицы из второй матрицы всегда умножаются слева на подматрицы из первой матрицы.

В проверке соответствия разбиений при умножении необходимо только, чтобы столбцы первой матрицы были разбиты так же, как строки второй. Число разбиений строк первой матрицы не обязательно должно соответствовать числу разбиений столбцов второй.

Подобные правила разбиения часто бывают полезны и при умножении матрицы на вектор.

Д2.11. ВЕКТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть S и T — множества векторов в некотором векторном пространстве. Обычные свойства множеств — объединение, пересечение и т. д.— здесь остаются справедливыми.

Определим несколько новых соотношений между множествами, а именно:

а) λS есть множество всех векторов λx, где $x \in S$;

б) $S + T$ есть множество всех таких векторов $x + y$, для которых $x \in S$, а $y \in T$;

в) $x' \cdot T$ есть множество всех скалярных произведений $x'y$, для которых $y \in T$;

г) $S \cdot T$ есть множество всех скалярных произведений $x'y$, где $x \in S$, а $y \in T$.

Одним из наиболее важных свойств, которое может быть присуще векторным множествам, является свойство выпуклости. Однако мы отложим обсуждение выпуклых множеств до дополнения Д4.

Векторное множество S называется *ограниченным снизу*, если существует некоторый вектор x_0, такой, что $x \geqslant x_0$ для всех $x \in S$. Множество S называется *ограниченным сверху*, если существует такой вектор x^0, что $x \leqslant x^0$ для всех $x \in S$. Если множество ограничено снизу и сверху, то оно содержится в конечном гиперкубе и, следовательно, *ограничено* в смысле определения, данного в § Д1.5.

Упражнения

1. Выберите базис следующей системы векторов и выразите через него остальные векторы:

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Даны векторы

$$x^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

а) Покажите, что они образуют базис.

б) Выразите через векторы x^1, x^2, x^3 вектор

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

в) Покажите, что векторы x^1 и x^3 ортогональны.

г) Найдите такой вектор x^4, чтобы векторы x^1, x^3, x^4 образовывали ортогональный базис.

д) Выразите вектор b через векторы нового базиса.

е) Выберите скаляры α, β, γ так, чтобы векторы αx^1, βx^3, γx^4 образовывали ортонормированную систему.

3. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислите те из следующих произведений, которые определены:
а) AB^T; б) BA; в) AB; г) $A^T B$.

4. Даны

$$b = [1,\ 2],\ c = [3,\ 1],\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вычислите каждое из следующих произведений:
а) bc'; б) bA; в) Ab'; г) cA; д) AB; е) BA; ж) $bABc'$.

ДОПОЛНЕНИЕ Д3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Содержание этого дополнения непосредственно следует из дополнения Д2 и является в равной степени важным для всех экономических приложений.

Д3.1. ВВЕДЕНИЕ*)

Мы уже видели (см. § Д2.9), что систему однородных уравнений $Ax=0$ или $A_i x = 0$, $i = 1, \ldots, m$ можно также рассматривать в форме

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A^j = 0,$$

так что следующие утверждения эквивалентны:

а) решение системы $Ax = 0$ имеет по крайней мере одну ненулевую компоненту **);

б) вектор x ортогонален всем строкам матрицы A;

в) столбцы матрицы A линейно зависимы.

Так как любые n векторов в R^m линейно зависимы, если $m < n$, то справедливо следующее утверждение:

Любая система из m однородных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение, если $m < n$.

Если $m \geqslant n$, то существование нетривиального решения зависит от того, являются ли столбцы матрицы линейно

---

*) Современная теория линейных уравнений (чаще в терминах векторных пространств, реже в терминах определителей) содержится в литературе по линейной алгебре (см., например, книгу Хедли [1]).

Теория линейных неравенств более специальна. Книга Гейла [1] содержит изложение, подобное тому, которое предлагается здесь. Изложение на более высоком уровне см. у Таккера и Фэна.

См. также Гельфанд, Карпелевич, Садовский и Черников. (*Прим. перев.*).

**) Поскольку система $Ax = 0$ всегда имеет решение $x = 0$, то *нетривиальным решением* называют решение $x \neq 0$.

зависимыми. Таким образом, мы пришли к изучению линейной зависимости столбцов матрицы как к основе теории линейных уравнений.

Д3.2. РАНГ МАТРИЦЫ

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A назовем ее *столбцовым рангом*, а максимальное число линейно независимых строк A — *строчным рангом* матрицы A. Сформулируем следующую важную теорему:

Строчный и столбцовый ранги матрицы равны между собой.

Пусть A — матрица порядка $m \times n$ со строчным рангом r и столбцовым s. Предположим противное, т. е. что

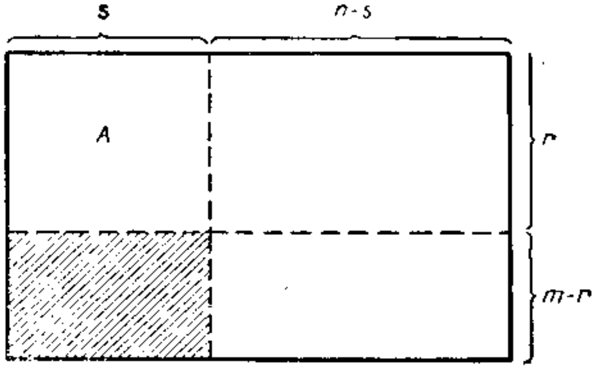


Рис. Д3.1.

$r \neq s$. Для определенности пусть $r < s$ (мы, конечно, имеем, что $r \leqslant m$, $s \leqslant n$).

Выберем r линейно независимых строк A. Без ограничения общности можно считать, что это r первых строк $A_1, \ldots, A_r$. Выберем также s линейно независимых столбцов. Пусть это столбцы $A^1, \ldots, A^s$.

Рассмотрим усеченные вектор-строки $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m$, которые состоят только из первых s компонент A_i, т. е. тех компонент, которые принадлежат столбцам $A^1, \ldots, A^s$. Размерность этих векторов равна s. Возьмем первые r таких векторов. Мы имеем усеченный вариант линейно независимой системы. Она образует матрицу $\hat{A}$ порядка $r \times s$

(рис. Д3.1). Так как $s > r$, то однородная система уравнений

$$\hat{A}x = 0$$

имеет нетривиальное решение $\hat{x}$.

Рассмотрим теперь новую матрицу $\bar{A}$, содержащую все m усеченных вектор-строк $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m$.

Так как строки $A_1, \ldots, A_r$ образуют базис в R^n, то любая отличная от них строка, скажем A_k, может быть однозначно представлена в виде линейной комбинации строк $A_1, \ldots, A_r$:

$$A_k = \sum_1^r \mu_{ik} A_i \quad \text{для всех } k.$$

Это соотношение, очевидно, также справедливо и для усеченного варианта этих векторов, т. е.

$$\hat{A}_k = \sum_1^r \mu_{ik} \hat{A}_i \quad \text{для всех } k.$$

Образуем скалярное произведение этих вектор-строк с вектором $\hat{x}$. Имеем

$$\hat{A}_k \hat{x} = \sum_1^r \mu_{ik} \hat{A}_i \hat{x} = 0,$$

так как $\hat{A}\hat{x} = 0$ означает, что $\hat{A}_i \hat{x} = 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Рассмотрим теперь произведение $\bar{A}\hat{x}$. Из определения $\hat{x}$ для первых r строк матрицы $\bar{A}$ имеем равенства $\bar{A}_i \hat{x} = 0$. Для остальных строк $\hat{A}_k \hat{x} = 0$ согласно предыдущему равенству, так что

$$\bar{A}\hat{x} = 0.$$

Но столбцами $\hat{A}$ служат первые s столбцов A, т. е. последнее уравнение эквивалентно следующему равенству:

$$\sum_1^s \hat{x}_j A^j = 0,$$

которое означает, что первые s столбцов матрицы A линейно зависимы. Это противоречит предположению о том, что столбцовый ранг матрицы A равен s. Следовательно, не может быть $s > r$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что не может быть и $r > s$.

Следовательно, $r = s$, что и доказывает теорему.

Иногда ранг матрицы определяют по значениям определителей (см. дополнение Д5, § Д5.2). Более удобная точка зрения заключается в том, чтобы условия в форме определителей рассматривать как правило для определения линейной зависимости, а не ранга *).

Д3.3. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные свойства нетривиальных решений системы однородных линейных уравнений определены теоремой:

Пусть A — матрица порядка $m \times n$ и ранга r. Тогда множество X всех решений системы уравнений $Ax = 0$ образует линейное подпространство размерности $n - r$.

Очевидно, что если x и y являются решениями системы $Ax = 0$, то λx и $x + y$ будут также решениями этой системы, т. е. X обладает свойствами линейного подпространства (см. § Д2.2). Остается показать, что базис X состоит из $n - r$ линейно независимых векторов.

Поскольку A имеет ранг r, то можно выбрать некоторое множество r линейно независимых столбцов матрицы A (пусть это будут первые r столбцов) и выразить остальные столбцы в виде линейной комбинации этих r столбцов. Имеем

$$A^k = \sum_{j=1}^{r} \mu_{jk} A^j, \quad k = r+1, \ \ldots, \ n. \qquad (Д3.3.1)$$

Введем следующие вектор-столбцы v^k размерности n:

$$v^k = \begin{bmatrix} -\mu_{1k} \\ -\mu_{2k} \\ \vdots \\ -\mu_{rk} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-я координата} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

для $k = r+1, \ \ldots, \ n$.

*) Определители полезны как вычислительный аппарат и менее полезны в качестве аппарата аналитического.

Имеем

$$Av^k = -\sum_1^r \mu_{jk} A^j + A^k = 0.$$

Последнее равенство следует из (Д3.3.1) и означает, что каждый вектор v^k является решением системы $Ax = 0$ и, следовательно, принадлежит множеству X. Кроме того, вектор $\sum_{r+1}^{n} \lambda_k v^k$ имеет λ_k своей k-й координатой. Поэтому

$$\sum_{r+1}^{n} \lambda_k v^k = 0$$

только в том случае, если $\lambda_k = 0$ для $k = r + 1, \ldots, n$. Таким образом, $n - r$ векторов v^k в X линейно независимы. Это значит, что они могут представлять собой некоторый базис.

Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что произвольный $x \in X$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов v^k. Так как x и v^k являются решениями системы линейных однородных уравнений, то и их линейная комбинация

$$x^* = x - \sum_{r+1}^{n} x_k v^k \tag{Д3.3.2}$$

является решением той же системы.

Для $k > r$

$$x_k^* = x_k - x_k = 0.$$

Таким образом,

$$Ax^* = \sum_1^r x_j^* A^j + \sum_{r+1}^{n} x_k^* A^k = \sum_1^r x_j^* A^j.$$

Но $A^1, \ldots, A^r$ линейно независимы. Поэтому равенство $Ax^* = 0$ означает, что $x_j^* = 0$ для $j = 1, \ldots, r$. Как мы уже видели, для $j = r + 1, \ldots, n$ составляющие $x_j^* = 0$. Следовательно, $x^* = 0$.

Из выражения (Д3.3.2) и того, что $x^* = 0$, имеем

$$x = \sum_{r+1}^{n} x_k v^k,$$

т. е. v^k образуют базис. Теорема доказана.

Поясним некоторые частные случаи. Если $r = n - 1$, то решения принадлежат подпространству размерности 1, т. е. прямой, проходящей через начало координат. Это выражает тот факт, что если x есть решение системы, то и λx также решение. Вообще, решение из подпространства размерности 1 принято считать *единственным*, причем под этим термином здесь понимается *единственное решение с точностью до скалярного множителя*. Обычно из-за этой свободы в терминологии не возникает недоразумений.

Если A состоит из единственной строки, то она имеет ранг 1. Пространство решений тогда имеет размерность $n - 1$. Линейное подпространство размерности $n - 1$ в векторном пространстве размерности n называется *гиперплоскостью*, так что уравнение $ax = 0$, где a — вектор-строка, есть уравнение гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Д3.4. НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вернемся теперь к системе уравнений

$$Ax = b,$$

где A — матрица порядка $m \times n$ и ранга r.

Если мы запишем систему в форме

$$\sum x_j A^j = b,$$

то утверждения «$Ax = b$ имеет решение» и «b является линейной комбинацией столбцов матрицы A» эквивалентны.

Очевидно, всегда можно образовать линейную комбинацию некоторого произвольного числа векторов, т. е. при *соответствующем* векторе b всегда *существует* решение у системы $Ax = b$ для любых соотношений между m, n и r. С другой стороны, ошибочно предполагать, что решение существует для *любого* вектора b. Необходимым условием существования решения системы является линейная зависимость $(n + 1)$-го вектора $A^1, \ldots, A^n, b$. Анализ системы уравнений $Ax = b$ сводится к выяснению следующих трех основных вопросов:

а) условия существования решения для любого возможного вектора b;

б) условия единственности решения;

в) характер множества решений X^*, если решение неединственно.

Заметим, что для того, чтобы произвольный вектор b мог быть выражен в виде линейной комбинации столбцов матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы эти столбцы включали в себя базис векторного пространства размерности m. Таким образом, мы можем утверждать:

Система $Ax = b$ имеет решение для любого b в том и только в том случае, когда $r = m$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство $m \leqslant n$.

Последующий анализ мы проведем для случаев, в которых $r = m \leqslant n$, т. е. решение существует для любого b. Пусть x^* решение системы.

Рассмотрим систему однородных уравнений $Ax = 0$. Если x — решение этой системы, то, очевидно, $x + x^*$ является решением системы $Ax = b$. С другой стороны, если x^* и x^{**} два различных решения системы $Ax = b$, то

$$A(x^{**} - x^*) = b - b = 0,$$

т. е. $x^{**} - x^*$ есть решение системы однородных уравнений.

Таким образом, если x^* — произвольное решение системы $Ax = b$, а X — множество решений системы однородных уравнений $Ax = 0$, то множество решений X^* системы $Ax = b$ задается равенством

$$X^* = x^* + X.$$

Так как мы уже знаем характер множества решений однородной системы с заданными r и n, то можем утверждать следующее:

Если $r = m = n$, то система $Ax = b$ имеет единственное решение для любого b.

Этот результат следует из приведенных выше рассуждений, так как $Ax = b$, очевидно, имеет решение ($r = m \leqslant \leqslant n$), а пространство решений однородной системы имеет размерность $n - n = 0$.

Если $r = m = n$, то говорят, что матрица A *невырожденная*, или *обратимая*. Более подробно мы будем рассматривать квадратные матрицы в дополнении Д5, однако смысл термина «обратимая» можно пояснить, рассматривая отображение $x \to Ax$ $(=b)$. Так как x единственен, то это означает существование единственного обратного отображения $b \to A^{-1}b$.

Если условия единственности решения не выполняются, то имеем:

Пусть $r = m < n$. Тогда размерность пространства решений системы $Ax = b$ равна $n - r$.

Так как любой m-мерный вектор можно выразить линейной комбинацией r столбцов матрицы A, которые образуют базис, то при $r < n$ всегда существует такое решение системы $Ax = b$, у которого $x_j = 0$, если A^j не является вектором базиса. Такое решение называется *базисным*.

Если выделить r $(=m)$ базисных столбцов матрицы A, то они образуют квадратную матрицу порядка $m \times m$ и ранга m. Такую матрицу часто называют *базисом* в A и обозначают A_B. Система уравнений

$$A_B\hat{x} = b,$$

где $\hat{x}$ имеет только m компонент, имеет единственное решение. Вектор $\hat{x}$ является усеченным вариантом базисного решения x системы $Ax = b$, у которого опущены нулевые компоненты, соответствующие внебазисным столбцам матрицы A.

Д3.5. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Во многих экономических задачах недостаточно знать, что система линейных уравнений имеет решение. Часто нужно знать, имеет ли система решения с неотрицательными компонентами, так как большинство экономических параметров не определены для отрицательных значений. В связи с этим в ряде экономических моделей появляются соотношения типа неравенств. Так, например, затраты ресурсов ограничены их наличными запасами. При этом технологические условия не всегда позволяют полностью использовать имеющиеся ресурсы. Так что равенства не всегда отражают существо экономических моделей. Можно сказать, что введение неравенств в условия экономических моделей было большим достижением последних лет.

Таким образом, идея упорядочения двух векторов, один из которых может быть нулевым, становится существенной.

Если мы ограничимся векторами из R^n, то компоненты векторов, будучи действительными числами, совершенно упорядочены (чего нельзя сказать о комплексных числах), так что всегда определены отношения порядка $x_i > 0$, $x_i \geqq 0$. Введем для векторов с компонентами x_i следующие определения:

1) $x \geqq 0$ (x *неотрицательный*), если $x_i \geqq 0$ для всех i;

2) $x \geqslant 0$ (x *полуположительный*), если $x_i \geqq 0$ для всех i, $x_i > 0$ для некоторого i;

3) $x \gg 0$ (x *строго положительный*), если $x_i > 0$ для всех i.

Множество неотрицательных векторов включает в себя полуположительные и положительные векторы, а множество полуположительных векторов — положительные.

Не все авторы придерживаются указанных обозначений. Одни в определениях (1), (2) и (3) обычно используют символы «$\geqq$», «$\geqslant$», «$>$»; другие —«$\geqslant$», «$>$», «$\gg$».

Наши обозначения оправданы тем, что строгая положительность вектора является обычно очень важным свойством и должна быть выделена особо. Символ «$>$» отвергается потому, что он разными авторами используется для обозначения полуположительности и строгой положительности. Вектор 0 — единственный неотрицательный вектор, не являющийся полуположительным, но обычно ясно, является ли 0 допустимым или нет.

Соотношение неравенства между двумя векторами выводится из свойства неотрицательности их разности. Таким образом, $x \leqslant y$ означает, что $x - y \leqslant 0$, и т. д. Неравенства могут быть обращены, т. е. записи $x \leqslant 0$, $0 \geqslant x$ или $(-x) \geqslant 0$ эквивалентны.

Очевидно, что отношением «$\geqslant$» векторы упорядочены лишь частично, так как, если $x_i > 0$, а $x_j < 0$, то ни $x \geqslant 0$, ни $0 \geqslant x$.

При *сложении* неотрицательных векторов, очевидно, доминирует более строгое неравенство, т. е. если $x \geqq 0$, $y \gg 0$, то $x + y \gg 0$.

При *скалярном произведении* имеем лишь две возможности, т. е. полуположительность для скаляра не имеет смысла. Если оба вектора строго положительны, то положительно и их скалярное произведение. Если один вектор полуположителен, а другой положителен, то их скалярное произведение также положительно. Во всех остальных случаях при отсутствии другой информации можно говорить лишь о неотрицательности скалярного произведения.

Однако произведение $x'x$ положительно даже в том случае, если x полуположителен, так как ненулевые компоненты вектора x в произведении умножаются сами на себя.

Важные соотношения неотрицательности, которые лежат в основе структуры равновесия в экономике, записываются в следующей форме:

$$px = 0, \quad p \geqq 0, \quad x \geqq 0.$$

Они, очевидно, означают, что $p_i = 0$, если $x_i > 0$, и $x_i = 0$, если $p_i > 0$. Это истолкование будет нами часто использоваться.

Аналогично линейным уравнениям соотношения

$$Ax \geqq 0$$

называются *однородными линейными неравенствами*, а

$$Ax \geqq b$$

— *неоднородными линейными неравенствами.*

Неотрицательные решения системы уравнений $Ax = 0$ можно рассматривать как решения неравенств $Ax \geqq 0$, $Ax \leqq 0$, $x \geqq 0$. Как мы увидим в следующем параграфе, неотрицательные решения системы уравнений и решения системы неравенств тесно связаны друг с другом. Мы будем часто доказывать равенство $x = y$, показывая справедливость двух неравенств $x \geqq y$ и $y \geqq x$.

Д3.6. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ *)

Сформулированная и доказанная в этом параграфе теорема является основной в теории линейных неравенств. Многие результаты, содержащие неравенства, с которыми мы встретимся на различных этапах экономического анализа, можно без труда получить из этой теоремы. Существуют различные методы доказательства этой теоремы. Приведенное здесь доказательство немного утомительно, но зато базируется лишь на линейной алгебре.

*) По поводу материала этого параграфа и двух следующих см. также работу Гейла [1], гл. 2. Об альтернативном подходе см. также § Д4.7.

Докажем сначала лемму. Имеет место одно из следующих утверждений:

либо (i) *система* $Ax = b$ *разрешима, либо* (ii) *уравнения* $yA = 0$, $yb = c$ *имеют решения для любого* c.

Ряд теорем, содержащих неравенства и неотрицательные решения, формулируются в форме «либо... либо». Следует подчеркнуть, что эта форма используется для выражения взаимно исключающих случаев, т. е. *справедливо одно или другое утверждение, но никак не оба.*

Чтобы показать, что альтернативы леммы взаимно исключают друг друга, умножим обе части системы (i) на y. Тогда $yAx = yb$. Если умножить обе части (ii) на x, получим $yAx = 0$. Полученные таким образом два результата противоречат равенству $yb = c$ при $c \neq 0$.

Покажем теперь, что если система $Ax = b$ не имеет решений, то имеют решение уравнения $yA = 0$, $yb = c$. Предположим, что ранг A равен r, и пусть $A^1, \ldots, A^r$ — базисные столбцы матрицы A. Тогда $r + 1$ векторов $A^1, \ldots, A^r$, b должны быть линейно независимы, иначе система $Ax = b$ имела бы решение.

Рассмотрим матрицу $\hat{A}$ со столбцами $A^1, \ldots, A^r, b$. Это матрица порядка $m \times (r + 1)$ и ранга $(r + 1)$, где $r + 1 \leqq m$ (иначе векторы $A^1, \ldots, A^r$, b не могли бы быть линейно независимыми).

Таким образом, система уравнений

$$y\hat{A} = \hat{c}$$

является системой из $(r + 1)$-го уравнения с m неизвестными, причем ранг матрицы $\hat{A}$ равен $r + 1 \leqq m$. Условие существования решения для любого $\hat{c}$ выполнено. Выберем $\hat{c}$ (вектор-строку) так, чтобы $\hat{c}_j = 0$, $j = 1, \ldots, r$; $\hat{c}_{r+1} = c$. Тогда уравнение $y\hat{A} = \hat{c}$ эквивалентно уравнениям

$$yA^j = 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

$$yb = c,$$

которые имеют решения.

Столбцы A^k матрицы A являются линейной комбинацией столбцов $A^1, \ldots, A^r$ (так как $A^1, \ldots, A^r$ образуют базис). Поэтому

$$yA^k = y\sum_1^r \mu_{kj}A^j = \sum_1^r \mu_{kj}yA^j = 0.$$

Таким образом, y есть решение системы

$$yA = 0, \quad yb = c,$$

что и доказывает лемму.

Основная теорема. Имеет место одно из следующих двух утверждений.

Либо (*i*) *система* $Ax = b$ *имеет решение* $x \geqq 0$, *либо* (*ii*) *система неравенств* $yA \geqq 0$, $yb < 0$ *разрешима* *).

Проверим вначале взаимно исключающее свойство утверждений. Умножая обе части (*i*) на y, получим $yAx = yb$. Затем умножим обе части (*ii*) на x ($\geqq 0$). Будем иметь $yAx \geqq 0$. А это противоречит неравенству $yb < 0$. (Этот метод доказательства свойства взаимного исключения является стандартным для такого рода теорем.)

Если система (*i*) не имеет решений, то, по лемме, имеет решение система $yA = 0$, $yb = c$. Полагая $c < 0$, получим решение системы (*ii*).

Труднее показать, что если система (*i*) имеет решение, но это решение не является неотрицательным, то система (*ii*) также имеет решение. Докажем это по индукции: сначала для матрицы порядка $m \times 1$, затем для матрицы порядка $m \times k$ при условии, что утверждение справедливо для матрицы порядка $m \times (k-1)$.

Если A — матрица порядка $m \times 1$, то система (*i*) принимает вид $xA^1 = b$, и x здесь скаляр. Положим $y = -b'$ (транспонирование вызвано тем, что b — вектор-столбец). Тогда

$yA^1 = -b'A^1 = -x(A^1)'A^1 > 0$ (так как мы предположили, что $x < 0$)

$yb = -b'b < 0$

Таким образом, $y = -b'$ является решением системы (*ii*), и утверждение для этого случая доказано.

Предположим теперь, что теорема верна, если матрица A имеет порядок $m \times (k-1)$, и исследуем случай, когда число ее столбцов увеличено до k.

---

*) Эта теорема является вариантом теоремы Фаркаша.

По предположению система

$$Ax = \sum_1^k x_j A^j = b \qquad (Д3.6.1)$$

имеет решение, которое не является неотрицательным. Тогда система

$$\sum_1^{k-1} x_j A^j = b$$

также имеет решение, которое не является неотрицательным, иначе это решение с дополнительной компонентой $x_k = 0$ было бы неотрицательным решением системы (Д3.6.1).

Так как мы предположили, что теорема справедлива для $k-1$ столбцов, то отсюда следует, что неравенства

$$\begin{aligned} &yA^j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, k-1, \\ &yb < 0 \end{aligned} \qquad (Д3.6.2)$$

имеют решение. Обозначим его через y^*. Если $y^*A^k \geqq 0$, то теорема доказана. Остается рассмотреть случай, когда $y^*A^k < 0$.

Для упрощения обозначений запишем

$$\begin{aligned} \alpha_j &= y^*A^j, \quad j = 1, \ldots, k-1, \\ -\alpha_k &= y^*A^k, \\ -\beta &= y^*b. \end{aligned} \qquad (Д3.6.3)$$

Так как y^* является решением (Д3.6.2), то имеем $\alpha_j \geqq 0$, $\beta > 0$ и, по предположению, $\alpha_k > 0$. Рассмотрим теперь следующие вектор-столбцы:

$$\begin{aligned} \hat{A}^j &= \alpha_j A^k + \alpha_k A^j, \\ \hat{b} &= -\beta A^k + \alpha_k b, \end{aligned} \qquad (Д3.6.4)$$

и новую систему уравнений

$$\sum_1^{k-1} x_j \hat{A}^j = \hat{b}. \qquad (Д3.6.5)$$

Предположим, что (Д3.6.5) имеет неотрицательное решение $\hat{x}$. Заменяя $\hat{A}^j$ и $\hat{b}$ в (Д3.6.5) их значениями из (Д3.6.4), получаем

$$\sum \hat{x}_j (\alpha_j A^k + \alpha_k A^j) = -\beta A^k + \alpha_k b$$

или

$$\left(\sum \hat{x}_j\alpha_j+\beta\right) A^k+\alpha_k \sum \hat{x}_j A^j=\alpha_k b,$$

и, наконец,

$$\frac{1}{\alpha_k}\left(\sum \hat{x}_j\alpha_j+\beta\right) A^k+\sum \hat{x}_j A^j=b. \qquad (Д3.6.6)$$

Числа $\hat{x}_j$ и α_j неотрицательны, а α_k и b положительны. Следовательно,

$$\gamma=\frac{1}{\alpha_k}\left(\sum \hat{x}_j\alpha_j+\beta\right)$$

— положительное число.

Обозначим через x^* вектор со следующими компонентами:

$$x_j^*=\hat{x}_j, \quad j=1, \ldots, k-1,$$
$$x_k^*=\gamma.$$

Вектор x^* неотрицателен. Уравнения (Д3.6.6) эквивалентны уравнениям

$$\sum_1^k x_j^* A^j=b$$

или

$$Ax^* = b. \qquad (Д3.6.7)$$

Таким образом, мы показали, что если (Д3.6.5) имеет неотрицательное решение, то и (Д3.6.7) имеет неотрицательное решение. Но, по предположению, (Д3.6.7) не имеет неотрицательных решений, следовательно, не может их иметь и (Д3.6.5). Так как уравнения (Д3.6.5) имеют лишь $k-1$ строку, то для этого случая теорема предполагается справедливой, т. е. должен существовать такой вектор $\hat{y}$, что

$$\begin{aligned} &\hat{y}\hat{A}^j \geqq 0, \quad j=1, \ldots, k-1, \\ &\hat{y}\hat{b}<0. \end{aligned} \qquad (Д3.6.8)$$

Остается показать, что полученные результаты позволяют составить решение системы (*ii*). Используя вектор $\hat{y}$ из (Д3.6.8) и вектор y^* из (Д3.6.2), составим вектор

$$y=(\hat{y}A^k)\, y^*-(y^*A^k)\, \hat{y}. \qquad (Д3.6.9)$$

Имеем

$$yA^j = (\hat{y}A^k)(y^*A^j) - (y^*A^k)(\hat{y}A^j) = \alpha_j\hat{y}A^k + \alpha_k\hat{y}A^j =$$
$$= \hat{y}(\alpha_j A^k + \alpha_k A^j) = \hat{y}\hat{A}^j.$$

Здесь первое равенство следует из (Д3.6.3), а второе — из (Д3.6.4).

Аналогично можно показать, что

$$yA^k = 0, \quad yb = \hat{y}\hat{b}.$$

Используя вместе с (Д3.6.8) только что полученные соотношения, получаем

$$yA^j = \hat{y}\hat{A}^j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$
$$yA^k = 0,$$
$$yb = -\hat{b} < 0,$$

т. е. y есть решение неравенств (ii).

Таким образом, мы показали, что если теорема верна для матрицы порядка $m \times (k-1)$, то она верна и для матрицы порядка $m \times k$. Доказательство теоремы завершено.

Д3.7. ТЕОРЕМЫ О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Основная теорема предыдущего параграфа позволяет получить различные результаты, относящиеся к существованию решений линейных уравнений и неравенств. Большинство из них сформулированы ниже. Для полноты записи два из них переписаны из § Д3.6. Доказательства приведены для трех результатов, остальные могут быть доказаны аналогичным путем.

В каждой из следующих теорем имеет место одно из двух утверждений:

а) либо (i) разрешима система $Ax = 0$, либо (ii) уравнения $yA = 0$, $yb = c$ имеют решение для любого c (лемма § Д3.6);

б) либо (i) система $Ax = 0$ имеет неотрицательное решение $x \geqq 0$, либо (ii) разрешимы неравенства $yA \geqq 0$, $yb < 0$ (основная теорема § Д3.6);

в) либо (i) система $Ax \leqq b$ имеет неотрицательное решение $x \geqq 0$, либо (ii) неравенства $yA \geqq 0$, $yb < 0$ имеют неотрицательное решение $y \geqq 0$;

г) либо (i) имеют решение неравенства $Ax \geqq b$, либо (ii) уравнения $yA = 0$, $yb = 1$ имеют неотрицательное решение $y \geqq 0$;

д) либо (i) система $Ax = 0$ имеет решение $x > 0$, либо (ii) система $yA \gg 0$ разрешима;

е) либо (i) система $Ax = 0$ имеет решение $x \gg 0$, либо (ii) разрешима система $yA > 0$;

ж) либо (i) $Ax \leqq 0$ имеет решение $x > 0$, либо (ii) неравенства $yA \gg 0$ имеют решение $y > 0$.

Ряд следствий сформулированных теорем могут быть получены из них элементарными преобразованиями. Можно, например, преобразовать в) к следующей форме: либо неравенства $A^T x \geqq 0$, $b^T x < 0$ имеют неотрицательное решение $x \geqq 0$, либо $yA^T \leqq b^T$ имеет решение $y \geqq 0$. Однородные неравенства можно всегда обратить, так как если y — решение системы $yA > 0$, то $(-y)$ является решением системы $yA < 0$.

Докажем теорему в). Легко убедиться в несовместимости (i) и (ii). Рассмотрим неравенства $Ax \leqq b$. Их можно свести к уравнениям добавлением в левую часть вектора $z \geqq 0$ (такой вектор в теории линейного программирования часто называют вектором искусственных или дополнительных переменных). Составим матрицу порядка $m \times (n + m)$

$$\hat{A} = [A \colon I],$$

где I — единичная матрица порядка $(m \times m)$ (т. е. матрица, содержащая 1 на диагонали и 0 на остальных местах). Обозначим через $\hat{x}$ вектор $[x, z]'$ порядка $(n + m)$. Тогда система

$$\hat{A}\hat{x} = [A \colon I] \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ z \end{bmatrix} = b$$

эквивалентна системе $Ax + z = b$. Если неравенства $Ax \leqq \leqq b$ имеют неотрицательное решение, то имеет неотрицательное решение и система уравнений $\hat{A}\hat{x} = b$. Предположим, что утверждение в) неверно, т. е. что система $Ax \leqq b$ не имеет неотрицательных решений. Тогда $\hat{A}\hat{x} = b$ не имеет неотрицательных решений, так что согласно теореме б) неравенства $y\hat{A} \geqq 0$, $yb < 0$ разрешимы. В соответствии со структурой матрицы $\hat{A}$ неравенства $y\hat{A} \geqq 0$ состоят из двух частей, $yA \geqq 0$ и $yI \geqq 0$. Неравенство $yI \geqq 0$ означает, что $y \geqq 0$, так что неравенства $yA \geqq 0$, $yb<0$ имеют решение $y \geqq 0$, что и доказывает утверждение в).

Для доказательства теоремы д) следует вначале убедиться в несовместимости (*i*) и (*ii*). После этого заметим, что если система $Ax = 0$ имеет *полуположительное* решение (именно полуположительное, а не неотрицательное), то можно выбрать такой вектор x, что $\sum x_j = 1$. Определим *)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A \\ 11 \ldots 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если система $\hat{A}x = 0$ имеет полуположительное решение, то система $\hat{A}x = \hat{b}$ имеет неотрицательное решение. Тогда, согласно теореме б), разрешимы неравенства $\hat{y}\hat{A} \geqq 0$, $\hat{y}\hat{b} < 0$, где $\hat{y}$ — вектор порядка $(m+1)$. Так как $\hat{b}_{m+1}\,(=1)$ является единственной ненулевой компонентой вектора $\hat{b}$, то $\hat{y}_{m+1} < 0$. Но $\hat{y}A^j = yA^j + \hat{y}_{m+1} \geqq 0$ для всех j, так что $yA^j \geqq -\hat{y}_{m+1} > 0$ для всех j, где y — вектор, составленный из первых m компонент вектора $\hat{y}$. Таким образом, $yA \gg 0$ разрешимы, что и доказывает утверждение.

Докажем теперь утверждение е). Если $x \gg 0$, то можно положить $x = z + b$, где $z \geqq 0$, а $b \gg 0$. Таким образом, если $Ax = 0$ имеет решение $x \gg 0$, то $A(z + b) = 0$ имеет решение $z \geqq 0$ для некоторого $b \gg 0$. Иначе говоря, система $Az = -Ab$ имеет решение $z \geqq 0$ для некоторого $b \gg 0$. Предположим, как и выше, что система $Ax = 0$ не имеет решения $x \gg 0$. Тогда снова согласно теореме б) неравенства $yA \geqq 0$, $-yAb < 0$ имеют решение. Но $b \gg 0$, так что вектор yA должен иметь по крайней мере одну ненуле-

---

*) Матрица $\hat{A}$ представляет собой матрицу A с добавленной $(m+1)$-й строкой, состоящей из одних единиц. Вектор b — $(m+1)$-мерный и состоит из одних нулей, за исключением компоненты b_{m+1}, которая равна 1.

вую компоненту. Следовательно, $yA \geqslant 0$ и утверждение доказано.

Доказательства других теорем проводятся аналогичным путем. Утверждение ж) следует из в), а утверждение **г)** — из а).

Упражнения

1. Найдите множество решений систем уравнений $Ax = 0$ и $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Покажите отдельно линейную зависимость строк и линейную зависимость столбцов матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Докажите недоказанные утверждения § Д3.7.

4. Замечая, что «=» эквивалентно одновременному выполнению неравенств «$\geqq$» и «$\leqq$» свяжите следующие пары утверждений § Д3.7:

а) (а) и (г); б) (б) и (в); в) (д) и (ж). Почему нет пары для (*е*)?

ДОПОЛНЕНИЕ Д4

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И КОНУСЫ

Приведенные здесь утверждения непосредственно следуют из материала двух предыдущих дополнений. Весь материал, за исключением § Д4.7, существенно используется в дальнейшем.

Д4.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ *)

В этом дополнении мы будем больше обращать внимания на геометрический подход к векторам и множествам векторов, чем это делалось ранее. Определим прежде всего три геометрических понятия: прямую, соединяющую две точки, гиперплоскость и гиперсферу.

Мы уже видели, что если задана точка x, то точки λx лежат на бесконечной прямой, проходящей через 0 и x. Если считать x^* фиксированной, а λ — переменной, то $x = \lambda x^*$ является уравнением прямой, проходящей через 0 и x^*. При $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ уравнение $x = \lambda x^*$ является уравнением отрезка прямой, ограниченного точками 0 и x^*, а $x = \lambda (x^* - x^{**})$ есть уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $(x^* - x^{**})$. Если добавить x^{**} к обеим частям последнего уравнения, то $y = x + x^{**} = x^{**} + \lambda (x^* - x^{**})$ оказывается уравнением отрезка, соединяющего точки x^{**} и $(x^* - x^{**}) + x^{**} = x^*$. Таким образом, имеем:

Точки $y + \lambda (x - y)$ [*или* $\lambda x + (1 - \lambda) y$] *при* $0 \leqq \lambda \leqq 1$ *являются точками отрезка прямой, соединяющего* x *и* y.

Мы уже определили (см. § Д3.3) линейное подпространство размерности $n - 1$ в пространстве размерности n.

---

*) Выпуклые множества рассматриваются в некоторых книгах по линейной алгебре. Среди них можно указать книги Хедли [1] и Лэнга. Изложение предмета на более высоком уровне дано у Валентине.

См. также Юдин Д. Б. и Гольштейн Е. Г., гл. 2. (*Прим. перев.*)

Такое подпространство задается уравнением

$px = 0$ (p — вектор-строка с n составляющими),

и определяется как *гиперплоскость, проходящая через точку* 0 *ортогонально вектору* p.

Очевидно, что уравнение $(\lambda p)\, x = 0$ задает ту же гиперплоскость, что и уравнение $px = 0$, так что можно рассматривать p *нормированным*, т. е. с евклидовой нормой $pp' = 1$. Соотношение

$$p\,(x - y^*) = 0,$$

где y^* — произвольная точка из R^n, есть уравнение *гиперплоскости, проходящей через точку* y^* *ортогонально вектору* p.

Поскольку уравнение $p\,(x - y^*) = 0$ эквивалентно уравнению $px = py^*$ или $px = c$, где $c = py^*$, то всякое уравнение в форме $px = c$ является уравнением гиперплоскости, ортогональной вектору p.

Рассмотрим точку $x = \lambda p'$. Подставляя ее в уравнение $px = c$, имеем $\lambda pp' = c$, или $\lambda = c$, так как p нормированный. Такую точку всегда можно найти на гиперплоскости $px = c$. Она, очевидно, является точкой пересечения прямой, проходящей через начало координат R^n ортогонально гиперплоскости (она называется *нормалью* к гиперплоскости), и самой гиперплоскости. Расстояние d от этой точки до начала координат является длиной (или евклидовой нормой) вектора p и задается соотношениями $d^2 = \lambda^2 pp' = \lambda^2 = c^2$. Таким образом, можно утверждать, что:

Уравнение $px = c$, *где вектор* p *нормированный, представляет собой уравнение гиперплоскости, нормалью к которой является вектор* p. *Гиперплоскость* $px = c$ *пересекает нормаль на расстоянии* $|c|$ *от начала координат.*

Рассмотрим произвольный вектор $x \in R^n$. Обозначим скалярное произведение px через γ. Тогда x можно рассматривать как точку в гиперплоскости $px = \gamma$. Каждая точка из R^n может рассматриваться как точка, лежащая в гиперплоскости $px = \gamma$ при некотором значении γ. (Все эти гиперплоскости, обладающие одной и той же нормалью, называются *параллельными*). Множество гиперплоскостей $px = \gamma$ можно разделить на два подмножества в зависимости от их расположения относительно гиперплоскости H с уравнением $px = c$. К первому подмножеству отнесем те, для которых $\gamma \geqq c$, ко второму — те, для которых $\gamma \leqq c$.

Таким образом, каждая точка $x \in R^n$ принадлежит, по крайней мере, одному из двух множеств

$$H^+ = \{x \mid px \geqq c\}, \quad H^- = \{x \mid px \leqq c\}.$$

Эти два множества называются *полупространствами*, определенными гиперплоскостью H. Сама гиперплоскость H принадлежит обоим полупространствам, так что $H^+ \cap H^- = H$. Иногда нам потребуется исключать точки H из полупространств. В таком случае будем говорить об *открытом полупространстве*. Термин «полупространство» будем использовать для обозначения замкнутого полупространства до тех пор, пока оно не будет обозначено иначе.

Наконец, для фиксированной точки y^* и переменной точки x имеем

$$(x - y^*)'(x - y^*) = \sum (x_i - y_i^*)^2.$$

В R^2 и R^3 уравнение

$$(x - y^*)'(x - y^*) = c^2$$

представляет собой окружность и соответственно сферу радиуса c с центром в точке y^*. Аналогичное уравнение в R^n назовем уравнением *гиперсферы* радиуса c с центром в точке y^*.

Д4.2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Определим следующее понятие, имеющее большое значение для различных разделов математической экономики.

Говорят, что множество S выпукло, если $\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$ для любых $x, y \in S$ и $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

Так как точки $\lambda x + (1 - \lambda) y$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, являются точками отрезка прямой, соединяющего x и y, то множество выпукло, если оно содержит каждую точку отрезка, соединяющего две любые точки этого множества.

На рис. Д4.1 показаны различные множества, одни из которых выпуклы, другие нет.

Выпуклое множество, все границы которого линейны (прямые или гиперплоскости подобно тем, которые показаны на рис. Д4.1, *а* и *е*), называется *выпуклым многогранным* *множеством* (или, в оговоренных ниже случаях,— *выпуклым многогранником*). Более формальное определение для этого случая дано позже. Выпуклое множество не обязательно ограничено (например, множество на рис. Д4.1, *е*). Пространство R^n, любое его линейное подпространство, прямая, полупространство, гиперплоскость представляют собой, очевидно, выпуклые множества.

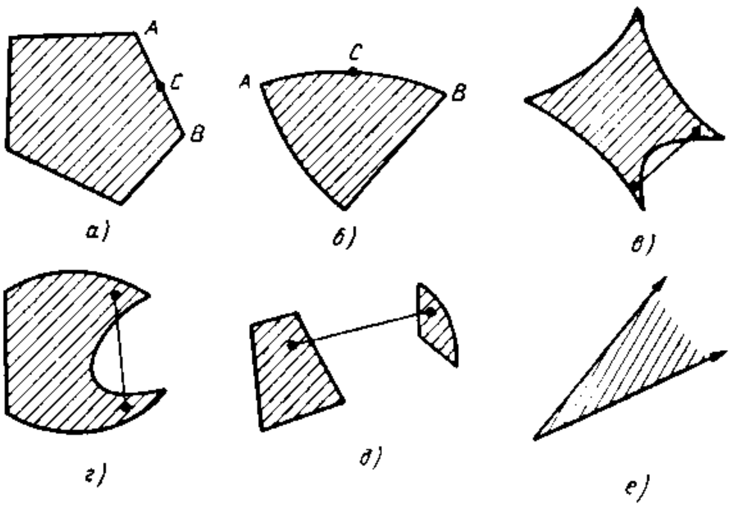


Рис. Д4.1. Выпуклые и невыпуклые множества.

Гиперсфера не является выпуклым множеством, но точки внутри гиперсферы (*открытый шар*) и внутренние точки вместе с точками самой гиперсферы (*замкнутый шар*) образуют выпуклые множества.

Если S выпукло и $x, y \in S$, то, по определению, $w = \lambda x + (1-\lambda) y \in S$ для $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Рассмотрим точку $z \in S$, $z \neq w$. Тогда $\mu w + (1-\mu) z \in S$ для $0 \leqq \mu \leqq 1$. Заменяя w в последнем выражении, имеем $\mu\lambda x + \mu (1-\lambda) y + (1-\mu) z \in S$ для $0 \leqq \lambda, \mu \leqq 1$. Обозначим $\gamma_1 = \mu\lambda$, $\gamma_2 = \mu (1-\lambda)$, $\gamma_3 = (1-\mu)$. Имеем $0 \leqq \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \lambda\mu + \mu (1-\lambda) + (1-\mu) = 1$ и $\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \in S$.

Очевидно, можно обобщить этот вывод и получить следующее утверждение:

а) если $x^1, \ldots, x^m$ *— точки выпуклого множества* S, *то точка* $x = \sum_1^m \lambda_i x^i$, *где* $0 \leqq \lambda_i \leqq 1$, $\sum_1 \lambda_i = 1$, *также принадлежит множеству* S *).

Из а) непосредственно следует, что

б) множество выпуклых комбинаций любого заданного числа точек из R^n *есть выпуклое множество.*

Если S и S' — выпуклые множества, а точки x и y принадлежат обоим множествам, то весь отрезок, соединяющий точки x и y, лежит в обоих множествах S и S'. Мы пришли к следующему важному результату:

в) пересечение выпуклых множеств выпукло **).

Пусть $x^1, \ldots, x^m$ точки из R^n. Совокупность их выпуклых комбинаций будем обозначать через $\mathrm{Co}(x^1, \ldots, x^m)$. Если S любое выпуклое множество, содержащее точки $x^1, \ldots, x^m$, то в соответствии с (а) S содержит и $\mathrm{Co}(x^1, \ldots, x^m)$. Следовательно,

г) $\mathrm{Co}(x^1, \ldots, x^m)$ *есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих точки* $x^1, \ldots, x^m$, *т. е. наименьшее из этих множеств. Множество* $\mathrm{Co}(x^1, \ldots, x^m)$ *называется также выпуклой оболочкой, или выпуклым замыканием векторов* $x^1, \ldots, x^m$.

Это понятие используется иногда для того, чтобы привести в соответствие произвольному множеству выпуклое;

д) если S *— произвольное множество точек из* R^n *(не обязательно выпуклое), то наименьшее выпуклое множество, содержащее* S *или выпуклую комбинацию точек из* S, *называется выпуклой оболочкой, или выпуклым замыканием множества* S, *и обозначается* $\langle S\rangle$ *или* $\mathrm{Co}(S)$.

Рассмотрим теперь решение системы линейных неравенств

$$Ax \leqq b.$$

Если A — матрица порядка $m \times n$, то система содержит m неравенств $A_i x \leqq b_i$. Множество $X^i = \{x \mid A_i x \leqq b_i\}$ является полупространством и, следовательно, выпуклым

---

*) Взвешенная сумма $\sum_i \lambda_i x^i$ с неотрицательными весами, которые в сумме равны единице, называется *выпуклой комбинацией* точек x^i. Это частный случай линейной комбинации.

**) Объединение выпуклых множеств, вообще говоря, не выпукло.

множеством. Так как решение системы есть пересечение множеств X^i, каждое из которых выпукло, то

е) множество решений системы линейных неравенств выпукло.

Множество решений системы линейных уравнений является линейным подпространством и, следовательно, выпуклым множеством. Рассмотрим множество неотрицательных решений системы $Ax = b$. Множество неотрицательных векторов $x \geqq 0$ является решением системы линейных неравенств и поэтому выпукло. Множество неотрицательных решений системы $Ax = b$ является пересечением множества всех решений системы и множества всех неотрицательных векторов; следовательно,

ж) множество неотрицательных решений системы линейных уравнений выпукло.

Наконец, заметим, что выпуклость устанавливается линейными соотношениями и не нарушается операциями, сохраняющими линейность. Легко видеть, что:

з) *если множества S и S' выпуклы, то выпуклы и множества $S + S'$, $S - S'$, $\lambda S'$. Линейное отображение $x \to Tx$ всегда переводит выпуклое множество в выпуклое.*

Д4.3. РАЗДЕЛЯЮЩАЯ И ОПОРНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Мы видели, что гиперплоскость H определяет в R^n два полупространства. Если заданы два выпуклых множества S и S', то можно найти такую гиперплоскость H, что S будет лежать в одном полупространстве, определенном H, а S' — в другом. В этом случае гиперплоскость H называют гиперплоскостью, *разделяющей* множества S и S'. Если задано одно выпуклое множество S, то можно найти такую гиперплоскость, что S будет лежать в одном из определенных ею полупространств и, по крайней мере, одна точка S будет принадлежать самой гиперплоскости. Такая гиперплоскость называется *опорной*.

Прежде чем обсуждать проблему существования такой гиперплоскости, докажем следующий вариант теоремы Минковского:

Теорема Минковского. *Пусть S — замкнутое выпуклое множество, а точка z^* — внешняя к S. Тогда существуют такие вектор p и точка $x^* \in S$, что $px \geqq px^* > pz^*$ для всех $x \in S$.*

Выберем на границе S такую точку x^*, которая минимизирует выражение $(z^*-x)'(z^*-x)$ по всем $x \in S$, (точка x^* является «ближайшей» к z^* точкой множества S). Этот минимум существует, так как $(z^*-x)'(z^*-x) \geqq 0$ и может равняться нулю лишь при $z^*=x$. Но $x \in S$, а $z^* \notin S$, так что произведение отлично от нуля, но ограниченно снизу и, следовательно, достигает минимума.

Пусть x — произвольная точка множества S, тогда по определению выпуклого множества $x^*+\lambda(x-x^*) \in S$ при $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Далее

$$[x^*+\lambda(x-x^*)-z^*]'[x^*+\lambda(x-x^*)-z^*] \geqq (x^*-z^*)'(x^*-z^*),$$

поскольку x^*, «ближайшая» к z^* точка множества S. Если раскрыть скобки, использовать равенства $(x+y)'=x'+y'$ и $x'y=y'x$ и провести соответствующие сокращения, получим

$$\lambda^2(x-x^*)'(x-x^*)+2\lambda(x^*-z^*)'(x-x^*) \geqq 0,$$

или для $\lambda>0$:

$$\lambda(x-x^*)'(x-x^*)+2(x^*-z^*)'(x-x^*) \geqq 0.$$

Это неравенство должно быть справедливо для любого сколь угодно малого $\lambda>0$. Устремим λ к нулю. Получим

$$(x^*-z^*)'(x-x^*) \geqq 0. \qquad (Д4.3.1)$$

Положим $p=(x^*-z^*)'$ и запишем

$$x-x^*=(x-z^*)-(x^*-z^*)=(x-z^*)-p'.$$

Используя (Д4.3.1), имеем

$$p(x-z^*)-pp' \geqq 0.$$

Но $pp'>0$, поэтому $p(x-z^*)>0$. Далее, непосредственно из (Д4.3.1), получаем $p'(x-x^*) \geqq 0$. Объединяя эти неравенства, приходим к соотношениям

$$px \geqq px^* > pz^*,$$

и теорема доказана.

Таким образом, теорема Минковского устанавливает существование гиперплоскости $px=pz^*$, проходящей через точку z^* и содержащей множество S в одном из определяемых ею полупространств. Тогда для любой гиперплоскости $px=c$, для которой $px^*>c>pz^*$, точка z^* лежит в одном из ее полупространств, а множество S в другом. Заметим, что нормалью к гиперплоскости Минковского является прямая $p' = \lambda (x^* - z^*)$, проходящая через точку z^* и «ближайщую» к ней точку множества S.

Смысл теоремы можно проиллюстрировать в R^2, обращаясь к рис. Д4.1. Гиперплоскостью в R^2 является, конечно, прямая линия. Необходимость выпуклости становится понятной, если выбрать точку z^* внутри выемки с правой стороны множества, изображенного на рис. Д4.1 (г).

Можно доказать следующие четыре важные следствия теоремы Минковского:

а) *пусть x^* — граничная точка замкнутого выпуклого множества S. Тогда существует опорная к S гиперплоскость, проходящая через точку x^*;*

б) *замкнутое выпуклое множество есть пересечение его опорных полупространств;*

в) *два замкнутых ограниченных выпуклых множества, не имеющие общих точек, всегда могут быть «разделены» гиперплоскостью;*

г) *два замкнутых выпуклых множества, пересекающиеся в единственной точке, могут быть «разделены» гиперплоскостью, которая является также опорной для обоих множеств.*

Выберем произвольную точку z^*, внешнюю к множеству S, и построим гиперплоскость Минковского $px = c$, где $px^* > c > pz^*$. Пусть $c \to pz^*$, тогда получим опорную гиперплоскость, проходящую через x^*, так как x^* лежит в гиперплоскости и $px \geqq px^*$ для всех $x \in S$.

Интуитивно ясно, а можно доказать и формально, что каждая граничная точка имеет, по крайней мере, одну внешнюю точку, к которой она является «ближайшей» среди всех точек множества S, и, следовательно, через каждую граничную точку множества S можно построить опорную гиперплоскость, что и доказывает следствие а).

Для доказательства следствия б) заметим, что, по определению опорной гиперплоскости, пересечение всех опорных полупространств должно содержать множество S. Пусть пересечение содержит также некоторую точку, не принадлежащую множеству S. Тогда можно найти гиперплоскость Минковского, лежащую внутри опорного полупространства, что противоречит определению. Это доказывает следствие б).

Докажем следствие (в). Пусть заданы два множества S и S'. Рассмотрим множество $S^* = S - S'$. Если S и S' — замкнутые выпуклые множества, то и S^* замкнуто и выпукло. Так как S и S' не имеют общих точек, то точка 0 является внешней к множеству S^*. Тогда по теореме Минковского существует гиперплоскость $p(x-y)=c$, проходящая через точку 0 и такая, что $p(x-y)>p\cdot 0=0$. Отсюда для любых $x\in S$ и $y\in S'$ имеем $px>py$, т. е. можно найти такое c, что $px\geqq c\geqq py$. Следовательно, S и S' лежат в различных полупространствах.

Наконец, чтобы доказать г), заметим, что если S и S' имеют единственную общую точку, то эта точка обязательно граничная точка множеств. Тогда точка 0 является граничной точкой множества $S^*=S-S'$. Гиперплоскость, опорная к множеству S^* в точке 0, такова, что $p(x-y)\geqq 0$, причем $p(x-y)=0$ только в том случае, когда $x=y$. Это задает гиперплоскость, разделяющую множества S и S' и опорную для обоих множеств.

Если граница множества S в точке x^* имеет единственную касательную гиперплоскость, то естественно ожидать, что опорная гиперплоскость в точке x^* отождествляется с нею. В других случаях может существовать множество опорных гиперплоскостей к множеству S в граничной точке, которая в этом случае называется «угловой».

Д4.4. КРАЙНИЕ ТОЧКИ *)

Точка x^h называется крайней (экстремальной) точкой выпуклого множества S, если она не может быть представлена в форме

$$x^h=\lambda x^i+(1-\lambda)x^j,\quad 0<\lambda<1,\quad x^i,\ x^j\in S.$$

Заметим, что в этом определении λ заключено в открытый интервал $(0, 1)$. Геометрически это значит, что крайняя точка не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки выпуклого множества. Она может быть лишь одной из концевых точек этого отрезка.

Очевидно, что крайняя точка должна быть граничной, но не все граничные точки являются крайними. На рис. Д4.1, *а* точки A и B крайние, а C нет. С другой стороны, на рис. Д4.1, *б* точка C является крайней, так же как и точки A и B, так как границей AB служит кривая линия. В выпуклом множестве с непрерывно искривленной

---

*) Крайние точки называются иногда *угловыми* или *экстремальными* точками. (*Прим. перев.*)

границей, подобном диску или шару, *каждая* граничная точка является крайней.

Теперь можно дать формальное определение выпуклого многогранного множества и многогранника.

Выпуклое множество, имеющее конечное число крайних точек, называется выпуклым многогранным множеством *).

Существуют две основные теоремы о крайних точках. Обе они являются важными в теории линейного программирования.

а) *Пусть замкнутое выпуклое множество S ограничено либо сверху, либо снизу (либо и сверху, и снизу). Тогда каждая его опорная гиперплоскость содержит крайнюю точку.*

б) Теорема Крейна — Мильмана

Выпуклое замкнутое ограниченное множество S является выпуклым замыканием его крайних точек. Если S — многогранник, то любая его точка является выпуклой комбинацией конечного числа его крайних точек.

Рассмотрим опорную к S гиперплоскость H, определенную равенством $px = px^*$, где x^* — граничная точка множества S. Тогда $px \geqq px^*$ для всех $x \in S$. Пусть $T = H \cap S$; тогда T есть замкнутое выпуклое подмножество множества S и ограничено в том же смысле, в каком ограничено S.

Пусть $\hat{x}$ — крайняя точка множества T. Покажем, что она является также крайней точкой множества S. Допустим, что это не так, тогда

$$\hat{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad x^1,\ x^2 \in S. \qquad (Д4.4.1)$$

Умножим обе части равенства скалярно на p, получим

$$p\hat{x} = \lambda p x^1 + (1-\lambda) p x^2. \qquad (Д4.4.2)$$

Но $p\hat{x} = px^*$, так как $T \subset H$. Поскольку гиперплоскость H — опорная к множеству S, то $px^1 \geqq px^*$, $px^2 \geqq px^*$, а так как $\lambda > 0$ и $(1-\lambda) > 0$, то $\lambda px^1 + (1-\lambda) px^2 > px^*$, за исключением случая, когда $px^1 = px^*$ и $px^2 = px^*$. Таким образом, равенство (Д4.4.2) возможно лишь в этом последнем случае. Но тогда x^1, $x^2 \in H$, а следовательно, и множеству T, и $\hat{x}$ не может быть крайней точкой множества T, как утверждалось. Таким образом, крайняя точка множества T должна также быть и крайней точкой множества S.

*) Ограниченное выпуклое многогранное множество называется *многогранником*. (*Прим. перев.*)

Найдем теперь крайнюю точку множества T следующим образом. Множество S, а следовательно, и T ограничено сверху или снизу. Допустим, что оно ограничено снизу (в случае ограниченности сверху рассуждения аналогичны). Тогда в множестве T должна существовать точка, у которой первая координата x_1 — наименьшая среди первых координат всех точек множества T. Возьмем подмножество T_1 точек множества T, первые координаты которых равны этому наименьшему значению x_1. В множестве T_1 существует точка с наименьшей второй компонентой. Построим подмножество T_2 множества T_1 из таких точек T_1, у которых вторые компоненты равны этому наименьшему значению x_2. Продолжая этот процесс, найдем точку $\bar{x}$ с наименьшими первой, второй, и т. д. компонентами. Такая точка всегда существует. Покажем теперь, что $\bar{x}$ — крайняя точка множества T.

Предположим, что $\bar{x}$ не является крайней точкой множества T. Тогда

$$\bar{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad x^1,\ x^2 \in T. \quad (Д4.4.3)$$

По определению $\bar{x}$ ее первая компонента $\bar{x}_1 \leqq x_1^1$, $\bar{x}_1 \leqq x_1^2$. Эти неравенства не противоречат (Д4.4.3) только в том случае, если $x_1^1 = x_1^2 = \bar{x}_1$. Проведем аналогичные рассуждения относительно оставшихся компонент, пока, наконец, не придем к выводу, что (Д4.4.3) влечет равенство $\bar{x} = x^1 = x^2$.

Таким образом, точка $\bar{x}$, которая всегда существует, является крайней точкой множества T, и, следовательно, принадлежит гиперплоскости H, и утверждение а) доказано.

Чтобы доказать утверждение б), обозначим через Co выпуклое замыкание крайних точек множества S. Предположим, что точка $x^* \in S$, но $x^* \notin$ Co. Тогда x^* — внешняя точка по отношению к Co, и по теореме Минковского существует гиперплоскость, определенная равенством $px = px^* = c$, такая, что $px > c$ для всех $x \in$ Co.

Рассмотрим теперь линейное отображение $x \to px$, $x \in S$. Так как S — замкнутое ограниченное выпуклое множество, то множество $\{px \mid x \in S\}$ является также замкнутым, ограниченным и выпуклым. Но px — скаляр, т. е. это множество есть некоторый отрезок $[\alpha, \beta]$. Так как $x^* \in S$ и $px^* = c$, то $\alpha \leqq c \leqq \beta$.

Рассмотрим гиперплоскость $H' = \{x \mid px = \alpha\}$. H' содержит такие точки множества S, для которых $px = \alpha$. По определению α $px \geqq \alpha$ для всех $x \in S$. Таким образом, гиперплоскость H' является опорной по отношению к множеству S. Но по теореме (а) H' должна содержать крайнюю точку множества S. По определению эта крайняя точка должна принадлежать Co. Мы уже показали, что $px > c$ для всех $x \in$ Co, теперь же мы видим, что существует точка, принадлежащая Co, для которой $px = \alpha \leqq c$.

Таким образом, в множестве S не может быть точек, которые не принадлежали бы Co и, конечно, не может быть точек из Co, которые не принадлежали бы и S. Теорема доказана.

Важность этой теоремы заключается в утверждении того, что ограниченное выпуклое множество полностью определено заданием его крайних точек.

Д4.5. ВЫПУКЛЫЕ КОНУСЫ *)

Выпуклое множество, обладающее тем свойством, что для любого $x \in S$ $\lambda x \in S$ для всех $\lambda \geqq 0$, называется *выпуклым конусом*. Объединяя это свойство с определением выпуклого множества, можно независимо определить выпуклый конус как множество, для которого $\lambda x + \mu y \in S$ для всех $\lambda, \mu \geqq 0$, если только $x \in S$ и $y \in S$. Будем обозначать выпуклый конус символом C.

Очевидно, что R^n и все линейные подпространства являются выпуклыми конусами. Если гиперплоскость H проходит через начало координат (и, следовательно, является линейным подпространством), то H — выпуклый конус. Оба полупространства, определенные гиперплоскостью H, также являются выпуклыми конусами. Полупространства, определенные гиперплоскостями, которые не проходят через начало координат, являются выпуклыми множествами, но

---

*) Выпуклые конусы имеют большое значение для теории производства. Многие результаты, доказанные в гл. 7 с помощью методов линейного программирования, можно доказать и с помощью свойств конечных конусов.

В большинстве книг по линейной алгебре теория выпуклых конусов не излагается, однако в книге Хедли [1] она содержится.

На более высоком уровне изложение теории выпуклых конусов дано в работах Терстенхабера, Гейла [2], а также Гольдмана и Таккера [2].

не являются выпуклыми конусами. Множество $\{x \mid x = \lambda b, \lambda \geqq 0\}$ (такое множество называется *полупрямой*, или *лучом*) при любом векторе b есть выпуклый конус. Обычно полупрямую, определенную вектором b, обозначают через (b).

Если C_1 и C_2 — два выпуклых конуса, то, очевидно, $C_1 + C_2$ и $C_1 \cap C_2$ также являются выпуклыми конусами. Все выпуклые конусы пересекаются в начале координат, поэтому иногда мы будем рассматривать начало координат как выпуклый конус (0).

В трехмерном пространстве можно построить следующий пример выпуклого конуса, от которого и происходит это название. Представим себе плоскую непрозрачную пластину с вырезом в форме произвольного выпуклого множества. Если эту пластину вставить в проектор, то пучок света, проникая через вырез, образует в пыльной атмосфере выпуклый конус. Любое сечение выпуклого конуса будет выпуклым множеством. Выпуклые конусы, подобные тем, которые получаются с помощью проектора, являются заостренными. Формально мы определим этот термин ниже.

Очевидно, полупространство и линейное подпространство не являются заостренными в этом смысле.

Выпуклый конус является выпуклым множеством. Рассмотрим его крайние точки. Если $x \in C$, то $\lambda x \in C$ для всех $\lambda \geqq 0$. Таким образом, любая точка $x \neq 0$ может быть выражена следующим образом:

$$x = \lambda (1 + \lambda) x + (1 - \lambda) \frac{1 - \lambda - \lambda^2}{1 - \lambda} x,$$

и всегда можно выбрать λ так, что $0 < \lambda < 1$, а $1 - \lambda - \lambda^2 > 0$. Таким образом, любую точку $x \neq 0$ можно считать лежащей внутри отрезка, соединяющего две различные точки $(1 + \lambda) x$ и $[(1 - \lambda - \lambda^2)/(1 - \lambda)] x$, каждая из которых принадлежит C. Следовательно, если точка $x \neq 0$, то она не может быть крайней точкой. Только начало координат может быть крайней точкой. Имеет место следующее утверждение:

Выпуклый конус либо не имеет крайних точек, либо имеет начало координат своей единственной крайней точкой.

Если выпуклый конус является также и линейным подпространством, то он, очевидно, не имеет крайних точек. Теперь можно дать формальное определение термину «заостренный».

Выпуклый конус, имеющий начало координат своей крайней точкой, называется заостренным.

Следующий результат почти очевиден.

Выпуклый конус заострен тогда и только тогда, когда $C \cap (-C) = 0$ *).

Пусть C *— заостренный выпуклый конус. Тогда существует гиперплоскость* H, *проходящая через* 0, *которая является разделяющей для конусов* C *и* $(-C)$ *и опорной для обоих* **).

Рассмотренные выше выпуклые конусы встречаются в теории производства. Множество выпуска экономической системы с неоклассическими производственными функциями общего вида, указывающими на постоянство эффективности при изменении масштаба производства, представляет именно такой конус.

Однако наиболее важным классом выпуклых конусов является класс так называемых *конечных конусов*, который рассматривается в следующем параграфе.

Д4.6. КОНЕЧНЫЕ КОНУСЫ И ОДНОРОДНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Конечным конусом называется выпуклый конус, каждая точка которого может быть представлена как неотрицательная линейная комбинация конечного числа векторов. Конечный конус часто называется *выпуклым многогранным конусом*.

Формально используется одно из двух следующих определений.

Выпуклый конус C *конечен, если существует конечное число векторов* $v^i \in C$, *таких, что* $x = \sum \lambda_i v^i$, $\lambda_i \geqq 0$, *для всех* $x \in C$.

Выпуклый конус C *конечен, если существует конечное число полупрямых* (v^i), *таких, что* $C = \Sigma\,(v^i)$.

Полупрямые (v^i) во втором определении называются *образующими* конуса C. Первое определение можно пред-

*) Если $C \cap (-C) \neq 0$, например $H^+ = \{x \mid px \leqslant 0\}$ и $H^- = \{x \mid px \geqslant 0\}$, то существует такой $x \in C$, что $-x \in C$. Тогда $0 = {}^1/_{2x} + {}^1/_2\,(-x)$ не является крайней точкой.

**) Это непосредственно следует из предыдущего результата и утверждения (г) § Д4.3.

ставить в матрично-векторной форме. Пусть A — матрица со столбцами v^i, а u — вектор с компонентами λ_i. Тогда $C = \{x \mid x = Au,\ u \geqq 0\}$. Каждый конечный конус можно представить в этой форме, подобрав соответствующую матрицу A.

Можно непосредственно установить, что если C_1 и C_2 — конечные конусы, то конусы $C_1 + C_2$ и $C_1 \cap C_2$ также конечны.

Пусть L^r — линейное подпространство размерности r. Любую точку из L^r можно представить в виде линейной комбинации r базисных векторов $v^1, \ldots, v^r$, но коэффициенты комбинации не обязательно неотрицательны. Возьмем $2r$ векторов $v^1, \ldots, v^r, -v^1, \ldots, -v^r$. Тогда любую точку из L^r можно представить в виде линейной комбинации этих векторов с неотрицательными коэффициентами, так что:

линейное подпространство является конечным конусом.

Рассмотрим проходящую через начало координат гиперплоскость H с нормалью p. Гиперплоскость H, как линейное подпространство, является конечным конусом. Она определяет два полупространства $H + (p)$ и $H + (-p)$. Так как каждое из этих полупространств является суммой конечных конусов, то оно само есть конечный конус.

Полупространство, определенное гиперплоскостью, проходящей через начало координат, является конечным конусом.

Система однородных неравенств $Ax \leqq 0$ состоит из m неравенств $A_i x \leqq 0$. Но $H_i^- = \{x \mid A_i x \leqq 0\}$ есть полупространство и, следовательно, конечный конус. Множеством решений системы неравенств является пересечение полупространств H_i^-, т. е.:

Множество решений системы однородных линейных неравенств $Ax \leqq 0$ является конечным конусом *).

Отсюда множество $\{x \mid x \geqq 0\}$ является конечным конусом. Оно называется *неотрицательным ортантом*. Будем обозначать его через Ω (иногда через P). *Неположительный ортант* $\{x \mid x \leqq 0\}$, который будем обозначать через Ω^- (иногда через N) или просто через $-\Omega$, также является конечным конусом.

---

*) Большой интерес к конечным конусам вызван именно этим их свойством.

Множество X решений системы $Ax = 0$ есть линейное подпространство. Поэтому оно является конечным конусом. Множество $X \cap \Omega$ также конечный конус. Таким образом:

Множество неотрицательных решений системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ является конечным конусом.

Д4.7. ДВОЙСТВЕННЫЙ КОНУС *)

Пусть C — выпуклый конус, тогда множество $C^* = \{y \mid yx \leqq 0$, для всех $x \in C\}$ называется *двойственным конусом* к конусу C. Любой конус имеет свой двойственный. Нас в основном будет интересовать конус, двойственный к конечному конусу. Не все результаты из тех, которые будут получены для двойственного к конечному конусу, справедливы для двойственного к произвольному конусу. Двойственный конус иногда называют *отрицательным полярным конусом* **).

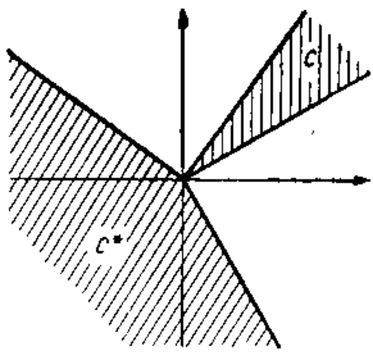


Рис. Д4.2. Двойственный конус.

Геометрически двойственный конус есть множество векторов, которые составляют неострый угол с векторами исходного конуса. Это может быть наглядно проиллюстрировано для заостренного конуса в двумерном пространстве (рис. Д4.2).

Пусть задана полупрямая (b). Тогда множество $(b)^* = \{y \mid yb \leqq 0\}$, т. е. двойственный конус к полупрямой есть полупространство, ограниченное гиперплоскостью, ортогональной к этой полупрямой. Так как $y0 \leqq 0$ для

---

*) Материал этого параграфа в книге не используется, так как теория неравенств изложена другими методами. Двойственные конусы позволяют провести очень изящные доказательства некоторых предложений.

**) *Положительным полярным конусом* называется множество $C^+ = \{y \mid yx \geqq 0$ для всех $x \in C\}$. Соответственно для двойственного или отрицательного полярного конуса вместо C^* используется обозначение C^-.

всех $y \in R^n$, то $(0)^* = R^n$, т. е. все пространство является двойственным конусом к конечному конусу (0). Поскольку вектор 0 является единственным, для которого $0x \leqq 0$ для всех $x \in R^n$, то $(R^n)^* = (0)$.

Пусть C — конечный конус. Сформулируем следующие соотношения между C и C^*:

а) C^* *конечный конус.*

б) (*Теорема двойственности для конечных конусов*) $(C^*)^* = C$.

Пусть C конечен, т. е. $C = \sum (v^i)$. Тогда C^* есть множество решений системы неравенств $yv^i \leqq 0$ и, следовательно, является конечным конусом, что и доказывает (а). Если C представлен в форме $C = \{x \mid x = Au,\ u \geqq 0\}$, то $C^* = \{y \mid yA \leqq 0\}$.

Для доказательства (б) заметим, что для любого $z \in (C^*)^*$ (конус $(C^*)^*$ будем обозначать символом C^{**}) имеем $yz \leqq 0$, если $y \in C^*$. Но если $y \in C^*$, то $yx \leqq 0$ для всех $x \in C$. Таким образом, $C \subset C^{**}$.

Согласно теореме а) C^* и C^{**} являются конечными конусами. Покажем, что $C^{**} \subset C$. Предположим противное, $C^{**} \not\subset C$. Тогда, поскольку C и C^{**} — конечные конусы и $C \subset C^{**}$, то $C^{**} = C + \sum (b^j)$, где (b^j) — полупрямые, не принадлежащие конусу C.

Если построить конус, двойственный к C^{**}, а затем двойственный к C^{***}, то получим конус C^{****}, который связан с C^{**} так же, как C^{**} связан с C. Это значит, что, по нашему предположению, $C^{****} \not\subset C^{**}$, так что $C^{****} = C^{**} + \sum (c^j) = C + \sum (b^j) + \sum (c^j)$, где (c^j) — полупрямые, не принадлежащие C^{**}. Если таким образом продолжить эту процедуру, то каждый раз к конусу C^{2n} (где $2n$ — количество последовательных операций построения двойственного конуса) будут добавляться новые полупрямые, так что C^{2n} при $n \to \infty$ не останется конечным конусом. Но C^{2n} получен последовательным применением операции построения двойственного к конечному конусу, т. е. должен быть конечным для любого n. Таким образом, предположение, что $C^{**} \not\subset C$, не верно. Следовательно, $C^{**} \subset C$, что вместе с доказанным включением $C \subset C^{**}$ доказывает утверждение (б) *).

*) Этот метод доказательства наглядно показывает, что для справедливости теоремы двойственности необходимо, чтобы конус C был конечным.

Пусть C_1 и C_2 — два конечных конуса. Можно сформулировать следующие соотношения между ними и конусами, двойственными к ним.

в) Если $C_1 \subset C_2$, то $C_2^* \subset C_1^*$.

г) $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$.

д) $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^*$.

е) $C \oplus C^* = R^n$.

Утверждение в) непосредственно следует из определения.

Докажем утверждение г). Пусть $x \in C_1^* \cap C_2^*$, тогда $xy_1 \leqq 0$ для всех $y_1 \in C_1$ и $xy_2 \leqq 0$ для всех $y_2 \in C_2$. Пусть $y \in (C_1 + C_2)$, т. е. $y = y_1 + y_2$, и $xy \leqq 0$, так что $x \in (C_1 + C_2)^*$. Таким образом, $(C_1^* \cap C_2^*) \subset (C_1 + C_2)^*$.

Обратно, пусть $x \in (C_1 + C_2)^*$, тогда $xy \leqq 0$ для всех $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in C_1$, $y_2 \in C_2$. Полагая $y_1 = 0$, имеем $xy_2 \leqq 0$, так что $x \in C_2^*$, а полагая $y_2 = 0$, найдем, что $x \in C_1^*$. Так что $x \in C_1^* \cap C_2^*$, т. е. $(C_1 + C_2)^* \subset (C_1^* \cap C_2^*)$, и утверждение г) доказано.

Утверждение д) является следствием г) и теоремы двойственности б).

Для доказательства утверждения (е) заметим, что $C \cap C^* = (0)$, так как если бы нашелся некоторый $x \in (C \cap C^*)$, то должно было бы выполняться неравенство $x'x \leqq 0$, что возможно лишь при $x = 0$. Рассмотрим двойственный к конусу (0). Используя утверждение (д) и соотношение $(0)^* = R^n$, получим утверждение (е). [В формулировке утверждения (*е*) мы использовали символ $\oplus$ прямой суммы, так как $C \cap C^* = (0)$.]

Результаты § Д3.7, связанные с линейными неравенствами, можно доказать, используя методы, основанные на конечных конусах и двойственности *).

В качестве примера докажем утверждение (ж) § Д3.7. Рассмотрим множество неотрицательных решений системы однородных линейных неравенств $Ax \leqq 0$. Множество всех решений системы является конечным конусом $C = \{x \mid Ax \leqq 0\}$. Двойственным к нему является конус $C^* = \{z \mid z = yA,\ y \geqq 0\}$. Множество неотрицательных решений системы $Ax \leqq 0$ есть $C \cap \Omega$.

Предположим, что не существует полуположительных решений ($x = 0$ должен быть решением), тогда имеем

$$C \cap \Omega = (0).$$

*) См. Г е й л [1, 2].

Применим к этому равенству операцию двойственности. Получим

$$C^* + \Omega^* = R^n,$$

или

$$C^* + \Omega^- = R^n,$$

так как двойственным к неотрицательному ортанту является неположительный ортант.

Точка 0, в частности, принадлежит R^n. Поэтому полученное равенство означает существование такого вектора $z \in C^*$, для которого

$$z - \beta = 0, \quad \beta \gg 0,$$

откуда

$$z \gg 0.$$

Но так как $z \in C^*$, то $z = yA$, $y \geqq 0$. Таким образом, существует некоторый y, такой, что

$$yA = z \gg 0, \quad y \geqslant 0$$

($y = 0$, очевидно, исключается).

Мы доказали, что если система $Ax \leqq 0$ не имеет полуположительных решений, то полуположительные решения имеет система $yA \geqq 0$. Это результат утверждения ж) § Д3.7.

Аналогичным путем можно доказать и другие результаты.

Упражнения

1. Задана гиперплоскость $4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 21$. Определите, какие из следующих точек лежат в одном и том же полупространстве:

$$(1\ 2\ 1\ 2\ 1); \quad (2\ 1\ 2\ 1\ 1); \quad (1\ 1\ 2\ 2\ 1).$$

2. Приведите пример, на котором графически или любым другим образом покажите, что:

а) объединение выпуклых множеств не обязательно выпукло;

б) пересечение невыпуклых множеств может быть выпуклым;

в) множество S необязательно выпукло, если $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \in S$ для всех $x^1, x^2 \in S$ и *некоторого* λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$.

3. Определите, какие из следующих множеств выпуклы:

а) $\{x_1, x_2 \mid x_1x_2 \leqq 1, \quad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0\}$;

б) $\{x_1, x_2 \mid x_1x_2 \leqq 1, \quad x_1 \leqq 0, \quad x_2 \leqq 0\}$;

в) $\{x_1, x_2 \mid x_1x_2 \leqq 1, \quad x_1 \leqq 0, \quad x_2 \geqq 0\}$;

г) $\{x_1, x_2 \mid x_1x_2 \leqq -1, \quad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \leqq 0\}$.

4. Преобразование $y = Ax$ переводит выпуклое множество S в выпуклое множество T. Покажите, что если матрица A квадрат-

ная и невырожденная, то крайние точки множества S переводятся в крайние точки множества T. Что будет, если (а) матрица A квадратная, но вырожденная, (б) матрица A не квадратная?

5. Каждое из следующих множеств точек принадлежит конечному конусу и каждое множество включает точки всех образующих конуса. Определите в каждом случае, какие точки лежат на образующих и является ли конус заостренным или нет:

а) $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, -1)$, $(-1, 2)$;

б) $(-1, 1)$, $(5, 5)$, $(3, -6)$, $(0, 2)$.

6. (Необязательное). Докажите результаты § Д3.7, используя свойства двойственных конусов.

ДОПОЛНЕНИЕ Д5

КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ

Это дополнение связано с дополнением Д3. Дополнение Д4 не обязательно должно ему предшествовать. Те читатели, которые опустили при чтении комплексные числа (см. § Д1.6) и комплексные векторы (см. § Д2.6), теперь должны их изучить. Те, кто хочет продолжить первое чтение, опуская теорию оптимизации (гл. 2—5), могут опустить это и следующие два дополнения и перейти сразу к дополнению Д8.

Д5.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Рассмотрим множество прямоугольных матриц порядка $m \times n$. Их можно складывать и вычитать, умножать на скаляр и составлять из них линейные комбинации. Мы имеем нулевую матрицу и определение равенства матриц. Однако у нас нет полной алгебры, так как, вообще говоря, мы не можем их перемножать. Мы можем, конечно, умножить одну матрицу на *транспонированную* другую, но транспонированная матрица не того же порядка, что исходная; произведение имеет порядок, отличный от порядка обеих матриц — сомножителей.

Множество *квадратных* матриц некоторого порядка образует полную алгебру. Любые две матрицы этого множества можно перемножить в любом порядке (хотя произведения AB и BA, вообще говоря, не равны друг другу), и их произведение будет элементом того же множества.

Можно умножить квадратную матрицу самое на себя и получить $AA = A^2$. Можно продолжить этот процесс,

---

*) Квадратные матрицы и характеристические корни рассматриваются во всех книгах по теории матриц. Элементарное изложение приведено в работе Ямане и Аллена [2]. Среди математической литературы для экономистов наиболее полезна книга Беллмана [1].

См. также Гантмахер [2]. (*Прим. перев.*)

чтобы определить A^n для целых положительных показателей n. Полагая $B = A^n$, можно определить $B^{\frac{1}{n}} = A$ и, таким образом, A^n определено для любого положительного рационального показателя n. Если не требовать равенства $AB = BA$, то многие алгебраические тождества для скаляров справедливы и для квадратных матриц. Например, имеем

$$(A + B)^2 = A^2 + (AB + BA) + B^2,$$

но, вообще говоря,

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + (BA - AB) \neq A^2 - B^2.$$

Квадратная матрица, состоящая из нулевых элементов на всех местах, кроме главной диагонали, называется *диагональной*. Обычно элементы диагональной матрицы обозначаются буквой с одним индексом. Так, элемент диагональной матрицы D будем обозначать через d_i.

Как следует из правила умножения матриц, умножение слева на диагональную матрицу, например DA, приводит к умножению k-й *строки* матрицы A на d_k, а умножение справа, AD, приводит к умножению на d_k k-го *столбца* матрицы A.

Отсюда непосредственно следует, что $DD = D^2$ является диагональной матрицей с элементами d_k^2. Продолжая умножение, получим, что D^n является диагональной матрицей с элементами d_k^n. Это очень важное свойство диагональных матриц.

Диагональная матрица I с элементами $d_k = 1$ для всех k называется *единичной*. Отсюда непосредственно следует, что $IA = AI = A$, так что I играет в алгебре матриц ту же роль, что и единица в алгебре скаляров.

Квадратные матрицы удовлетворяют обычным соотношениям алгебраических сумм и рядов. Для бесконечных рядов могут быть установлены соответствующие свойства сходимости (см. § Д5.6). Чтобы придать ряду матричный характер, следует вместо 1 использовать матрицу I. Например:

$$(I + A)^n = I + nA + \frac{n(n-1)}{2!} A^2 + \ldots + A^n.$$

Можно даже определить неалгебраические функции от A, если только они могут быть определены степенными рядами. Матричная экспонента e^{tA} определена рядом

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots .$$

Матричная экспонента очень важна в теории дифференциальных уравнений. Легко показать, что *)

$$e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}.$$

Однако равенство $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ справедливо тогда и только тогда, когда $AB = BA$. Подчеркнем, что все функции, определенные таким образом, сами являются матрицами того же порядка, что и A.

Д5.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ПРАВИЛО КРАМЕРА **)

Здесь предполагается, что читатель знаком с определителями невысоких порядков. Конечно, многие утверждения, сформулированные в терминах определителей, можно выразить иначе. Тем не менее они полезны и играют известную роль в современной математической экономике. В приложениях обычно нет необходимости в вычислении значения определителя. Часто достаточно установить, равен ли определитель нулю, или определить его знак.

Чтобы придать некоторый интерес предмету, приведем определение, несколько отличное от того, которое обычно используется, сформулируем свойства определителя и докажем те из них, которые легко следуют из данного определения.

Определитель есть скаляр, определенный на квадратной матрице. Пусть A — матрица порядка $n \times n$. Определителем матрицы A, который обычно обозначается «det A» (или $|A|$), называется скаляр, который:

а) является линейной функцией столбцов матрицы A;

б) равен нулю, если равны два соседних столбца матрицы A;

в) равен единице на матрице $A = I$.

---

*) Доказательство этих свойств приведено в книге Беллмана [3], гл. 10.

См. также Гантмахер [2]. (*Прим. перев.*)

**) Предполагается, что читатель знаком с правилами вычисления определителей. Эти правила приведены в работе Ямане и Аллена [1].

См. также любое руководство по линейной алгебре, например Карпелевич и Садовский. (*Прим. перев.*)

Для любой квадратной матрицы A определим также некоторые специальные определители. Обозначим через (A_{ij}) подматрицу порядка $(n-1) \times (n-1)$, полученную вычеркиванием i-й строки и j-го столбца матрицы A. Тогда $\det(A_{ij})$ называется *минором* элемента a_{ij} (он называется *главным минором*, если $j = i$); выражение $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}. Обычно алгебраическое дополнение обозначается через A_{ij}, а минор через $|A_{ij}|$.

Определитель $\det A$ обладает следующими свойствами:

а) *при умножении на* λ *любого столбца матрицы* A *определитель* $\det A$ *умножается на* λ;

б) *перемена местами двух соседних столбцов меняет знак* $\det A$ *на противоположный*;

в) *если любые два столбца матрицы* A *равны между собой, то* $\det A = 0$;

г) *добавление к любому столбцу матрицы* A *любого другого столбца, умноженного на произвольный скалярный множитель, оставляет* $\det A$ *неизменным*;

д) *если столбцы матрицы* A *линейно зависимы, то* $\det A = 0$;

е) при любом $1 \leqq i \leqq n$

$$\operatorname{Det} A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |A_{ij}|;$$

ж) $\operatorname{Det} A^T = \det A$;

з) $\operatorname{Det} AB = (\det A)(\det B)$.

Мы рассматриваем $\det A$ как линейную функцию столбцов матрицы. Запишем $\det A = D(A^1, \ldots, A^n)$, где A^j — j-й столбец матрицы A. Свойство а) непосредственно следует из пункта а) определения.

Рассмотрим теперь определитель матрицы, у которой j-й и $(j+1)$-й столбцы заменены столбцом, равным $A^j + A^{j+1}$. Имеем

$$D^* = D(\ldots, A^{j-1}, A^j + A^{j+1}, A^j + A^{j+1}, A^{j+2}, \ldots) = 0,$$

так как два соседних столбца матрицы равны между собой.

Используя свойство линейности, можно переписать D^* следующим образом:

$$D^* = D(\ldots, A^j, A^j, \ldots) + D(\ldots, A^{j+1}, A^{j+1}, \ldots) + \\ + D(\ldots, A^j, A^{j+1}, \ldots) + D(\ldots, A^{j+1}, A^j, \ldots).$$

Два первых определителя в этом выражении обращаются в нуль, так как оба содержат по два равных соседних столбца. Так как $D^* = 0$, то имеем равенство

$$D(\ldots, A^j, A^{j+1}, \ldots) = -D(\ldots, A^{j+1}, A^j, \ldots),$$

которое доказывает свойство (б).

Для доказательства свойства (в) заметим, что если столбцы A^j и A^k равны между собой, то, последовательно меняя местами пары столбцов, их можно сделать соседними. Каждая перемена местами пары соседних столбцов меняет знак $\det A$, но не меняет его абсолютного значения. Поскольку $\det A = 0$, если два его соседних столбца равны между собой, то он равен нулю и в том случае, если равны между собой два любых столбца матрицы A. Таким образом, свойство (в) доказано.

Если заменить A^j на $A^j + \lambda A^k$, то

$$D(\ldots, A^j + \lambda A^k, \ldots, A^k, \ldots) =$$
$$= D(\ldots, A^j, \ldots, A^k, \ldots) + \lambda D(\ldots, A^k, \ldots, A^k, \ldots).$$

Второй определитель равен нулю. Отсюда справедливость свойства (г).

Предположим теперь, что столбцы матрицы A линейно зависимы. Это означает, что можно найти такие числа λ_j, не все из которых равны нулю, что

$$\sum \lambda_j A^j = 0.$$

Выберем одно из чисел λ_j, которое не равно нулю. Пусть это λ_k. Имеем

$$\lambda_k A^k = -\sum_{j \neq k} \lambda_j A^j.$$

Положим $\mu_j = -\lambda_j/\lambda_k$. Тогда в определителе $D(\ldots A^k \ldots)$ столбец A^k можно заменить суммой $\sum \mu_j A^j$. Используя свойство линейности, получаем

$$D(\ldots A^k \ldots) = \sum_{j \neq k} \mu_j D(\ldots A^j \ldots).$$

Определители, стоящие в правой части равенства, содержат на месте столбца A^k соответственно столбцы $A^1, A^2, \ldots, A^{k-1}, A^{k+1}, \ldots, A^n$. Это значит, что каждый из них содержит два равных между собой столбца и, следовательно, равен нулю. Таким образом, $\det A = 0$, если столбцы матрицы A линейно зависимы, и свойство (д) доказано.

Свойство (е) можно доказать по индукции. Нетрудно также доказать свойства (ж) и (з).

Заметим, что свойство ж) позволяет заменить в определении и свойствах (а) — (е) столбцы на строки.

Теперь можно легко доказать в терминах определителей хорошо известное правило нахождения решений системы линейных неоднородных уравнений.

Запишем систему линейных уравнений $Ax = b$ в форме

$$\sum x_j A^j = b.$$

Рассмотрим определитель $D^k = D(\ldots A^{k-1}, \quad b, A^{k+1} \ldots)$, полученный заменой k-го столбца матрицы A на вектор-столбец b. Заменяя b в выражении для определителя суммой, получаем

$$D^{(k)} = D\left(\ldots A^{k-1}, \sum x_j A^j, A^{k+1}, \ldots\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j D(\ldots A^j \ldots).$$

Каждый из определителей, стоящих в последнем выражении, за исключением того, для которого $j = k$, обращается в нуль, так как содержит столбец A^j на j-м и k-м местах. Отсюда

$$D^{(k)} = x_k (\det A).$$

Таким образом, имеем

Правило Крамера. *Решение системы уравнений $Ax = b$ вычисляется по формуле*

$$x_k = \frac{D^{(k)}}{\det A},$$

где $D^{(k)}$ — определитель, полученный заменой в матрице A столбца A^k на вектор-столбец b.

Д5.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим матричное уравнение $AB = I$, где матрица A задана, а B неизвестна. Так как равенство двух матриц означает равенство их соответственных элементов, то мы имеем n^2 линейных уравнений с n^2 неизвестными b_{ij}:

$$\sum_k a_{ik} b_{kj} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j,$$

$$\sum_k a_{ik} b_{ki} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эти равенства можно рассматривать как n отдельных систем уравнений, каждая из которых составлена для отдельного столбца матрицы B. Обозначая j-й столбец матрицы B через B^j, получим систему

$$AB^j = c^j,$$

где c^j — вектор, имеющий единственную ненулевую компоненту, равную 1, на j-м месте.

Если $\det A \neq 0$, то система может быть разрешена относительно B^j однозначно. То же самое верно и для других B^j, так как коэффициенты матрицы A остаются неизменными для всех n систем, а меняется только позиция единицы в векторе c^j.

Таким образом, если матрица A невырожденная (т. е. $\det A \neq 0$), то уравнение $AB = I$ можно разрешить относительно B. Полученная в результате решения уравнения матрица B называется *обратной* к A и обозначается A^{-1}.

Пусть мы нашли матрицу B, удовлетворяющую уравнению $AB = I$. Проверим, можем ли мы рассчитывать на тот же результат при решении уравнения $BA = I$, так как, вообще говоря, мы не можем ожидать равенства $AB = BA$. Пусть задано уравнение $BA = I$. Умножим обе части этого уравнения справа на A^{-1}, получим $(BA)\,A^{-1} = A^{-1}$. Но $(BA)\,A^{-1} = B\,(AA^{-1}) = B$, так что $B = A^{-1}$.

Таким образом, если A невырожденная, то существует единственная обратная матрица A^{-1}, такая, что $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Обратная матрица произведения вычисляется в соответствии с правилом

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Обратная матрица произведения равна произведению обратных матриц сомножителей, взятых в обратном порядке.

Действительно, умножим обе части последнего равенства на (AB). Получим

$$(B^{-1}A^{-1})\;(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}B = I.$$

Поскольку $(AB)^{-1}\;(AB) = I$, то утверждение доказано.

Определим отрицательную степень матрицы A равенством $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Легко показать, что если D диагональная матрица с элементами d_k, то D^{-1} также диагональная, и ее элементами служат числа d_k^{-1}.

Пользуясь только правилом Крамера, можно вывести выражение для A^{-1} в терминах определителей, включающих элементы матрицы A*).

Как мы уже видели, каждый столбец матрицы $B = A^{-1}$ является решением системы линейных уравнений

$$AB^j = c^j$$

($c^j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера) **).

Тогда по правилу Крамера имеем

$$b_{ij} = \frac{D^{(i)}}{\det A},$$

где $D^{(i)}$ получен заменой i-го столбца матрицы A вектором c^j. Тогда i-й столбец $D^{(i)}$ содержит единственный ненулевой элемент, равный 1, на том месте, который в матрице A занимал элемент a_{ji}. Разлагая $D^{(i)}$ по i-му столбцу, имеем

$$D^{(i)} = A_{ji} \quad \text{(алгебраическое дополнение к элементу } a_{ji} \text{ в матрице } A\text{)},$$

так что

$$b_{ij} = A_{ji}/(\det A).$$

Таким образом,

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\det A}[A_{ji}],$$

или

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[A_{ij}]'.$$

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\det A = (-1)(4) - (2)(-3) = 2.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{ij} в этом случае диагонально противоположные им элементы, взятые со знаком $(-1)^{i+j}$.

Таким образом,

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

---

*) Для матриц высокого порядка существуют более удобные методы вычисления обратной матрицы, например метод исключения Гаусса.

**) Символ Кронекера δ_{ij} равен по определению нулю, если $i \neq j$, и единице, если $i = j$. Он бывает часто полезен для сокращения записи.

Чтобы получить A^{-1}, транспонируем $[A_{ij}]$ и разделим на $\det A$:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $AA^{-1} = I$

Д5.4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Рассмотрим систему уравнений $Ax = \lambda x$, где λ — скаляр. Эта система определяет преобразование вектора x в другой вектор λx.

Систему можно переписать в однородной форме

$$(A - \lambda I)\, x = 0.$$

Эта однородная система n уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение (т. е. отличное от $x = 0$) тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $(A - \lambda I)$ линейно зависимы, т. е. если $\det (A - \lambda I) = 0$.

Представим теперь $\det (A - \lambda I)$ в виде полинома степени n относительно λ. Это возможно, поскольку λ содержится только в элементах главной диагонали. Полученное таким образом алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней, не обязательно различных. Конечно, обычно не все корни действительные, но так как A — действительная матрица (в обычных экономических задачах), то комплексные корни будут встречаться сопряженными парами.

Уравнение $\det (A - \lambda I) = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Корни этого уравнения называются *характеристическими корнями*, *характеристическими числами* или *собственными значениями* матрицы A. Термин «собственное значение» широко используется в инженерных и физических задачах. В математической и экономической литературе чаще пользуются термином «характеристический корень».

Возьмем любой корень характеристического уравнения и подставим его в исходную систему уравнений. Получим уравнение

$$(A - \lambda_k I)\, x = 0,$$

которое имеет нетривиальное решение, так как $\det(A - \lambda_k I) = 0$. Пусть это вектор x^k. Он называется *характеристическим вектором* или *собственным вектором* матрицы A, соответствующим характеристическому корню λ_k.

Так как система уравнений однородна, то x^k определен лишь с точностью до умножения на скаляр, т. е. определено направление собственного вектора, но не его длина. Кроме того, так как λ_k не обязательно действительное число, то x^k может содержать комплексные компоненты. Однако, поскольку комплексные корни встречаются сопряженными парами, то комплексные собственные векторы также будут встречаться сопряженными парами.

Если матрица имеет n различных характеристических корней, что мы будем обычно предполагать, то она имеет и n различных собственных векторов. Обычно предполагается, что задачи, приводящие к матрицам с кратными характеристическими корнями, редко встречаются в экономических приложениях.

Соберем всю информацию, касающуются характеристических корней и собственных векторов, в одном месте так, чтобы это было удобно для большинства задач.

Пусть V — матрица порядка $n \times n$, составленная из собственных векторов матрицы A, так что k-м столбцом матрицы V служит x^k. Пусть Λ — диагональная матрица, у которой число λ_k занимает k-ю позицию на главной диагонали.

Рассмотрим произведение $V\Lambda$. Умножение справа матрицы V на диагональную матрицу Λ эквивалентно умножению k-го столбца x^k матрицы V на λ_k. Теперь рассмотрим произведение AV. По правилу умножения матриц k-й столбец матрицы AV равен Ax^k.

Таким образом, соотношение $AV = V\Lambda$ эквивалентно n уравнениям

$$Ax^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Характеристические корни и собственные векторы квадратной матрицы играют важную роль в некоторых статических и многих динамических моделях экономики.

Собственные векторы, как уже отмечалось, определены с точностью до умножения на скаляр. Это не всегда удобно. Поэтому мы будем рассматривать собственные векторы, нормированные в следующем смысле.

Пусть x^k — действительный собственный вектор, отвечающий произвольному значению скалярного множителя. Тогда

$$(x^k)' x^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i^k)^2 = \mu^2 \text{ (возьмем } \mu > 0).$$

Выберем вектор v^k так, что

$$v^k = \frac{1}{\mu} x^k.$$

Тогда v^k также является собственным вектором, таким, что $(v^k)' v^k = 1$. Вектор v^k называется *нормированным собственным вектором.*

Пусть $\bar{v}^k$ — комплексный собственный вектор. Ему соответствует вектор v^k, компонентами которого являются комплексные числа, сопряженные к компонентам вектора $\bar{v}^k$. В этом случае v^k нормирован, если $(\bar{v}^k)' v^k = 1$.

Теперь докажем следующее утверждение:

Пусть все характеристические корни матрицы A различны. Тогда ее собственные векторы линейно независимы.

Предположим противное, т. е. что собственные векторы матрицы A линейно зависимы. Это значит, что ранг r матрицы V меньше n. Тогда можно найти некоторый вектор $z \neq 0$, который является решением уравнения

$$Vz = 0.$$

В лучшем случае $n - r$ компонент вектора z могут быть определены произвольно.

Мы пришли к выводу, что уравнение $AVz = V\Lambda z$ имеет нетривиальное решение. Но так как $Vz = 0$, то

$$V\Lambda z = 0.$$

Таким образом, вектор $z' = \Lambda z$ является решением уравнения $Vz' = 0$.

Векторы z и z' могут различаться не более чем $n - r$ компонентами. Но i-я компонента вектора z' равна $\lambda_i z_i$, т. е. r корней имеют одинаковые значения, что противоречит предположению о том, что все характеристические корни различны.

Сформулируем основное свойство матриц, имеющих комплексные характеристические корни.

Если действительная матрица имеет комплексный корень, то соответствующий собственный вектор обязатель-

но комплексный. Число, сопряженное к комплексному корню, и вектор, сопряженный к соответствующему комплексному собственному вектору, также являются характеристическим корнем и собственным вектором этой матрицы.

Пусть λ — комплексный характеристический корень, а x — соответствующий ему собственный вектор действительной матрицы A. Они удовлетворяют уравнению

$$Ax = \lambda x$$

и, следовательно, уравнению $(Ax)^* = (\lambda x)^*$. Используя свойства сопряженных комплексных чисел, получаем

$$A^* x^* = \lambda^* x^*.$$

Но A — действительная матрица, поэтому $A^* = A$. Следовательно, справедливо равенство

$$Ax^* = \lambda^* x^*,$$

которое доказывает свойство.

Набор характеристических корней матрицы является важной n-параметрической характеристикой n^2-мерного объекта — матрицы. Ясно, что различные матрицы могут иметь одни и те же характеристические корни, но ниже мы увидим, что все эти матрицы связаны определенным образом, и различие характеристических корней является настолько важным свойством, что мы будем называть матрицы с одинаковыми корнями *подобными матрицами*.

Д5.5. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ (ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ)

Определим некоторую допустимую операцию $f(A)$ над квадратной матрицей A, которая приводит к новой квадратной матрице. Как связаны корни матрицы $f(A)$ с корнями матрицы A?

Это крайне важный вопрос, ответ на который прост, если уметь приводить матрицу к диагональному виду. Чтобы понять, что это означает, докажем следующее предложение.

Пусть T — произвольная невырожденная квадратная матрица. Тогда матрица $B = T^{-1}AT$ имеет те же характеристические корни, что и матрица A *).

*) Собственные векторы в этом случае, вообще говоря, не будут совпадать.

Так как B и A — подобные матрицы, то преобразование $B = T^{-1}AT$ часто называют *преобразованием подобия*.

Для доказательства предложения покажем, что матрица B удовлетворяет тому же характеристическому уравнению, что и A. Имеем:

$$T^{-1}(A - \lambda I)\,T = T^{-1}AT - \lambda T^{-1}IT = \\ = T^{-1}AT - \lambda I = B - \lambda I.$$

Следовательно,

$$\det(B - \lambda I) = \det[T^{-1}(A - \lambda I)\,T] = \\ = \det T^{-1}\cdot\det(A - \lambda I)\cdot\det T.$$

Последнее равенство следует из элементарной теории определителей ($\det AB = \det A\cdot\det B$).

Так как матрица T невырожденная, то равенство $\det(B - \lambda I) = 0$ влечет равенство $\det(A - \lambda I) = 0$, что и доказывает теорему.

Сформулируем теперь теорему о приведении матрицы к диагональному виду.

Пусть все характеристические корни матрицы A различны. Тогда существует матрица T, такая, что $T^{-1}AT = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица, состоящая из характеристических корней матрицы A.

Используем равенство, которое было приведено в предыдущем параграфе:

$$AV = V\Lambda,$$

где V — матрица, составленная из собственных векторов матрицы A. Если все характеристические корни матрицы A различны, то ее собственные векторы линейно независимы. Это значит, что матрица V невырожденная, и существует V^{-1}. Умножим обе части приведенного выше равенства слева на V^{1}. Получим

$$V^{-1}AV = V^{-1}V\Lambda = \Lambda.$$

Это не только доказывает сформулированную теорему, но и устанавливает, что диагонализирующей матрицей является матрица V, составленная из собственных векторов *).

Пусть заданы характеристические корни и собственные векторы некоторой матрицы A.

*) Диагонализирующая матрица известна так же, как *полярная* или *модальная* матрица.

Используя соотношение $A = V\Lambda V^{-1}$, можно восстановить матрицу A по матрице, составленной из ее собственных векторов.

Диагонализация матриц является полезной операцией. Следует, однако, помнить, что эта операция определена лишь для матриц, все характеристические корни которых различны. Для матриц с кратными характеристическими корнями интересна теорема аппроксимации Беллмана *).

Пусть A — матрица с кратными характеристическими корнями. Тогда существует другая матрица B, все характеристические корни которой различны, и такая, что ее элементы отличаются по абсолютной величине от элементов матрицы A не больше, чем на ε, где ε — наперед заданное сколь угодно малое положительное число.

Мы не приводим здесь доказательства этой теоремы, хотя оно и не сложно. В некоторых экономических исследованиях наличие кратных корней приводит к ошибкам. Используя теорему, можно избежать кратных корней при помощи малых вариаций элементов матрицы.

В некоторых задачах, особенно в физике, могут понадобиться численные значения характеристических корней и диагонализация может быть ключом к решению. Здесь мы лишь обратим внимание на некоторые важные теоретические результаты, которые просто получаются с помощью диагонализации.

Пусть λ_k — характеристические корни матрицы A. Тогда матрица A^n имеет характеристические корни λ_k^n, где n — рациональное положительное или отрицательное число.

При положительных целых n имеем:

$$T^{-1}AT = \Lambda,$$

$$AT = T\Lambda,$$

$$A^2T = AT\Lambda,$$

$$T^{-1}A^2T = T^{-1}AT\Lambda = \Lambda^2.$$

Тогда

$$A^2T = T\Lambda^2,$$

$$A^3T = AT\Lambda^2,$$

$$T^{-1}A^3T = \Lambda^3, \text{ и т. д.}$$

Пусть характеристическими корнями матрицы A^n являются числа λ^n. Тогда, полагая $B = A^n$, имеем, что числа

*) См. Беллман [3], теорема 7 гл. 11.

$\mu = \lambda^n$ являются характеристическими корнями матрицы B, а характеристические корни матрицы $B^{1/n}$ равны $\mu^{1/n}$.

Для отрицательных степеней имеем:

$$AT = T\Lambda,$$

$$T = A^{-1}T\Lambda,$$

$$T\Lambda^{-1} = A^{-1}T,$$

$$\Lambda^{-1} = T^{-1}A^{-1}T.$$

Заметим, что диагонализация матрицы A^n проводится с помощью той же матрицы T, что и диагонализация A. Так как эта матрица состоит из собственных векторов, то отсюда следует, что *матрица A^n имеет те же собственные векторы, что и A.*

Полученный результат используется при анализе линейных динамических моделей.

Так как все степени матрицы A диагонализируются одной и той же матрицей T и сумма диагональных матриц является диагональной матрицей, ненулевые элементы которой равны сумме соответствующих ненулевых элементов матриц-слагаемых, то можно сформулировать следующее важное предложение.

Пусть $f(A)$ — алгебраический полином относительно матрицы A, характеристическими корнями которой являются числа λ_i. Тогда характеристическими корнями матрицы $f(A)$ являются числа $f(\lambda_i)$, а собственными векторами — собственные векторы матрицы A.

Матрицу e^A можно рассматривать как пример матрицы, которую можно диагонализировать, чтобы получить e^{λ_i} на диагонали. Ряд для e^A можно диагонализировать и получить n рядов

$$e^{\lambda_i} = 1 + \lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2!} + \ldots, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые раскрывают многие особенности трансцендентных фукнций матриц.

Д5.6. СХОДИМОСТЬ МАТРИЧНЫХ РЯДОВ

В предыдущем параграфе мы привели примеры матричных рядов. Но мы еще не установили условий, при которых бесконечные матричные ряды сходятся.

Предполагая, как обычно, что матрица может быть диагонализирована, нетрудно видеть, что сходимость зависит от характеристических корней. Все члены степенного ряда можно диагонализировать одной и той же матрицей (матрицей собственных векторов матрицы A). Поэтому анализ матричного ряда сводится к анализу n числовых степенных рядов, каждый из которых соответствует конкретному характеристическому корню. К числовым рядам применимы обычные признаки сходимости.

В модели «затраты — выпуск» и теории матричных мультипликаторов часто встречается ряд

$$\Sigma = I + A + A^2 + A^3 + \ldots.$$

Если его диагонализировать, получим

$$T^{-1} \sum T = I + \Lambda + \Lambda^2 + \Lambda^3 + \ldots,$$

или, что то же самое,

$$1 + \lambda_i + \lambda_i^2 + \lambda_i^3 + \ldots, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Последний ряд сходится к $(1 - \lambda_i)^{-1}$, если $|\lambda_i| < 1$. Таким образом, матричный ряд сходится к матрице $(I - \Lambda)^{-1}$, если *каждый* из его характеристических корней по модулю меньше единицы *).

В этом случае имеем

$$T^{-1} \sum T = (I - \Lambda)^{-1}.$$

Обратив матрицы в обеих частях равенства, получим

$$T^{-1} \sum{}^{-1} T = I - \Lambda,$$

откуда

$$\sum{}^{-1} = I - T\Lambda T^{-1} = I - A.$$

Таким образом, если все характеристические корни матрицы по модулю меньше единицы, то ряд

$$I + A + A^2 + \ldots$$

сходится к матрице $(I - A)^{-1}$, подобно тому, как ряд $1 + a + a^2 + \ldots$ сходится к $(1 - a)^{-1}$, если $|a| < 1$.

*) Можно получить более слабые условия сходимости матричных рядов. Однако для последующих приложений достаточно приведенного условия.

Д5.7. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОР-СТРОКИ

При изучении характеристических корней и собственных векторов мы рассматривали систему уравнений $Ax = \lambda x$ и тем самым пришли к *собственным вектор-столбцам*. Теперь исследуем систему

$$yA = \lambda y.$$

Очевидно, что характеристические корни и характеристическое уравнение остались неизменными. Подставляя характеристические корни в уравнения системы, получим собственные вектор-строки. Как связаны друг с другом собственные вектор-строки и собственные вектор-столбцы?

Соберем все нормированные собственные вектор-строки в матрицу U точно так же, как мы собирали вектор-столбцы в матрицу V. Тогда уравнения для всех характеристических корней можно, как и раньше, записать в форме

$$UA = \Lambda U.$$

Так же как и раньше, можно диагонализировать матрицу A. Тогда получим

$$UAU^{-1} = \Lambda.$$

Если сравнить это равенство с равенством $V^{-1}AV = \Lambda$, где матрица V составлена из нормированных собственных вектор-столбцов, то увидим, что U и V с точностью до умножения на скаляр *) связаны равенством

$$U = V^{-1}.$$

Таким образом, два множества векторов U и V содержат одну и ту же информацию, и в каждом конкретном случае можно использовать одно из них. Рассмотрим теперь вектор-строку u^k и вектор-столбец v^k, соответствующие характеристическим корням λ_k. Тогда $u^k v^k$ есть k-й диагональный элемент матрицы UV. Но $UV = I$, так что $u^k v^k = 1$. Таким же образом приходим к выводу, что $u^j v^k = 0$ при $j \neq k$, так что каждая вектор-строка u^k ортогональна всем вектор-столбцам v^j, за исключением v^k.

---

*) Используя матрицу, составленную из вектор-столбцов, имеем $V^{-1}A = \Lambda V^{-1}$. Очевидно строки матрицы V^{-1} являются собственными векторами. Выбирая соответствующим образом скалярный множитель, можно добиться равенства $U = V^{-1}$.

Проведенный выше анализ должен был бы быть расширен на случай комплексных характеристических корней. Мы этого делать не будем. Заметим только, что U, V и другие матрицы собственных векторов являются в этом случае матрицами с комплексными элементами. Собственные вектор-строки иногда называют *левыми собственными векторами*, а собственные вектор-столбцы — *правыми собственными векторами*.

Д5.8. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим матрицу порядка 2×2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Для каждого характеристического корня можно теперь решить систему уравнений и определить собственный вектор. Для $\lambda_1 = -1$ имеем

$$x_1 + 4x_2 = (-1)\, x_1,$$
$$x_1 + x_2 = (-1)\, x_2.$$

Как видим, второе уравнение совпадает с первым. Этого и следовало ожидать. Решение однородной системы определяется с точностью до скалярного множителя, который будем считать выбранным так, чтобы $x_2 = 1$.

Таким образом, первый собственный вектор

$$x^1 = (-2,\ 1)'.$$

Аналогичным образом получаем второй собственный вектор

$$x^2 = (2,\ 1)'.$$

Составим матрицу собственных векторов:

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение $AV = V\Lambda$ в этом случае имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Непосредственное вычисление позволяет убедиться в справедливости этого равенства.

Вычислим V^{-1}:

$$V^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Определим теперь собственные вектор-строки. Имеем:

$$\text{для } \lambda_1=-1 \quad y_1+y_2=(-1)\,y_1, \quad y^1=\left(-\frac{1}{2},\ 1\right);$$

$$\text{для } \lambda_2=3 \quad y_1+y_2=3y_1, \quad y^2=\left(\frac{1}{2},\ 1\right).$$

Матрица вектор-строк равна

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Выбор $y_2=1$ был произвольным. Если вместо этого выберем $y_2=\frac{1}{2}$, то получим

$$Y=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

т. е. $Y=V^{-1}$.

Заметим, что матрица A *положительна*, т. е. $a_{ij}>0$ для всех i, j. Она имеет *положительный характеристический корень*, который является наибольшим по абсолютной величине корнем характеристического уравнения. Оба соответствующих ему собственных вектора $x^2=(2,\ 1)$ и $y^2=\left(\frac{1}{2},1\right)$ *положительны.* Как будет показано в дополнении Д7, эти свойства являются общими для всех положительных матриц.

Пример 2. (Комплексные корни). Рассмотрим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Её характеристическое уравнение

$$\lambda^2-2\lambda+5=0$$

имеет корни $1+2i$ и $1-2i$.

Для определения собственных векторов имеем при $\lambda_1=1+2i$:

$$x_1-4x_2=(1+2i)\,x_1.$$

Полагая $x_2=1$, получаем $x^1=(2i,\ 1)$.

Другой вектор-столбец равен $x^2 = (-2i, 1)$, т. е. x^1 и x^2 комплексно-сопряженные. Далее имеем

$$V = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением получаем

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{4}\right) i & \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{4}\right) i & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

т. е. собственные вектор-строки также комплексно-сопряженные.

В случае комплексных корней произвольный скалярный множитель собственного вектора может быть как комплексным числом, так и действительным. Если выбрать его так, чтобы $x_2 = i$, то координата x_1 будет действительной, а x_2 — мнимой.

В примерах мы выбирали одну компоненту вектора равной 1 или какому-нибудь другому числу. Для приложений удобней выбирать *нормированный* вектор. Для этого скалярный множитель выбирается так, чтобы сумма квадратов компонент равнялась единице. В последнем примере x_2 выбираем так, чтобы $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$. Это дает векторы $x^1 = [(2/\sqrt{5})\, i,\ 1/\sqrt{5}]'$, $x^2 = [(-2/\sqrt{5})\, i,\ 1/\sqrt{5}]'$.

Упражнения.

1. Даны матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

и вектор $b = [1 \quad 2 \quad 1]'$.

а) Вычислите A^{-1} и докажите, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

б) Решите систему $Ax = b$ непосредственным вычислением $A^{-1}b$.

в) Решите систему $Ax = b$, используя правило Крамера.

2. а) Вычислите характеристические корни и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

б) Покажите непосредственным вычислением, что характеристические корни матриц A^2 и A^{-1} равны соответственно квадратам и обратным числам корней матрицы A, и что собственные векторы матриц A, A^2 и A^{-1} совпадают.

3. Докажите непосредственным вычислением, что характеристические корни матрицы $(I + A)^3$ равны $(1 + \lambda)^3$, где λ — корни матрицы A, и что A и $(I + A)^3$ имеют одинаковые собственные векторы. Выполните эти вычисления для матриц примера 1 § Д5.8 и упражнения 2.

4. Вычислите с помощью диагонализации матрицу e^A, где A — матрица упражнения 2.

5. Определите характеристические корни и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Покажите, что A имеет комплексные корни, а A^2 — действительные.

Как объяснить, что комплексные собственные векторы матрицы A с действительными характеристическими корнями могут быть собственными векторами матрицы A^2, характеристические корни которой действительны?

ДОПОЛНЕНИЕ Д6

СИММЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Содержание этого дополнения основано на материале дополнения Д5. Читатель может опустить § 6.3 до тех пор, пока не захочет детально изучить классическую задачу оптимизации (гл. 4, § 4.5).

Д6.1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ *)

Вещественная матрица A называется *симметрической*, если $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j. Это означает, что симметрическая матрица совпадает со своей транспонированной. Матрица, для которой $a_{ij} = -a_{ji}$, т. е. матрица, равная своей транспонированной, взятой со знаком минус, называется *кососимметрической*. Ее диагональные элементы обязательно должны быть равны нулю.

Оба эти типа матриц обладают важными специальными свойствами.

В экономических задачах интерес к *вещественным симметрическим матрицам* в основном обусловлен двумя их следующими наиболее важными свойствами:

а) *все характеристические корни вещественной симметрической матрицы действительны*;

б) *собственные векторы вещественной симметрической матрицы взаимно ортогональны* **).

Оба эти результата можно получить из простой *леммы*.

Пусть λ_1 *и* λ_2 — *два характеристических корня вещественной симметрической матрицы, а* x^1 *и* x^2 — *соответствую-*

*) Материал этого и следующего параграфов является стандартным. В некоторой форме он излагается во всех источниках, рекомендованных в предыдущем дополнении. Относительно материала § Д6.3 смотри примечание в начале этого параграфа.

**) Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Геометрически это означает, что они перпендикулярны друг другу.

щие им собственные векторы. Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\ (x^1)'\ x^2 = 0.$$

Сначала заметим, что для симметрической матрицы $x'Ay = y'Ax$, где x и y произвольные n-мерные векторы. Этот результат вытекает из следующих равенств:

$$x'Ay = (x'Ay)' = y'A'x = y'Ax.$$

Далее, так как λ_1 и λ_2 — характеристические корни, а x^1 и x^2 — соответствующие им собственные векторы, то

$$Ax^1 = \lambda_1 x^1, \quad Ax^2 = \lambda_2 x^2.$$

Умножим слева первое равенство на $(x^2)'$, а второе — на $(x^1)'$. Получим

$$(x^2)'\ Ax^1 = \lambda_1\ (x^2)'\ x^1, \quad (x^1)'\ Ax^2 = \lambda_2\ (x^1)'\ x^2.$$

Но $(x^2)'x^1 = (x^1)'\ x^2$, так как обе части равенства скаляры. Выше уже показано, что $(x^2)'\ Ax^1 = (x^1)'\ Ax^2$; следовательно,

$$\lambda_1\ (x^2)'\ x^1 = \lambda_2\ (x^1)'\ x^2,$$

и лемма доказана.

Докажем свойство (а). Предположим противное. Пусть существует комплексный характеристический корень λ. Поскольку A — вещественная матрица, то число $\bar{\lambda}$, комплексно сопряженное к λ, должно быть также характеристическим корнем матрицы A. Отсюда, если x — собственный вектор, соответствующий корню λ, то вектор $\bar{x}$ — комплексно-сопряженный к x — является собственным вектором, соответствующим корню $\bar{\lambda}$.

Используя лемму, имеем

$$(\lambda - \bar{\lambda})\ x'\bar{x} = 0.$$

Здесь скалярное произведение $x'x$ равно сумме квадратов модулей компонент вектора x (модули соответствующих компонент векторов $\bar{x}$ и x равны между собой) и отлично от нуля. Поэтому имеем

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0.$$

Но, по определению комплексно-сопряженных чисел $a + bi$ и $a - bi$, их разность может быть равна нулю лишь в том случае, когда $b = 0$, т. е. если эти числа вещественны. Свойство (а) доказано *).

Для доказательства свойства (б) рассмотрим два произвольных различных характеристических корня. Тогда $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, и, по лемме, имеем равенство

$$(x^1)' x^2 = 0,$$

которое и означает, что векторы x^1 и x^2 ортогональны. Назовем преобразование T *ортогональным*, если $T' = T^{-1}$.

Теперь можно доказать третий важный результат.

в) *Вещественная симметрическая матрица диагонализируется ортогональным преобразованием.*

Это утверждение следует из свойства б). Приведем матрицу A к диагональному виду (как всегда, предполагается, что все корни матрицы A различны). Получим

$$V^{-1}AV = \Lambda.$$

Здесь V является матрицей, составленной из собственных векторов матрицы A. Рассмотрим произведение $V'V$. Его (i, j)-й элемент $(i \neq j)$ равен $(x^i)' x^j$. Но по свойству (б) $(x^i)' x^j = 0$. Диагональные элементы матрицы $V'V$ равны $(x^i)' x^i = \sum_k (x_k^i)^2$. Собственные векторы определены лишь с точностью до скалярного множителя, поэтому их можно считать нормированными. Это значит, что каждый диагональный элемент матрицы $V'V$ равен единице, а $V'V = I$. Отсюда $V' = V^{-1}$, и свойство (в) доказано.

Обычно диагонализация симметрической матрицы записывается в форме $V'AV = \Lambda$. Здесь используется матрица V', в то время как в общем случае имеем $V^{-1}AV = \Lambda$ **).

Д6.2. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Выражение вида $Q = \sum_i \sum_j a_{ij}x_ix_j$ называется *квадратичной формой*. Если $a_{ij} \neq a_{ji}$, то всегда можно положить

$$\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),$$

*) Таким же образом доказывается, что характеристические корни кососимметрической матрицы имеют действительную часть, равную нулю. Это означает, что в этом случае характеристические корни могут быть либо равными нулю, либо чисто мнимыми числами.

**) Матрица, для которой справедливо равенство $A' = A^{-1}$, называется *ортогональной*. Ее строки или столбцы попарно ортогональны.

так, чтобы коэффициенты при произведениях $x_i x_j$ и $x_j x_i$ были равны.

Таким образом, квадратичную форму можно записать в матрично-векторных обозначениях:

$$Q(x) = x'Ax,$$

где A — *вещественная симметрическая матрица.*

Пусть заданы матрица A и $Q(x)$ — скалярная функция векторного аргумента x. Интерес представляют некоторые свойства, которыми может обладать функция $Q(x)$. В дальнейшем используется следующая терминология.

Если $Q(x) > 0$ (<0) для всех $x \neq 0$, то квадратичная форма $Q(x)$ называется положительно (отрицательно) определенной. Если $Q(x) \geqq 0$ ($\leqq 0$) для всех $x \neq 0$, то квадратичная форма $Q(x)$ называется неотрицательно (неположительно) определенной. Если $Q(x)$ неотрицательно (неположительно) определена, причем для некоторого x $Q(x) > 0$ (<0) и для некоторого $x \neq 0$ $Q(x) = 0$, то говорят, что квадратичная форма положительно (отрицательно) полуопределена.

Хотя эти термины первоначально были введены для квадратичной формы $Q(x)$, они также используются и по отношению к матрице A. Любая вещественная симметрическая матрица может быть матрицей квадратичной формы, и ее можно исследовать на положительную определенность.

Если квадратичная форма $Q(x)$ положительно определена, то форма $-Q(x)$ отрицательно определенная. Поэтому мы будем рассматривать, главным образом, положительную определенность.

Рассмотрим преобразование $x = Ty$ вектора y в другой вектор x, где матрица T невырожденная. Тогда

$$Q(x) = x'Ax = y'T'ATy = Q(y),$$

где матрицей квадратичной формы $Q(y)$ служит матрица $T'AT$.

Понятно, что если рассматриваются все отличные от нуля y, то преобразование $x = Ty$ дает все отличные от нуля x. Это означает, что матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда положительно определена матрица $T'AT$.

Однако в предыдущем параграфе было показано, что для некоторой ортогональной матрицы T:

$$T'AT = \Lambda.$$

Поскольку A положительно определена тогда и только тогда, когда положительно определена матрица Λ, и так как

$$x'\Lambda x = \sum \lambda_i x_i^2,$$

то, очевидно, что A положительно определена, если все ее характеристические корни (которые вещественны, так как матрица A вещественная и симметрическая) положительны. Положительность всех корней необходима также для положительной определенности матрицы A потому, что если бы было $\lambda_k < 0$, то, полагая $x_k \neq 0$ и $x_i = 0$ для $i \neq k$, мы бы получили $x'Ax < 0$ при $x \neq 0$. Таким образом, можно утверждать:

Вещественная симметрическая матрица положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда все ее характеристические корни положительны (отрицательны).

Далее, $\det \Lambda = \det A$, так как $\det T = 1$ [матрица T ортогональна, так что $\det T' = \det T^{-1} = (\det T)^{-1} = \det T = 1$]. Но $\det \Lambda$ равен произведению n характеристических корней матрицы A. Отсюда вытекает другой важный результат:

Пусть матрица A положительно определена, тогда $\det A > 0$. *Если A отрицательно определена, то* $\operatorname{sign}(\det A) = \operatorname{sign}[(-1)^n]$.

Положительное значение определителя является необходимым, но не достаточным условием положительной определенности матрицы. Это видно в случае матрицы четного порядка, когда $\det A > 0$ как при положительной, так и при отрицательной определенности матрицы A.

Запишем форму $x'Ax$, выделив члены, содержащие x_n. Используя свойство симметрии $a_{in} = a_{ni}$, имеем

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2.$$

Положим $x_n = 0$, тогда

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j.$$

Но этой квадратичной форме соответствует матрица, полученная из матрицы A вычеркиванием n-й строки и n-го столбца. Всякая такая подматрица матрицы A, полученная вычеркиванием некоторого множества строк и соответствующего множества столбцов, является квадратной и симметрической, и элементами ее диагонали будут диагональные элементы матрицы A. Такие подматрицы называются *главными подматрицами порядка* k матрицы A. Здесь вычеркнуты $n-k$ строк и $n-k$ столбцов матрицы A. Будем эти подматрицы обозначать через A_k.

В нашем случае, полагая $x_n = 0$, получаем квадратичную форму $x'A_{n-1}x$ (где вектор x имеет $n-1$ компоненту). Поскольку $x'Ax$ положительно определена, то эта форма положительна для всех $x \neq 0$, включая те, у которых $x_n = 0$, а остальные компоненты выбраны произвольно (лишь бы не все они равнялись нулю). Но это и есть условие положительной определенности формы $x'A_{n-1}x$.

Аналогично показываем, что $x'A_{n-2}x$ положительно определена, и т. д. Но с таким же успехом можно было вместо x_n в самом начале выбрать любую другую компоненту x_k и положить ее равной нулю. Проведя аналогичные рассуждения, мы получили бы другую последовательность главных подматриц. Таким образом, можно утверждать:

Каждая главная подматрица положительно (отрицательно) определенной матрицы также положительно (отрицательно) определена.

Определитель главной подматрицы называется *главным минором* матрицы A. Используя полученные раньше результаты, касающиеся связи между положительной (отрицательной) определенностью матрицы и знаком ее определителя, а также только что полученное утверждение, имеем:

Матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны. Матрица отрицательно определена тогда и только тогда, когда знак всех ее главных миноров порядка k определяется соотношением $\operatorname{sign} \det A_k = \operatorname{sign} (-1)^k$.

Можно показать, что эти условия и достаточны. Обычно это условие широко используется в теории максимизации в следующей форме: *Матрица положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда ее главные миноры последовательно повышающегося порядка имеют тот же (чередующийся) знак. Это условие справедливо для всех возможных последовательностей главных миноров.*

Подчеркнем различие между положительно определенной матрицей и положительной матрицей. Все элементы положительных матриц, которые рассматриваются в следующем дополнении, положительны, но не обязательно все характеристические корни этих матриц положительны. Все корни положительно определенной матрицы положительны, но не все ее элементы обязательно положительны. Положительная определенность является свойством только квадратных симметрических матриц, в то время как положительность может быть свойством любой матрицы.

Д6.3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ *)

Раньше мы допускали все возможные значения переменных квадратичной формы. Теперь рассмотрим квадратичные формы, переменные которых удовлетворяют однородным линейным ограничениям. Такие формы важны для анализа условий второго порядка в классической задаче нахождения условного максимума.

Рассмотрим квадратичную форму n переменных

$$Q(x) = x'Ax.$$

Пусть переменные удовлетворяют m линейным уравнениям

$$Bx = 0$$ **).

Сформулируем без доказательства следующую теорему ***).

Т е о р е м а Ф и н с л е р а. *Пусть $x'Ax$ положительна для всех x, для которых $x'Cx = 0$, где матрица C неотрицательно определена. Тогда существует такое положительное число μ, что матрица $(A + \mu C)$ положительно определена.*

Чтобы убедиться в полезности этой теоремы, допустим, что $Bx = b$. Тогда

$$x'B'Bx = b'b = \sum (b_j)^2 \geqq 0$$

---

*) Теория квадратичных форм, переменные которых связаны линейными ограничениями, излагается по-разному в разных руководствах по теории матриц.

Свойства этих форм являются решающими в условии второго порядка для классической задачи оптимизации и, следовательно, являются важными в математической экономике.

Представляется, что приведенный здесь анализ, заимствованный у Беллмана (Б е л л м а н [3], гл. 5), удобен для анализа классической задачи оптимизации. Смотри также сноску к § 4.5.

**) Матрица B является прямоугольной. Ее порядок $m \times n$, где $m < n$.

***) Доказательство теоремы Финслера можно найти у Б е л л м а н а [3], гл. 5.

и равно нулю для x, удовлетворяющих ограничениям $Bx = 0$, или, что то же, $x'B'Bx = 0$. Матрица $B'B$ является в этом случае той матрицей C, которая участвует в формулировке теоремы Финслера.

Таким образом, положительность формы $x'Ax$ для всех x, удовлетворяющих ограничениям $Bx = 0$, эквивалентно положительной определенности формы $x'(A + \mu B'B)x$ для достаточно большого $\mu > 0$.

Рассмотрим матрицу

$$M_1 = \begin{bmatrix} -I & B \\ \mu B' & A \end{bmatrix}.$$

Это матрица порядка $(n + m) \times (n + m)$. В ее левом верхнем углу расположена матрица $-I$ порядка $m \times m$. Если теперь умножить M_1 на матрицу

$$M_2 = \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где нижняя подматрица I порядка $n \times n$, а верхняя $m \times m$, то получим

$$M_3 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mu B' & A + \mu B'B \end{bmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$(\det M_1)(\det M_2) = \det M_3.$$

Матрица M_2 содержит под диагональю одни нули, а на диагонали — единицы. Поэтому $\det M_2 = 1$.

Рассмотрим $\det M_3$. Разложим его по верхней строке матрицы M_3. Так как в этой строке имеется единственный ненулевой элемент, равный (-1), то получаем

$$\det M_3 = (-1)\det \begin{bmatrix} -I_{m-1} & 0 \\ \mu B'_{m-1} & A + \mu B'B \end{bmatrix},$$

где индекс $(m - 1)$ у I и B' означает, что из B' вычеркнут первый столбец, а из I — первые столбец и строка. Если продолжить разложение по оставшимся $(m - 1)$ верхним строкам, то в конце концов получим

$$\det M_3 = (-1)^m \det(A + \mu B'B).$$

Таким образом, имеем

$$\det M_1 = (-1)^m \det(A + \mu B'B).$$

Теперь положительная определенность матрицы $(A+\mu B'B)$ означает, что $\det(A+\mu B'B)>0$, и, следовательно, $\operatorname{sign}(\det M_1)=\operatorname{sign}[(-1)^m]$.

Рассмотрим

$$\det M_1=\det\begin{bmatrix}-I & B\\ \mu B' & A\end{bmatrix}=\mu^m\det\begin{bmatrix}\left(-\frac{1}{\mu}\right)I & B\\ B' & A\end{bmatrix}.$$

Выбирая μ достаточно большим, можно всегда сделать знак последнего определителя таким же, как и знак

$$\det\begin{bmatrix}0 & B\\ B' & A\end{bmatrix}.$$

Таким образом, первым достаточным, но не необходимым условием положительности матрицы A является равенство $\operatorname{sign}(\det\hat{A})=\operatorname{sign}(-1)^m$, где $\hat{A}$ — последняя окаймленная матрица.

Теперь вернемся к первоначальной квадратичной форме. Если положить x_n равным нулю, то сокращенная форма $x'A_{n-1}x$ должна быть положительной для $(n-1)$-мерного вектора x при условии, что $B_{n-1}x=0$. Здесь A_{n-1} получена из A вычеркиванием n-й строки и n-го столбца, а B_{n-1} получена из B вычеркиванием n-го столбца. Аналогичным образом можно показать, что достаточным условием сохранения положительности квадратичной формы при $x_n=0$ является равенство

$$\operatorname{sign}\left(\det\begin{bmatrix}0 & B_{n-1}\\ B'_{n-1} & A_{n-1}\end{bmatrix}\right)=\operatorname{sign}[(-1)^m].$$

Но этот определитель является главным минором матрицы $\hat{A}$ и получен вычеркиванием из нее n-й строки и n-го столбца.

Далее можно положить $x_n=0$ и $x_{n-1}=0$ и показать, что такие же условия справедливы для главного минора матрицы $\hat{A}$, полученного вычеркиванием двух последних строк и столбцов. Можно продолжить этот процесс до тех пор, пока не положим $n-m+1$ переменную равной нулю, после чего условия $Bx=0$ не дают нам свободы в выборе нулевых компонент вектора x.

Теперь докажем достаточное условие отрицательности формы $x'Ax$ для x, удовлетворяющего ограничениям $Bx=0$. Это все равно, что получить достаточные условия для положительности формы $(-x'Ax)$. Потребуем, чтобы главный минор порядка $m+n-r$ матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B' & -A \end{bmatrix}$$

имел тот же знак, что и $(-1)^m$.

Но

$$\det\begin{bmatrix} 0 & B_{n-r} \\ B'_{n-r} & -A_{n-r} \end{bmatrix} = (-1)^{n-r}\det\begin{bmatrix} 0 & B_{n-r} \\ -B'_{n-r} & A_{n-r} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+n-r}\det\begin{bmatrix} 0 & B_{n-r} \\ B'_{n-r} & A_{n-r} \end{bmatrix},$$

так что, если потребуем, чтобы главный минор порядка $m+n-r$ имел тот же знак, что и $(-1)^m$, то соответствующий главный минор матрицы $\hat{A}$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & B_{n-r} \\ B'_{n-r} & -A_{n-r} \end{bmatrix}$$

должен иметь знак, совпадающий с $\operatorname{sign}(-1)^{n-r}$.

Мы можем подытожить наши исследования следующим образом.

Достаточным условием положительности квадратичной формы $x'Ax$ для всех x, удовлетворяющих ограничениям $Bx = 0$, является совпадение знака каждого главного минора окаймленной матрицы

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B' & A \end{bmatrix}$$

со знаком $(-1)^m$, где m — число ограничений, и знаком $\det A$.

Достаточным условием отрицательности квадратичной формы $x'Ax$ при тех же ограничениях является равенство

$$\operatorname{sign}(\det \hat{A}) = \operatorname{sign}(-1)^n$$

и совпадение знака главного минора порядка $(m+n-r)$ со знаком $(-1)^{n-r}$.

Главные миноры, о которых здесь идет речь, получаются вычеркиванием последних $1, 2, \ldots, r, \ldots, n-m+1$ строк и столбцов матрицы $\hat{A}$.

Из приведенных утверждений следует, в частности, что числа последовательности, состоящей из $\det \hat{A}$ и его главных миноров, последовательно убывающего порядка, имеют один и тот же знак для положительной квадратичной формы и чередующиеся знаки для отрицательной.

Тот факт, что условия в форме определителей (детерминантные условия) являются достаточными, но не необходимыми, следует из замечания о том, что это возможно при существовании линейной зависимости в A. Например, если имеем $b_{r1}=0$ для всех r и $a_{11}=0$, то возможна линейная зависимость первого и $(m+1)$-го столбцов матрицы $\hat{A}$. В этом случае $\det \hat{A}=0$, а для положительности квадратичной формы необходимо, чтобы $\det A$ имел знак $(-1)^m$. Этот нетипичный случай обычно исключается из рассмотрения.

Упражнения

1. Вычисляя характеристические корни, определите знакоопределенность квадратичных форм, соответствующих матрицам:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Используя детерминантные условия, установите знакоопределенность квадратичных форм, соответствующих следующим матрицам:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Найдите, используя условия в форме определителей, знак квадратичной формы $x'Ax$ при условии $bx=0$, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}; \quad b=[1 \ -3].$$

Используя ограничение, проверьте результаты заменой одной переменной через другую.

4. Покажите, что если A положительно определена, то A^n также положительно определена для всех положительных целых n. Если A отрицательно определена, то обязательно ли отрицательно определена A^n?

ДОПОЛНЕНИЕ Д7

ПОЛУПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ДОМИНАНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Материал этого дополнения связан с двумя родственными темами, имеющими отношение к различным вопросам экономического анализа. Свойства полуположительных матриц (§ Д7.2 и Д7.3) существенны для гл. 6, а свойства доминантных матриц — для гл. 12. Предполагается, что читатель знаком с содержанием дополнений Д1 — Д3 и Д5. Дополнения Д4 и Д6 не являются существенными для понимания излагаемого ниже материала. Доказательства результатов, сформулированных в § Д7.3 и Д7.4, приведены в § Д7.5 и при первом чтении могут быть опущены.

Д7.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Следуя терминологии § Д2.1, определим *положительную* (строго положительную, если это нужно подчеркнуть особо) матрицу, все элементы которой положительны. Аналогично определим *неотрицательную* матрицу, как матрицу, составленную из неотрицательных элементов.

Введем также понятие *полуположительной* матрицы. Важным свойством полуположительного вектора является то, что скалярное произведение полуположительного и положительного векторов всегда является положительным числом. По аналогии назовем матрицу полуположительной, если произведение этой матрицы на положительный вектор дает положительный вектор. Это приводит к следующему определению.

---

*) Для изучения свойств как полуположительных, так и доминантных матриц можно рекомендовать книгу Мак-Кензи [3].

См. также Гантмахер [2]. (*Прим. перев.*)

Матрица полуположительна, если все ее строки и столбцы являются полуположительными векторами *).

Особый интерес вызывают полуположительные квадратные матрицы. Однако приведенное определение применимо к матрицам любого типа.

Определим теперь другой тип матриц, который мы будем рассматривать в этом дополнении.

Квадратная матрица A называется *доминантной*, если существуют n положительных чисел d_j, таких, что

$$d_j|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |a_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Это означает, что матрица A является доминантной, если можно подобрать такие положительные весовые коэффициенты, что абсолютная величина каждого взвешенного диагонального элемента матрицы превышает сумму взвешенных абсолютных величин недиагональных элементов того же столбца. Существенно, что одни и те же весовые коэффициенты используются для каждого столбца.

Приведенное определение является обобщением более известного определения, по которому матрица является доминантной, если выполняется условие Адамара, т. е. если абсолютная величина каждого диагонального элемента превосходит сумму абсолютных величин недиагональных элементов того же столбца (или строки) **).

Весовые коэффициенты d_j в более общем определении позволяют расширить применение понятия мажорирования для случаев, когда условие Адамара не выполняется.

Если D — диагональная матрица $[d_j]$, а матрица A — доминантная по обобщенному определению, то матрица DA является доминантной в обычном смысле ***).

В вещественных матрицах запись $|a_{ij}|$ означает абсолютное значение элемента a_{ij}. Однако нам понадобится исследовать матрицы с комплексными элементами. В этом случае запись $|a_{ij}|$ будет означать модуль элемента a_{ij}.

При поверхностном рассмотрении может показаться, что между полуположительными и доминантными матри-

*) Это означает, что матрица должна иметь, по крайней мере, один ненулевой элемент в каждой строке и в каждом столбце. Все диагональные элементы полуположительной диагональной матрицы положительны.

**) Мы будем называть такую матрицу *матрицей Адамара* (см. § Д7.5.)

***) Т. е. матрицей Адамара. (*Прим. перев.*)

цами нет связи. Однако при более глубоком анализе видно, что существуют строгие соотношения между свойствами матриц этих двух классов. Поэтому естественно рассматривать их в этом дополнении совместно. Сначала мы обсудим важное по отношению к полуположительным матрицам понятие неразложимости. Затем перечислим без доказательства свойства полуположительных матриц, которые имеют большое значение в экономической теории. Далее перечислим важные свойства доминантных матриц также без доказательств. Наконец, приведем доказательства свойств матриц обоих классов.

Д7.2. НЕРАЗЛОЖИМОСТЬ *)

Свойства полуположительной матрицы в значительной степени зависят от ее *структуры*. Чтобы понять, что здесь подразумевается под термином структура, рассмотрим систему линейных уравнений, характеризующую «систему» в некотором содержательном смысле. Факторы, соответствующие отдельным переменным, могут не принимать участия в отдельных операциях системы. Отвечающие им переменные должны отсутствовать в соответствующих уравнениях. Участие или неучастие некоторых факторов в отдельных операциях системы (соответственно наличие или отсутствие некоторых переменных в отдельных уравнениях) является структурным свойством системы.

Матрица системы уравнений, полученная из «реальной» системы, должна содержать нуль на (i, j)-м месте, если j-я переменная отсутствует в i-м уравнении. Будем рассматривать расположение нулей в матрице как характеристику ее структуры. Однако не все нулевые элементы матрицы определяют ее структуру.

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, приведем еще один существенный признак, по которому целесообразно различать системы. Рассмотрим два типа систем уравнений

$$Ax = b,$$

$$Ax = \lambda x.$$

*) Понятие неразложимости излагается во всех элементарных работах, посвященных анализу модели «затраты — выпуск». См., например, работу Д о р ф м а н а, С а м у э л ь с о н а и С о л о у, а также книгу А л л е н а [2].

Первый тип — это обычная система линейных уравнений. Нумерация переменных в этом случае совершенно не зависит от нумерации уравнений. Любую переменную можно обозначить первой, так же как любое уравнение можно считать первым. Нумерация строк здесь не зависит от нумерации столбцов.

Во второй системе, связанной с характеристическими корнями и собственными векторами, правая часть i-го уравнения равна λx_i. Если мы перенумеруем переменные, то обязаны таким же образом перенумеровать и уравнения. В этом случае нумерация строк определена нумерацией столбцов.

Следующие структурные определения применимы только к матрицам, в которых нумерация строк определена нумерацией столбцов.

Говорят, что квадратная матрица *разложима*, если можно так перенумеровать ее строки и столбцы, чтобы получить матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

В противном случае матрица называется *неразложимой*.

В приведенной записи A_{11} и A_{22} — квадратные матрицы не обязательно одного и того же порядка. Матрицы A_{11} и A_{22} могут быть в свою очередь разложены. Если матрица A_{12} нулевая, а разложение матриц A_{11} и A_{22} с помощью допустимых перенумераций ведет в конце концов к матрице вида

$$\begin{bmatrix} A'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A'_{kk} \end{bmatrix},$$

где матрицы $A'_{11}, \dots, A'_{kk}$ — квадратные неразложимые не обязательно одного и того же порядка, то такую матрицу называют *вполне разложимой*.

Неразложимые матрицы представляют особый интерес для экономической теории. Иногда вместо терминов «разложимый» и «неразложимый» используются термины «приводимый» и «неприводимый».

Чтобы понять, к чему приводит разложимость, рассмотрим систему уравнений $Ax = kx$, где A — разложимая матрица. Предположим, что после соответствующих перенумераций, если они потребуются, мы получили матрицу в форме

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

где A_{11} — матрица порядка $k \times k$, а A_{22} — порядка $(n-k) \times (n-k)$. Если разбить вектор x на векторы x_1, содержащий первые k компонент вектора x, и x_2, содержащий оставшиеся $n-k$ компонент, то можно переписать систему в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

или

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = kx_1,$$
$$A_{22}x_2 = kx_2.$$

Таким образом, существует подсистема $A_{22}x_2 = kx_2$, которая может быть решена независимо от остальной части системы. Вычислив решение x_2 этой подсистемы, можно затем решить другую подсистему. Таким образом, составляющие вектора x_1 зависят от x_2, но обратной зависимости нет. Если A_{11} и A_{22} неразложимы, а матрица A_{12} нулевая, то система вполне разложима. В этом случае переменные x_1 не зависят от переменных x_2, и наоборот. С другой стороны, если A неразложима, то переменные x_1 зависят от x_2, и наоборот.

Таким образом, вполне разложимой матрице отвечают независимые подгруппы переменных. Разложимость влечет в лучшем случае зависимость $x_2 \rightarrow x_1$, а неразложимость означает двухстороннюю зависимость $x_2 \rightleftarrows x_1$.

Положительная матрица всегда неразложима, поэтому понятие разложимости появляется только в связи с полуположительными матрицами.

В этой книге термин «неразложимый» будет также использоваться в более широком смысле. Более общие понятия неразложимости появляются в § Д8.8 следующего дополнения и в § 10.3 и 10.5.

Д7.3. СВОЙСТВА ПОЛУПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ *)

Как уже указывалось, основные свойства положительных и полуположительных матриц, которые полезны в анализе линейных экономических моделей, сформулированы здесь без доказательств. Доказательства приведены в § Д7.5.

Поскольку многие утверждения справедливы для полуположительных неразложимых матриц (а следовательно, и для положительных), то положительные матрицы будут упоминаться лишь в тех случаях, когда они обладают свойствами, не присущими неразложимым полуположительным матрицам. Некоторыми важными свойствами обладают полуположительные разложимые матрицы. За исключением одного специального свойства имеют место слабые варианты свойств, которыми обладают все полуположительные матрицы (разложимые и неразложимые).

Пусть A — полуположительная матрица. Тогда среди ее характеристических корней существует корень λ^* (который называют мажорирующим корнем матрицы) и соответствующий ему собственный вектор x^*, такие, что:

а) *корень λ^* действительный и неотрицательный*;

б) *не существует других характеристических корней, превышающих λ^* по абсолютной величине*;

в) *вектор x^* неотрицателен*;

г) *для всех $\mu > \lambda^*$ матрица $\mu I - A$ невырождена, а $(\mu I - A)^{-1}$ полуположительна.*

Если, кроме того, A неразложима, то утверждения а), в) и г) *можно усилить*:

а.1) *корень λ^* положителен и нет кратных корней*;

в.2) *вектор x^* строго положителен*;

г.2) *матрица $(\mu I - A)^{-1}$ строго положительна.*

Если матрица A строго положительна, то можно усилить утверждение (б):

б.2) *корень λ^* превосходит абсолютную величину любого другого характеристического корня.*

---

*) Свойства таких матриц изучаются в различных источниках, например в книгах Дорфмана, Самуэльсона и Солоу и Карлина [1]. Приведенный здесь перечень свойств включает в себя все важные для экономического анализа свойства. Один результат (условие Хоукинса — Саймона) здесь не приводится, так как его содержание покрывается другими утверждениями. Это условие играет важную роль в анализе модели Леонтьева.

Свойства (а.1), (б.2), (в.2), доказанные только для положительных матриц, содержатся в *теореме Перрона*. Свойства а.1), б), в.2) вместе с некоторыми другими результатами, которые в этой книге не потребуются, доказаны для полуположительных неразложимых матриц и составляют содержание *теоремы Фробениуса*. Полуположительные неразложимые матрицы иногда называют *матрицами Фробениуса*, а λ^* — *корнем Фробениуса* (*или Перрона*).

Полученные из различных источников следующие дополнительные результаты, очевидно, справедливы для полуположительных неразложимых матриц:

д) *кроме* x^* *не существует неотрицательных собственных векторов*;

е) *пусть* $s = \min\limits_i \sum\limits_j a_{ij}$, *а* $S = \max\limits_i \sum\limits_j a_{ij}$. *Тогда* $s < \lambda^* < S$, *если* $s < S$. *Если* $s = S$, *то* $s = \lambda^* = S$. *Подобные соотношения справедливы и для сумм элементов матрицы* A *по столбцам*.

ж) *Вектор* x^* *является неотрицательным решением одной из двух систем неравенств*: $Ax \leqq \lambda^* x$, $Ax \geqq \lambda^* x$. *Число* $k = \lambda^*$ *и вектор* $x = x^*$ *являются неотрицательными решениями одной из двух систем неравенств*: $Ax \leqq kx$, $Ax \geqq kx$, *где, по крайней мере, одна из систем совместна*.

з) *Если матрицы* A *и* B *полуположительны, неразложимы и одинакового порядка, то неравенство* $A \gg B$ *влечет неравенство* $\lambda_A^* > \lambda_B^*$;

и) *для произвольной пары индексов* (i, j) *существует такой показатель степени* $r \leqslant n$, *что* (i, j)*-й элемент матрицы* A^r *положителен*.

Наконец, если A вполне разложима, то:

к) *вектор* x^* *строго положителен тогда и только тогда, когда мажорирующий корень каждой диагональной подматрицы совпадает с мажорирующим корнем всей матрицы*.

Д7.4. СВОЙСТВА ДОМИНАНТНЫХ МАТРИЦ

В § Д7.1 мы уже определили, что матрица A называется доминантной, если существуют такие положительные числа d_i, что

$$d_j |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |a_{ij}| \quad \text{для всех } j.$$

Это означает, что взвешенная абсолютная величина диагонального элемента больше суммы взвешенных абсолютных величин остальных элементов того же столбца. Кроме этого определения, которое называют *столбцовой мажорантой*, рассматривают соотношение

$$d_i |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}| \quad \text{для всех } i,$$

которое определяет *строчную мажоранту*. Очевидно, если A имеет столбцовую мажоранту, то A^T — строчную.

Поскольку важные свойства доминантных матриц связаны с характеристическими корнями, которые у матриц A и A^T совпадают, то не важно, покажем ли мы существование столбцовой или строчной мажоранты. Столбцовая форма более приемлема в экономической теории. У нас будет возможность показать существование мажорирующей диагонали, используя цены (типичные вектор-строки) как весовые коэффициенты, соответствующие числам d_i.

Поскольку $d_i > 0$ для всех i, то $d_i \mid a_{ij} \mid = \mid d_i a_{ij} \mid$, так что, если $B = DA$, где D — диагональная матрица с элементами d_i на диагонали, то в нашем случае мажорирование диагонали A влечет за собой неравенство

$$|b_{jj}| > \sum_{i \neq j} |b_{ij}| \quad \text{для всех } j.$$

Это определение мажоранты без весов впервые использовалось Адамаром. Поэтому матрицу, подобную матрице B, будем называть *матрицей Адамара* (иногда применение этого термина ограничивают случаем, в котором $b_{jj} > 0$ для всех j). Таким образом, если A — доминантная матрица, то DA является матрицей Адамара при диагональной матрице D с положительными диагональными элементами.

Из следующего основного свойства следуют все другие свойства доминантных матриц.

а) Теорема Адамара. *Если матрица A доминантная, то она невырождена.*

Особенно полезно следующее свойство доминантной матрицы.

б) *Пусть A — доминантная матрица. Тогда все ее характеристические корни имеют отрицательную действительную часть.*

Сформулируем еще одно полезное свойство.

в) *Пусть матрица A имеет столбцовую мажоранту. Тогда она не имеет характеристического корня, абсолют-*

ная величина которого превышала бы наибольшую сумму абсолютных величин элементов матрицы по столбцам ($\max_j \sum_i |a_{ij}|$). *Если A имеет строчную мажоранту, то она не имеет характеристического корня, абсолютная величина которого превышала бы наибольшую сумму абсолютных величин элементов матрицы по строкам.*

Приведенные выше свойства доминантных матриц полезны в экономических приложениях. Следующие утверждения, некоторые из которых тривиальны, используются главным образом для того, чтобы установить, имеет ли матрица мажорирующую диагональ (т. е. является ли матрица доминантной).

г) *Матрица A имеет мажорирующую диагональ только в том случае, если неравенство Адамара* $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ *справедливо хотя бы для одного j.*

д) *Пусть матрица A имеет мажорирующую диагональ. Тогда каждая главная подматрица матрицы A также имеет мажорирующую диагональ.*

е) *Матрица A имеет мажорирующую диагональ, если существуют такие положительные числа d_i, что*

$$d_j |a_{jj}| \geqq \sum_{i \neq j} d_i |a_{ij}|,$$

где, по крайней мере, для одного j выполняется строгое неравенство.

Доказательства сформулированных выше свойств вместе с доказательствами свойств полуположительных матриц приведены в следующем параграфе.

Д7.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА *)

Начнем с доминантных матриц. Докажем в первую очередь теорему Адамара.

Пусть B — матрица Адамара. Тогда она невырожденная.

Предположим противное, т. е. пусть B — вырожденная матрица. Тогда система $yB = 0$ имеет отличное от нуля

*) Для изучения доминантных матриц и обобщения их свойств на полуположительные матрицы см. Мак-Кензи [3].

Карлин [1] приводит обширное обсуждение полуположительных матриц. Беллман [3] рассматривает положительные, а не полуположительные матрицы.

решение $y \neq 0$. Поскольку $|y_i||a_{ij}| \geqq y_i a_{ij}$, то уравнение $\sum_i y_i b_{ij} = 0$ влечет неравенство

$$\sum_i |y_i||b_{ij}| \geqq 0,$$

так что

$$|y_j||b_{jj}| \leqq \sum_{i \neq j} |y_i||b_{ij}| \quad \text{для всех } j.$$

Пусть индекс k таков, что $|y_k| = \max_i |y_i|$. Тогда $|y_i| \leqq |y_k|$ для всех i, так что

$$|y_k||b_{kk}| \leqq \sum_{i \neq k} |y_k||b_{ik}|.$$

Отсюда

$$|b_{kk}| \leqq \sum_{i \neq k} |b_{ik}| \quad (\text{так как } |y_k| \neq 0),$$

что противоречит свойству Адамара. Таким образом, система $yB = 0$ не имеет нетривиальных решений и, следовательно, матрица B невырожденная.

Если A — доминантная матрица, то $B = DA$ является матрицей Адамара, если диагональные элементы диагональной матрицы D положительны. Но $\det B = (\det D)(\det A)$. Так как $\det B \neq 0$ и $\det D \neq 0$, то и $\det A \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, что доказывает свойство (а) § Д7.4.

Рассмотрим теперь матрицу $A - \lambda I$. По определению, λ является характеристическим корнем матрицы A тогда и только тогда, когда матрица $A - \lambda I$ вырождена. Таким образом, чтобы исследовать корни матрицы A, можно использовать теорему Адамара.

Для доказательства свойства (в) § Д7.4 предположим противное, т. е. что $|\lambda| > \max_j \sum_i |a_{ij}|$. Тогда, очевидно,

---

Наиболее полное изложение материала о полуположительных матрицах содержится в книгах Гантмахера [1 и 2]. Из экономической литературы см. Дебре и Герштейн, а также статьи Вонга и Вудбари в книге Моргенштерна.

Приведенные здесь доказательства, которые охватывают все основные результаты, сформулированные в § Д.7.3 для полуположительных матриц, но упускают второстепенные, являются алгебраическими и придерживаются схемы Гантмахера. Для доказательства некоторых результатов можно использовать теорему о неподвижной точке.

$|\lambda| > |a_{jj}|$ для всех j и

$$\begin{aligned}|a_{jj}-\lambda| &\geqq |\lambda|-|a_{jj}| \quad \text{для всех } j\\ &> \sum_i |a_{ij}|-|a_{jj}|\\ &> \sum_{i\neq j} |a_{ij}|,\end{aligned}$$

так что $A - \lambda I$ является матрицей Адамара, т. е. невырожденной, а λ не может быть характеристическим корнем матрицы A, что и доказывает свойство (в).

Предположим теперь, что матрица A имеет отрицательную мажорирующую диагональ. Тогда DA является матрицей Адамара также с отрицательной диагональю. Далее, корни матрицы DA являются положительными множителями корней матрицы A. Теперь рассмотрим матрицу Адамара $B = DA$ и предположим, что она имеет характеристический корень λ, у которого $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}|b_{jj}-\lambda| &= |\lambda - b_{jj}|\\ &\geqq |\mathrm{Re}(\lambda - b_{jj})|\\ &\geqq \mathrm{Re}(\lambda)+|b_{jj}| \quad (\text{так как } b_{jj}<0)\\ &\geqq |b_{jj}|.\end{aligned}$$

Но B — матрица Адамара, так что $B - \lambda I$ также матрица Адамара и невырожденная. Таким образом, λ не может быть корнем матрицы B, если $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0$, и, значит, корни матрицы B должны иметь отрицательную действительную часть. Это завершает доказательство свойства (б) § Д7.4.

Доказательства свойств (г), (д) и (е) того же параграфа тривиальны. Главная подматрица матрицы A сохраняет соответствующие диагональные элементы, но теряет недиагональные. Отсюда следует (д). Полагая в определении мажорирующей диагонали $d = \min d_i$, получаем (г).

Результат (е) можно получить за счет небольшой вариации d_i, где индекс i соответствует строгому неравенству.

Вернемся теперь к полуположительным матрицам. Докажем сначала следующую лемму.

Основная лемма о полуположительных неразложимых матрицах. *Пусть $Z(x)$ означает число нулевых компонент вектора x. Тогда, если A — полуположительная неразло-*

жимая матрица, а x — полуположительный вектор, то $Z[(I+A)x] < Z(x)$.

Положим $y = (I+A)x$. Так как $I + A \gg 0$, то ясно, что $Z(y) \leqq Z(x)$. Нам нужно исключить случай равенства. Предположим, что равенство выполняется. Поскольку должно быть справедливо неравенство $y \geqq x$ (так как $I + A \geqq I$), то нулевые компоненты вектора y должны занимать те же самые позиции, что и нулевые компоненты вектора x. Допустим, что последние r компонент вектора x равны нулю, так что векторы y и x можно представить в виде

$$y = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\hat{x} \gg 0$, $\hat{y} \gg 0$. Разобьем матрицу $I + A$ соответственно разбиению векторов x и y. Тогда имеем

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & I + A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После умножения получаем

$$\hat{y} = (I + A_{11})\hat{x},$$
$$0 = A_{21}\hat{x}.$$

Поскольку $\hat{x} \gg 0$, то $A_{21} = 0$. Но это противоречит предположению о неразложимости, так что равенства $Z(y) = Z(x)$ быть не может, и лемма доказана.

Теперь можно доказать следующее утверждение:

Пусть A — полуположительная неразложимая матрица порядка n. Тогда $(I+A)^{n-1} \gg 0$.

Возьмем произвольный полуположительный вектор x и многократно применим основную лемму. Ясно, что мы получим все компоненты вектора $(I + A)^{n-1}x$ ненулевыми. Поскольку x произвольный, то $(I + A)^{n-1} \gg 0$.

Разложим биномиально $(I + A)^{n-1}$. Очевидно, что положительный (i, j)-й элемент должен быть, по крайней мере, в одном из членов разложения для каждой пары (i, j). Отсюда следует утверждение (и) § Д7.3.

Определим теперь следующее число, связанное с полуположительной неразложимой матрицей A:

$$r(v^*) = \max_{v \in V} \min_{i} \frac{(Av)_i}{v_i},$$

где $V=\{v \mid v \geqq 0,\ \sum v_i = 1\}$, а $(Av)_i$ означает i-ю компоненту вектора Av.

Выведем сначала некоторые важные свойства числа $r(v^*)$, затем покажем, что $r(v^*)$ равно корню λ^*, который играет важную роль в утверждениях, сформулированных в § Д7.3.

Поскольку $A \geqq 0$ и $v \geqq 0$, то $r(v^*) \geqq 0$. Возьмем вектор $u \in V$, все компоненты которого равны $1/n$, и покажем, что $r(v^*) \neq 0$.

Определим

$$r(u) = \min_i \frac{(Au)_i}{u_i} = \min_i \sum_j a_{ij} > 0,$$

где последнее неравенство следует из полуположительности матрицы A.

Очевидно, что $r(v^*) \geqq r(u)$, так что $r(v^*) > 0$ *). По определению, $r(v^*) = \min\limits_i (Av^*)_i/v_i^*$. Покажем теперь, что $r(v^*)$ есть наибольшее число, удовлетворяющее неравенству

$$Av^* \geqq rv^*.$$

Для k-й компоненты неравенства имеем

$$(Av^*)_k \geqq rv_k^*,$$

$$\frac{(Av^*)_k}{v_k^*} \geqq r.$$

Если $r = r(v^*)$, то для некоторого k справедливо равенство, так что нет числа, превосходящего $r(v^*)$ и удовлетворяющего равенству.

Приведенное выше свойство числа $r(v^*)$ влечет за собой неравенство

$$[Av^* - r(v^*)\,v^*] \geqq 0.$$

Предположим, что равенство не выполняется, тогда вектор $[Av^* - r(v^*)\,v^*]$ полуположителен. Умножая его на строго положительную матрицу $(I+A)^{n-1}$, получаем

$$(I+A)^{n-1}[Av^* - r(v^*)\,v^*] \gg 0$$

*) Заметим, что в процессе доказательства мы получили неравенство $r(v^*) \geqq \min\limits_i \sum\limits_j a_{ij}$. Это неравенство будет использовано ниже.

или

$$Ay - r(v^*)\,y \gg 0,$$

где $y = (I + A)^{n-1} v^*$ [разлагая $(I + A)^{n-1} A$, в ряд, можно убедиться, что $(I + A)^{n-1} A = A\,(I + A)^{n-1}$].

Но неравенство $r(v^*)\,y \ll Ay$ противоречит свойству максимальности $r(v^*)$, поэтому в соотношении $Av^* \geqq r(v^*)\,v^*$ должно иметь место равенство. Таким образом, $r(v^*)$ — характеристический корень матрицы A, а v^* — ее собственный вектор.

Поскольку $r(v^*)$ является характеристическим корнем матрицы A, то $[1 + r(v^*)]^{n-1}$ является корнем матрицы $(I + A)^{n-1}$, а v^* — собственным вектором обеих матриц. Из этих соотношений и строгой положительности матрицы $(I + A)^{n-1}$ следует, что

$$[1 + r(v^*)]^{n-1} v^* = (I + A)^{n-1} v^* \gg 0.$$

Так как $r(v^*) > 0$, то последнее соотношение означает, что $v^* \gg 0$.

Рассмотрим теперь любой другой характеристический корень λ матрицы A и соответствующий ему собственный вектор v. Имеем

$$\lambda v = Av.$$

Отсюда получаем

$$|\lambda|\,v^+ \leqq Av^+,$$

где v^+ — вектор, составленный из абсолютных величин компонент вектора v. Последнее неравенство получается из соотношения $|a|\,|b| \leqq |ab|$. (Левая часть неравенства записана в форме $|a|\,|b|$, а правая — в форме $|ab|$, поскольку матрица A неотрицательная и действительная.)

Мы уже показали, что $r(v^*)$ является наибольшим числом, удовлетворяющим неравенству такого вида. Отсюда следует, что

$$|\lambda| \leqq r(v^*),$$

где λ — произвольный характеристический корень матрицы A.

Таким образом, можно считать $r(v^*)$ мажорирующим корнем матрицы A. Это и есть корень λ^* из § Д7.3.

Итак, мы показали, что λ^* является мажорирующим корнем, что он положителен и что соответствующий ему собственный вектор строго положителен. Все это доказано в предположении неразложимости матрицы A. Это результаты а), б) и в) § Д7.3. Еще не показано, что λ^* не может быть кратным корнем. Мы, однако, опустим это доказательство, поскольку в дополнении Д5 кратные корни не рассматривались.

Покажем теперь, что нет другого характеристического корня, собственный вектор которого был бы неотрицательным. Пусть собственный вектор v, соответствующий некоторому корню λ, неотрицателен. Тогда имеем два уравнения:

$$Av^* = \lambda^* v^*, \quad Av = \lambda v.$$

Транспонируя второе из них и умножая его на v^*, получаем

$$v^T A^T v^* = \lambda v^T v^*.$$

Умножим первое уравнение на v^T. Имеем

$$v^T A v^* = \lambda^* v^T v^*.$$

Так как квадратичные формы $v^T A v^*$ и $v^T A^T v^*$ равны между собой, то имеет место равенство

$$(\lambda^* - \lambda)\, v^T v^* = 0.$$

Поскольку $\lambda^* \neq \lambda$, то $v^T v^* = 0$. Но так как $v^* \gg 0$, то для неотрицательного вектора v это равенство невозможно, что и доказывает свойство (д) из § Д7.3.

Рассмотрим матрицу $(\mu I - A)^{-1} = \mu^{-1} (I - \mu^{-1} A)^{-1}$, где $\mu > \lambda^*$. Очевидно, мажорирующий корень матрицы $\mu^{-1} A$ равен $\lambda^*/\mu < 1$, так что матрицу $(I - \mu^{-1} A)^{-1}$ можно разложить в сходящийся ряд

$$(I - \mu^{-1} A)^{-1} = I + \mu^{-1} A + \mu^{-2} A^2 + \ldots .$$

Но мы уже показали, что для любых i и j и для некоторого $r < n$ элемент $a_{ij}^{(r)}$ матрицы A^r положителен. Так как $\mu > 0$, то каждый элемент матрицы $(I - \mu^{-1} A)^{-1}$ положителен, так что $(\mu I - A)^{-1} \gg 0$ для всех $\mu > \lambda^*$. Это и есть результат (г) § Д7.3.

В процессе анализа уже показано, что

$$\lambda^* \geqq \min_i \sum_j a_{ij}.$$

Теперь покажем, что число k, такое, что

$$|a_{jj}-k| \geqq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

где для некоторого j выполняется строгое неравенство, не может быть характеристическим корнем матрицы A. Таким образом, k не может быть мажорирующим корнем для полуположительной матрицы A, если

$$k - a_{jj} \geqq \sum_{i \neq j} a_{ij},$$

где, по крайней мере, одно неравенство строгое, или

$$k \geqq \sum_{i} a_{ij},$$

где, по крайней мере, одно неравенство строгое.

Таким образом, имеем

$$\lambda^* < \max_{i} \sum_{j} a_{ij},$$

если не все суммы равны между собой, и эквивалентное соотношение для сумм по строкам. Мы получили свойство (е) § Д7.3.

Другие свойства (ж) и (з) являются простыми следствиями уже доказанных утверждений или лемм.

Упражнения

1. Какая из двух приведенных ниже матриц неразложима?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением покажите, что для неразложимой матрицы $(I+A)^2 \gg 0$, а для другой это неверно.

2. Вычислите характеристические корни и собственные векторы следующих матриц и покажите, что они соответствуют результатам § Д7.3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

3. В следующей матрице выберите такое значение b, чтобы получить мажорирующую отрицательную диагональ, а затем непосредственным вычислением покажите, что корни этой матрицы имеют отрицательную действительную часть:

$$\begin{bmatrix} b & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдите такую полуположительную диагональную матрицу D, чтобы матрица DA была матрицей Адамара.

ДОПОЛНЕНИЕ Д8

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Материал, содержащийся в § Д8.1 — Д8.6, существен для всего нелинейного анализа. Для усвоения материала требуется общее знакомство с содержанием дополнений Д1 — Д6.

Д8.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Предполагается, что читатель знаком с обычными свойствами функции одной переменной. Здесь мы будем иметь дело со свойствами функций нескольких переменных. Так как исследование функций нескольких переменных проводится обычно теми же методами, что и функций одной переменной, то большинство результатов будет дано здесь без доказательства.

Мы будем иметь дело с функциями общего вида $f(x)$, где x чаще всего будет вектором. В этой книге удобнее рассматривать x n-мерным вектором, чем f как функцию n различных переменных, хотя два этих подхода эквивалентны. Функцию $f(x)$ можно рассматривать, как правило, для отображения $R^n \to R$. Подчеркнем, что $f(x)$ можно рассматривать как скалярную функцию векторного аргумента.

Если заданы m таких функций $f^i(x)$, каждая из которых является функцией одного и того же аргумента x, то часто бывает удобно рассматривать числа $y_i = f^i(x)$ как компоненты вектора y и записывать одно соотношение

$$y = F(x),$$

---

*) Материал § Д8.1—Д8.4 является стандартным и широко представлен в различных книгах, не обязательно в такой же форме, как здесь. Среди наиболее полезных математических книг назовем работы Куранта и Бука. В аналогичной форме этот же материал изложен у Аллена [1].

См. также книгу Фихтенгольца. (*Прим. перев.*)

Материал § Д8.5—Д8.8 более специального вида. Рекомендации по этому материалу даны на соответствующих местах в тексте.

которое должно интерпретироваться как более короткая запись соотношений

$$y_i = f^i(x), \quad i = 1, \ldots, m.$$

В этом же смысле матричное уравнение $y = Ax$ представляет собой m линейных функциональных соотношений $y_i = A_i x$.

Будем говорить об $F(x)$ как о *вектор-значной функции* или *вектор-функции*, а функцию $f^i(x)$ будем называть *i-й компонентой* $F(x)$.

Пусть y — m-мерный вектор, а x — n-мерный. Тогда $F(x)$ задает точечное отображение $R^n \to R^m$. При $n = 1$ $F(x)$ является вектор-функцией скалярного аргумента. С этим типом функций мы будем иметь дело при изучении дифференциалов и дифференциальных уравнений (дополнение Д.10).

В этом дополнении нас в основном будут интересовать функции векторного аргумента. Они могут быть как скалярными, так и вектор-функциями.

Примеры

а) Функция $y = ax_1^2 - be^{x_2}$ является скалярной функцией векторного аргумента (x_1, x_2).

б) Функции $y_1 = ax^2$, $y_2 = bx^3$ являются функциями от x или, если угодно, компонентами вектор-функции скалярного аргумента.

в) Функции $y_1 = a_1x_1 - b_1x_2^2$ и $y_2 = a_2x_1^3 - b_2x_2 + cx_3^2$ представляют вектор-функцию от векторного аргумента и задают отображение $R^3 \to R^2$.

Скалярная функция $f(x)$ векторного аргумента x *непрерывна* в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\| x - x_0 \| < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$. Норма $\| x - x_0 \|$ обычно берется евклидовой, но возможны и другие нормы.

Функция $f(x)$ непрерывна в области или на множестве, если она непрерывна в каждой точке x_0 этого множества. Функция *равномерно непрерывна*, если число δ в определении непрерывности можно сделать независимым от x_0.

Вектор-функцию $F(x)$ будем называть непрерывной в том случае, если непрерывны все ее компоненты.

Если $f(x)$ непрерывна, то часто говорят, что «$f \in C$» или, «f — функция из класса C». Мы часто будем говорить о непрерывности, подразумевая при этом равномерную непрерывность.

Д8.2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

При анализе функций одной переменной производная функции $f(x)$ определяется как предел

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

если он существует. Это определение нельзя непосредственно перенести на случай функции векторного аргумента, так как h в этом случае вектор и деление на h не определено.

Однако можно рассмотреть $f(x)$ как функцию только одной компоненты вектора x, скажем x_j, считая значения других компонент фиксированными. Тогда определим

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots)}{h}$$

(если он существует) как *частную производную* $f(x)$ *относительно переменной* x_j. Ее вычисляют, предполагая каждую компоненту вектора x, отличную от x_j, фиксированной и дифференцируя по x_j. Для обозначения частной производной используются различные символы. Мы будем пользоваться следующими:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad D_j f(x), \quad f_j(x).$$

Там, где не возникает недоразумений, используются более упрощенные обозначения. Часто в обозначении частной производной опускают аргумент и пишут f_j. Чтобы избежать путаницы в обозначениях, будем всегда обозначать элементы множества функций индексом сверху, т. е. $f^i(x)$.

Функция n-мерного аргумента имеет η частных производных в соответствии с числом компонент вектора x. Эти n частных производных сами могут рассматриваться как компоненты вектора. Такой вектор называется *градиентом* функции f и записывается как

$$\operatorname{grad} f \quad \text{или} \quad \nabla f.$$

Обычно вектор x записывается как вектор-столбец, а ∇f — как вектор строка. Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка f_j, то говорят, что она принадлежит классу C^1.

Далее, любая частная производная f_j является функцией вектора x. Если она удовлетворяет условию непрерывности и существует соответствующий предел, то можно продифференцировать f_j относительно переменной x_j или любой другой компоненты вектора x. Таким образом, получим *частную производную второго порядка*:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\,\partial x_j};$$

$$D_i\,[D_j f(x)]=D_{ij} f(x)=f_{ij}(x)\,^{*)}.$$

Существуют n^2 частных производных второго порядка. Поскольку каждая из них имеет два индекса, то их можно рассматривать как элементы матрицы:

$$H(x)=[f_{ij}(x)].$$

Матрица $H(x)$ называется *матрицей Гессе* и может быть вычислена в каждой точке x.

Пример. Пусть $f(x)=ax_1^3+bx_1x_2+cx_2^2$. Тогда

$$\nabla f=[3ax_1^2+bx_2,\quad bx_1+2cx_2],$$

$$H=\begin{bmatrix}6ax_1 & b\\ b & 2c\end{bmatrix}.$$

Если $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые частные производные, то говорят, что она принадлежит классу C^2. Можно предполагать, что в экономике все непрерывные функции, если они не определены иначе, обладают этими степенями гладкости.

Так как частная производная второго порядка также является функцией вектора x, то можно определить производные третьего и более высокого порядка, например $D_i\,[D_{jk} f(x)] = D_{ijk}\, f(x)$.

Сформулируем без доказательства следующую хорошо известную основную теорему о частных производных.

Пусть $f(x)\in C^2$. *Тогда* $f_{ij}=f_{ji}$ **).

---

*) При вычислении f_{ij} мы считаем x_i фиксированным для того, чтобы получить f_j, а затем считаем фиксированным x_j при вычислении $D_i\,(f_j)$.

**) Аналогичные результаты имеют место и для производных более высокого порядка.

Отсюда следует, что *матрица Гессе симметрическая.*

Кроме частной производной, можно также определить другой тип производной, который является аналогом производной функции одной переменной.

Пусть v — произвольный нормированный вектор ($v^T v = 1$). Определим

$$D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h},$$

где h — скаляр, как *производную функции* $f(x)$ *по направлению* v, предлолагая, что предел существует.

В то время как существуют n частных производных, производная по направлению, определенная вектором v, единственна. С другой стороны, производные по направлению определены для каждого нормированного вектора v *).

Производная по направлению и частная производная связаны следующим соотношением:

Пусть $f(x) \in C^1$. *Тогда* $D_v f(x) = \nabla f \cdot v \ (= \sum_j f_j v_j)$.

Последнее утверждение означает, что частная производная является производной по направлению единичного вектора e^i.

В качестве иллюстрации анализа функций нескольких переменных приведем в общих чертах доказательство этого утверждения.

Рассмотрим простой случай, когда $n = 2$, т. е. имеем $f(x_1, x_2)$. Определим функцию

$$g(h) = f(x + hv) = f(x_1 + hv_1,\ x_2 + hv_2). \quad (Д8.2.1)$$

Функция $g(h)$ является функцией одного переменного и непрерывна, если непрерывна $f(x)$. Используем обычную теорему о среднем значении:

$$g(h) - g(0) = hg'(\theta h), \quad 0 \leqq \theta \leqq 1. \quad (Д8.2.2)$$

Из определения $g(h)$ имеем

$$g(h) - g(0) = f(x_1 + hv_1,\ x_2 + hv_2) - f(x_1,\ x_2) =$$
$$= f(x_1 + hv_1,\ x_2 + hv_2) - f(x_1,\ x_2 + hv_2) +$$
$$+ f(x_1,\ x_2 + hv_2) - f(x_1,\ x_2).$$

*) Если производная по направлению определена для всех v, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема. Это более слабое свойство, чем принадлежность функции классу C^1, но оно не представляет интереса для большинства экономических приложений.

Рассмотрим теперь первые два члена в правой части равенств как функции одной переменной x_1, а два последних члена — как функции переменной x_2 и применим теорему о среднем значении. Имеем

$$g(h) - g(0) = hv_1 D_1 f(x_1 + \mu_1 h v_1,\ x_2 + hv_2) + \\ + hv_2 D_2 f(x_1,\ x_2 + \mu_2 h v_2), \quad 0 \leqq \mu_1,\ \mu_2 \leqq 1.$$

Подставляя последнее соотношение в (Д8.2.2) и сокращая на h ($\neq 0$), получим

$$g'(\theta h) = v_1 D_1 f(x_1 + \mu_1 h v_1,\ x_2 + hv_2) + \\ + v_2 D_2 f(x_1,\ x_2 + \mu_2 h v_2).$$

Если теперь устремить h к нулю, то в левой части равенства получим $g'(0)$, а в правой — $v_1 D_1 f(x_1, x_2) + v_2 D_2 f(x_1, x_2)$. Предполагая, что пределы существуют, получим

$$g'(0) = v_1 f_1 + v_2 f_2. \tag{Д8.2.3}$$

Из определения $g(h)$ и производных, очевидно, следует, что $g'(0) = D_v f(x)$. Таким образом, для двумерного случая результат доказан. Общее доказательство является простым обобщением рассмотренного случая.

Рассмотрим производную по направлению в точке x. Если x фиксирован, то $D_v f(x)$ можно рассматривать как функцию вектора v. Определим функцию

$$\varphi(h, v) = hD_v f(x)$$

как дифференциал $f(x)$ в точке x.

Согласно предыдущему утверждению имеем

$$\varphi(h, v) = h\nabla f \cdot v = \sum f_j (hv_j).$$

Из теоремы о среднем значении следует, что

$$f(x + hv) - f(x) = hD_v f(x + \theta hv), \quad 0 \leqq \theta \leqq 1,$$

так что *дифференциал можно рассматривать как приращение $f(x)$ при малом изменении h в направлении v* *).

Евклидова норма вектора hv равна h, и поэтому его можно считать «малым» вектором. Обычно вектор hv записывают в форме dx, компонентами которого являются числа $dx_j = hv_j$. Точно так же в приведенном выше соотношении $\varphi(dx)$ записывают как df. Таким образом, имеем

---

*) Порядок разности $D_v f(x + \theta hv) - D_v f(x)$ равен h^2.

дифференциал в его общей форме

$$df = \nabla f \cdot dx = \sum f_j\, dx_j.$$

Важность дифференциала заключается в том, что он является линейной функцией dx и удовлетворяет следующим свойствам:

1) df является аппроксимацией $f(x + dx) - f(x)$;

2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{df}{h} = D_v f$, где v — нормированный вектор, компоненты которого пропорциональны компонентам вектора dx.

Иногда обращаются к направлению dx, подразумевая при этом направляющий вектор v, и вместо $h \to 0$ используют обозначение $|dx| \to 0$.

Д8.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ КАК ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Обозначим через D производную относительно единственной переменной. Тогда

$$D(cy) = cDy,$$
$$D(y + z) = Dy + Dz,$$

т. е. производная является линейным оператором, а отображение $y \to Dy$ — линейным отображением. Поскольку частные производные обладают свойствами обычной производной, то для них также справедливо свойство линейности. Это свойство справедливо также для производных по направлению, так как они являются линейными комбинациями частных производных. Дифференциал определен как линейная функция, поэтому и дифференциалы и производные связаны с линейными отображениями.

Из этого общего свойства можно получить различные хорошо известные результаты.

а) Сложные функции. Рассмотрим функцию $f(x)$, где x — вектор значений функции от z, определенной равенствам $x_j = \varphi^j(z)$. Размерность вектора x равна n, вектор z — m-мерный. Дифференциалы f и φ^j равны

$$df = \sum_j f_j\, dx_j,$$

$$dx_j = \sum_r \varphi^j_r\, dz_r, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку соотношения линейны, можно переписать верхний дифференциал, рассматривая его как функцию от dz,

$$df = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} f_j \varphi_r^j \, dz_r.$$

Если обозначить матрицу $[\varphi_r^j]$ через M, то это соотношение можно записать в матрично-векторной форме

$$df = \nabla f \cdot M \cdot dz.$$

Выберем вектор $dz = he^r$, где e^r — r-й единичный вектор в R^m ($e_r^r = 1$; $e_s^r = 0$, $s \neq r$). Тогда имеем

$$\frac{df}{h} = \sum_j f_j \varphi_r^j.$$

Устремляя h к нулю, получим хорошо известное правило вычисления частной производной сложной функции

$$\frac{\partial f}{\partial z_r} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial z_r}.$$

Если z — скаляр, получим правило

$$\frac{df}{dz} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dz}.$$

б) Градиенты и линии (или поверхности) уровня. Множество значений x, для которых $f(x) = c$, называется *линией* или *поверхностью уровня* функции $f(x)$. Так как df является приближением для разности $f(x + dx) - f(x)$, то направление dx, для которого $df = 0$, представляет собой направление касательной к поверхности уровня. Если $df = 0$, то имеем

$$df = \nabla f \cdot dx = 0,$$

так что *вектор градиента ортогонален каждому направлению, касательному к поверхности уровня*. В геометрическом смысле вектор градиента нормален касательной гиперплоскости в точке x.

Говорят, что скалярная функция $F(x)$ векторного аргумента x является *положительным монотонным преобразо-*

ванием некоторой другой функции $f(x)$ того же аргумента, если $F(x)$ может быть представлена равенством

$$F(x) = \varphi[f(x)],$$

где φ — скалярная функция скалярного аргумента $f(x)$, такая, что $\varphi' = d\varphi/df(x) > 0$.

Отсюда $F_i(x) = \varphi' f_i(x)$ и, следовательно, $\nabla F = \varphi' \nabla f$. Таким образом, $\nabla F dx = 0$ тогда и только тогда, когда $\nabla f \cdot dx = 0$, так что любая поверхность уровня функции $f(x)$ является также поверхностью уровня для $F(x)$ и наоборот, хотя обозначения поверхностей могут быть различными.

в) Отображение $R^n \to R^n$. Рассмотрим вектор-функцию $y = F(x)$, где оба вектора y и x из R^n. Дифференциал каждой компоненты $F(x)$ равен

$$dy_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Матрица $M = [\partial y_i/\partial x_j]$ (строки которой являются градиентами ∇F^i компонент функции F) называется *матрицей Якоби* отображения или иногда *дифференциалом отображения* (записывается dF). Определитель $J = \det M$ называется *якобианом* отображения.

Таким образом, можно записать *вектор-дифференциал*

$$dy = M dx.$$

Если $J \neq 0$, то последнее уравнение можно разрешить относительно dx:

$$dx = M^{-1} dy.$$

При этих условиях отображение $dy \to dx$, очевидно, единственно. Это означает, что каждая точка из окрестности y переводится в единственную точку в окрестности x. Интуитивно ясно, хотя можно доказать и строго, что это означает существование единственного обратного отображения $y \to x$ в окрестности всех тех точек, для которых $J \neq 0$.

Таким образом, получаем хорошо известный результат: отличие от нуля якобиана является необходимым и достаточным условием существования единственного обратного непрерывного точечного отображения $R^n \to R^n$.

г) Теорема о неявной функции. Рассмотрим n неявных функций $F^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, каждая из которых зависит от одних и тех же $n + m$ переменных. Разделим вектор переменных произвольно на два вектора — n-мерный вектор x и m-мерный y. Таким образом, функции F^i можно рассматривать в форме $F^i(x, y)$.

Покажем, что если выполнены некоторые условия, то существуют m функций:

$$y_i = \varphi^i(x),$$

т. е. *что любые m переменных можно выразить через остальные n*. Это утверждение представляет собой основное утверждение *теоремы о неявной функции* и гарантирует исключение неизвестных в нелинейных уравнениях.

Определим следующие $n + m$ переменных z_i *):

$$z_i = \begin{cases} x_i, & i = 1, \ldots, n, \\ F^{i-n}(x, y), & i = n+1, \ldots, n+m. \end{cases}$$

Таким образом, $(x, y) \to z$ является отображением $R^{n+m} \to R^{n+m}$. Если обозначить через M_1 матрицу $[\partial F^i/\partial x_j]$ порядка $m \times n$, а через M_2 — матрицу $[\partial F^i/\partial y_j]$ порядка $m \times m$, то, как легко видеть, матрица Якоби отображения $(x, y) \to z$ будет иметь следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

(где подматрица I порядка $n \times n$, а $[0]$ порядка $n \times m$). Имеем $\det M = \det M_2$, т. е. якобиан не обращается в нуль независимо от ранга M_1, если M_2 невырождена. Пусть $\det M_2 \neq 0$, тогда матрица M имеет обратную и, следовательно, существует единственное обратное отображение $z \to (x, y)$.

Обозначим компоненты обратного отображения:

$$x_i = f^i(z), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$y_k = f^{k+n}(z), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $z_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ (по построению), то $f^i(z) = z_i$. Далее, $z_j = F^{j-n}(x, y)$ для $j = n + 1, \ldots, n + m$. Но для тех x и y, которые удовлетворяют соотношениям, определяющим неявные функции, z_j равны нулю. Мы уже

---

*) Первые n компонент вектора z равны компонентам вектора x, остальные совпадают с компонентами вектор-функции F.

имеем равенства $z_i = x_i$ для $i \leq n$, так что искомые функции

$$y_i = \varphi^i(x)$$

эквивалентны функциям

$$y_i = f^{i+n}(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0).$$

Помимо требований непрерывности (а функции φ^i должны быть непрерывными) основными условиями, которые использованы в доказательстве, являются следующие:

1) существование в рассматриваемой области решений (x, y) системы из n неявных функциональных соотношений $F^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$;

2) $\det M_2 = \det[\partial F^i / \partial y_j] \neq 0$.

Теорема не гарантирует конструктивной возможности явного решения, но можно найти частные производные от φ^i, вычисляя следующим образом производные неявных функций:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F^i(x) = F^i_j + \sum \frac{\partial F^i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если через D_jF обозначить вектор $[F^i_j]$, а через $D_j\varphi$ — вектор $[\partial \varphi^k / \partial x_j]$, то приведенные выше соотношения можно представить в матрично-векторной форме

$$D_j\varphi = -M_2^{-1} \cdot D_jF.$$

д) Пример приложения. В экономической теории часто встречается следующая задача. Рассматриваются m соотношений от n $(>m)$ переменных. Из них $n - m$ переменных предполагаются заданными или внесистемными. Задача заключается в выборе остальных m внутрисистемных переменных. Такое решение обычно определяет равновесие системы.

Интересно знать, как изменяются значения внутрисистемных переменных решения (или равновесия) при небольших изменениях внесистемных переменных (которые часто называют параметрами). Для решения этой задачи удобно использовать дифференциалы. Если предположить, что соотношения выражены неявно равенствами $F^i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, то имеем

$$dF^i = \sum F^i_j \, dx_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Обозначим матрицу $[F_j^i]$ через M. Тогда составляющие приращений dx переменных (обозначения внутрисистемных и внесистемных переменных не различаются) связаны соотношением

$$M\,dx = 0.$$

Эту систему можно проанализировать, используя линейную теорию.

Д8.4. МАКСИМУМ И МИНИМУМ *)

Теорему Тейлора для функции векторного аргумента можно сформулировать в нескольких формах. Нас устраивает следующая:

Теорема Тейлора. *Пусть $f(x) \in C^2$, тогда*

$$f(x+v) = f(x) + \nabla f(x)\,v + \frac{1}{2!}\,v^T H v,$$

*где элементы матрицы Гессе H вычислены в некоторой точке $x + \theta v$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ **).*

Доказательство здесь не приводится. Его легко получить из теоремы Тейлора для функции одной переменной.

Теперь можно сформулировать основную теорему о существовании максимума или минимума функции $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C^2$. Она достигает максимума (минимума) на выпуклом множестве S во внутренней точке x^* тогда и только тогда, когда $\nabla f(x^*) = 0$, а H отрицательно (положительно) полуопределена всюду в S.

Пусть $f(x)$ достигает максимума в точке x^*, тогда $f(x) \leqq f(x^*)$ для всех $x \in S$. Любую точку $x \in S$ можно представить в форме $x = x^* + v$. По теореме Тейлора неравенство

$$f(x^* + v) \leqq f(x^*)$$

означает, что

$$\nabla f(x^*) v + \frac{1}{2!}\,v^T H v \leqq 0.$$

---

*) Для этого и следующего параграфов желательно знание свойств квадратичных форм (см. § Д6.1).

**) Формально это двучленное разложение Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Это неравенство справедливо для всех v, для которых $x^* + v \in S$, но поскольку S выпукло, то оно должно быть верно и для hv, где $h > 0$ достаточно мало. При этом неравенство принимает вид

$$h\nabla f(x^*) v + \frac{1}{2!} h^2 v^T H v \leqq 0,$$

или

$$\nabla f(x^*) v + \frac{1}{2!} h v^T H v \leqq 0$$

При $h \to 0$ имеем

$$\nabla f(x^*) v \leqq 0.$$

Но поскольку x^* — внутренняя точка множества S (это является решающим фактором), то для достаточно малого h из того, что $x^* + hv \in S$, следует, что и $x^* - hv \in S$. Поэтому аналогично предыдущему неравенству имеем

$$-\nabla f(x^*) v \leqq 0.$$

Эти два неравенства вместе влекут за собой равенство

$$\nabla f(x^*) v = 0.$$

Каждая точка, в которой обращаются в нуль все частные производные, называется *критической точкой функции* f.

Пусть $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда неравенство

$$f(x^* + v) \leqq f(x^*)$$

влечет за собой

$$v^T H v \leqq 0.$$

Так как последнее неравенство должно быть справедливо для всех v (при некоторых ограничениях на норму v, которые не влияют на результат), то матрица H должна быть отрицательно полуопределенной всюду в S, поскольку она вычислена в точке $x + \theta v$.

Аналогично из неравенства

$$f(x^* + v) \geqq f(x^*)$$

получается соответствующий результат для минимума функции $f(x)$.

Если определить S как открытую окрестность точки x^*, то остается только рассмотреть H в точке x^*. Это условие более естественно по сравнению с рассмотренными ранее условиями, определяющими *локальный* максимум или минимум.

В приведенном выше анализе предположение о том, что x^* является внутренней точкой множества S, существенно. Исследование максимумов и минимумов в граничных точках множества является задачей нахождения оптимума функции при наличии ограничений. Такие задачи исследуются в гл. 2—5.

Используя строгое неравенство $f(x^* + v) < f(x^*)$, заключаем, что:

Если H отрицательно (положительно) определена, то максимум (минимум) единственен.

Д8.5. ВЫПУКЛЫЕ И ВОГНУТЫЕ ФУНКЦИИ *)

Говорят, что функция $f(x)$ *выпукла* на выпуклом множестве $S \subset R^n$, если для любых двух точек $x^1, x^2 \in S$
$f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \leqq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2), \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$

Функция *строго выпукла*, если для всех λ, таких, что $0 < \lambda < 1$, и $x^1 \neq x^2$ справедливо строгое неравенство.

Функция $f(x)$ *вогнута* или *строго вогнута*, если $[-f(x)]$ выпукла или строго выпукла соответственно.

Линейная функция является и выпуклой, и вогнутой, но не является строго выпуклой или строго вогнутой. Функция называется *локально* выпуклой или вогнутой в точке x^*, если множество S является окрестностью точки x^* **).

Рассмотрим сумму $f(x) = \sum f^j(x)$ выпуклых функций, определенных на некотором выпуклом множестве S. Имеем

$$f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] = \sum f^j [\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] \leqq$$
$$\leqq \sum [\lambda f^j(x^1) + (1-\lambda) f^j(x^2)] = \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2),$$

*) Выпуклые и вогнутые функции являются специальными вопросами теории оптимизации и теории игр. В литературе по дифференциальному исчислению они обычно не рассматриваются. Полезной рекомендацией служит книга Хедли [3]. Книга Карлина [1] содержит изложение большинства свойств этих функций (дополнение *В*), но без доказательств, а также обобщения свойств в гл. 7.

**) В определении существенно, чтобы S было выпуклым множеством, поскольку мы требуем, чтобы точка $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in S$, если $x^1 \in S$ и $x^2 \in S$. Конечно, в качестве множества S может быть взято все пространство R^n. Тогда функция называется *глобально* выпуклой или вогнутой.

так что *сумма выпуклых функций выпукла* (а сумма вогнутых функций вогнута). Так как $cf(x)$, очевидно, выпукла, если выпукла функция $f(x)$ и $c > 0$, то *любая положительная линейная комбинация выпуклых (вогнутых) функций является выпуклой (вогнутой) функцией.*

Сформулируем важное свойство выпуклых и вогнутых функций.

Пусть функция $f(x)$ выпукла, тогда выпукло множество $V = \{x \mid f(x) \leqq f(x^*)\}$. Если $f(x)$ вогнута, то выпукло множество $V = \{x \mid f(x) \geqq f(x^*)\}$. Здесь x^* — произвольная точка множества S.

Докажем это свойство для случая выпуклой функции $f(x)$. Рассмотрим произвольные точки x^1 и x^2, принадлежащие множеству V. Так как $f(x^1) \leqq f(x^*)$, $f(x^2) \leqq \leqq f(x^*)$ и $f(x)$ выпукла, то

$$f[\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2] \leqq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \leqq \\ \leqq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^*) = f(x^*),$$

так что точка $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in V$. Утверждение доказано.

Важно иметь в виду, особенно при анализе экономических моделей, что приведенное выше свойство является необходимым, но не достаточным условием выпуклости или вогнутости функции $f(x)$. Сделаем следующие определения. Функция $f(x)$ называется *квазивыпуклой*, если выпукло множество $V = \{x \mid f(x) \leqq f(x^*)\}$, и $f(x)$ называется *квазивогнутой*, если выпукло множество $V = = \{x \mid f(x) \geqq f(x^*)\}$, где x^* — произвольная точка из области определения $f(x)$.

В экономической теории такие функции, как неоклассическая производственная функция и функция полезности, являются квазивогнутыми. Квазивогнутая функция не обязательно вогнутая. Так, неоклассическая производственная функция, отвечающая возрастающей эффективности при изменении масштаба производства, является квазивогнутой функцией, но не является вогнутой. Выпуклость или вогнутость $f(x)$ зависит как от поверхности уровня, так и от характера изменения функции при переходе от одной поверхности уровня к другой. В этом смысле функция полезности является квазивогнутой функцией, но мы не можем определить, является ли она вогнутой без дополнительных сведений о содержательном характере функции полезности. Дальнейшее рассмотрение этого вопроса приведено в § 8.5 гл. 8.

Наиболее сильным свойством выпуклого множества является следующее:

Пусть x определен на выпуклом множестве $X \subset R^n$, а y означает вектор $[x, \zeta]$ в R^{n+1}, где ζ — скаляр. Тогда функция $f(x)$ выпукла в том и только в том случае, если множество $\overline{S} = \{y \mid x \in X,\ \zeta \geqq f(x)\}$ выпукло, и $f(x)$ вогнута в том и только в том случае, если множество $S = \{y \mid x \in X,\ \zeta \leqq f(x)\}$ выпукло.

Докажем это свойство. Предположим, что $f(x)$ выпукла, и рассмотрим векторы $y^1 = [x^1, \zeta^1]$ и $y^2 = [x^2, \zeta^2]$, где $\zeta^1 \geqq f(x^1)$, $\zeta^2 \geqq f(x^2)$.

Тогда

$$\begin{aligned} y^* &= \lambda y^1 + (1-\lambda) y^2 = \\ &= [\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2,\ \lambda \xi^1 + (1-\lambda) \zeta^2] = \\ &= [x^*, \zeta^*]. \end{aligned}$$

Далее, $x^* \in X$ (поскольку множество X выпукло) и $f(x^*) = f[\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2] \leqq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$, где последнее неравенство следует из выпуклости функции $f(x)$. Но

$$\zeta^1 \geqq f(x^1), \quad \zeta^2 \geqq f(x^2),$$

так что

$$\begin{aligned} \zeta^* &= \lambda \zeta^1 + (1-\lambda) \zeta^2 \geqq \\ &\geqq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \geqq \\ &\geqq f(x^*), \end{aligned}$$

а $y^* = [x^*, \zeta^*] \in \overline{S}$.

Докажем достаточность. Предположим, что $y^* \in \overline{S}$, так что $\zeta^* \geqq f(x^*)$. Если предположение верно для всех y, то оно верно и для $\zeta^1 = f(x^1)$ и $\zeta^2 = f(x^2)$. В этом случае

$$f(x^*) \leqq \zeta^* = \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2),$$

что завершает доказательство.

Другим важным результатом является следующий:

Функция $f(x)$ выпукла тогда и только тогда, когда для всех x, $x^* \in X$:

$$f(x) - f(x^*) \geqq \nabla f^* \cdot (x - x^*).$$

Аналогичным образом формулируются свойства вогнутых, строго выпуклых и строго вогнутых функций. Для вогнутых функций знак неравенства меняется на обратный, для строго выпуклых и строго вогнутых функций соответствующие неравенства заменяются на строгие.

Для доказательства перепишем $\lambda x + (1 - \lambda) x^*$ в форме $x^* + \lambda (x - x^*)$. Тогда, если $f(x)$ выпукла, имеем

$$f[x^* + \lambda (x - x^*)] \leqq f(x^*) + \lambda [f(x) - f(x^*)].$$

Используя теорему Тейлора, можно левую часть неравенства записать следующим образом:

$$f[x^* + \lambda (x - x^*)] = \\ = f(x^*) + \lambda \nabla f[x^* + \lambda\theta (x - x^*)] \cdot (x - x^*),$$

$0 \leqq \theta \leqq 1$. Учитывая это равенство, получаем после деления на λ ($\lambda > 0$):

$$\nabla f[x^* + \lambda\theta (x - x^*)] (x - x^*) \leqq f(x) - f(x^*).$$

Это соотношение при $\lambda \to 0$ приводит к сформулированному результату. Отсюда легко следуют другие утверждения.

Следующее утверждение используется в гл. 8.

Если $f(x)$ выпукла (вогнута), то ее матрица Гессе положительно (отрицательно) полуопределена. Если $f(x)$ строго выпукла (вогнута), то ее матрица Гессе положительно (отрицательно) определена.

Для доказательства предположим, что $f(x)$ выпукла, и используем разложение Тейлора до второго порядка относительно точки x^*. Имеем

$$f(x^* + v) = f(x^*) + \nabla f^* \cdot v + \frac{1}{2} v^T H v,$$

где H вычислена в некоторой точке между x^* и $x^* + v$.

Из предыдущего результата непосредственно имеем:

$$\frac{1}{2} v^T H v = f(x^* + v) - f(x^*) - \nabla f^* \cdot v \geqq 0.$$

Поскольку это справедливо для всех v, то H положительно полуопределена. Отсюда следуют остальные пункты утверждения.

Из § Д8.4 вытекает следующий вывод:

Если выпуклая (вогнутая) функция имеет критическую точку, то эта функция достигает минимума (максимума) в этой точке.

Связь между выпуклыми функциями и минимумами и между вогнутыми функциями и максимумами и объясняет наш интерес к ним. Эта связь распространяется и на максимумы и минимумы функций при наличии ограничений даже тогда, когда функция может не иметь критических точек. Методы вычисления оптимума функции при наличии ограничений изложены в гл. 2.

Функция $f(z)$, у которой переменная z разделена на две группы, так что $f(z) = f(x, y)$, может быть вогнутой, когда рассматривается как функция от x (при фиксированном y), и выпуклой как функция от y (при фиксированном x). В критической точке такой функции будем иметь максимум относительно x и минимум относительно y. Такая точка называется *седловой точкой* функции $f(x, y)$. Функции с седловой точкой имеют большое значение в теории игр (не рассматриваемой в этой книге) и в теории оптимизации. Их роль в теории оптимизации обсуждается в гл. 5.

Д8.6. ОДНОРОДНЫЕ И ПОДОБНЫЕ (ГОМОГЕННЫЕ И ГОМОТЕТИЧНЫЕ) ФУНКЦИИ *)

Однородные функции очень важны в математической экономике, особенно в неоклассической теории производства. Подобные функции являются функциями более общего вида и иногда используются в экономической литературе.

Говорят, что скалярная функция $f(x)$ является *однородной степени* ρ, если она удовлетворяет соотношению

$$f(tx) = t^{\rho} f(x)$$

для всех чисел $t > 0$ и всех векторов x, для которых $f(x)$ определена. Существенно, чтобы $f(x)$ была определена на конусе, так как мы требуем, чтобы $f(tx)$ была определена всюду в области определения $f(x)$.

Функция является *положительно однородной*, если соотношение справедливо для $x \geqq 0$, $t > 0$. Она называется *однородной функцией первой степени*, или *линейно однородной*, если $\rho = 1$, и *однородной нулевой степени*, если $\rho = 0$, т. е. если $f(tx) = f(x)$.

Однородные функции являются частным случаем функций более общего класса, удовлетворяющих соотношению $f(tx) = \varphi(t) \cdot f(x)$. Эти функции называются *подобными*.

---

*) Однородные функции традиционно вызывают интерес у экономистов и изложены в литературе по математической экономике. Довольно детальное изложение в терминах более простых, чем здесь, содержится в книге А л л е н а [1].

Если положить $t = 1/x_j$, где x_j — произвольная компонента вектора x, то получим важное свойство однородных функций. Имеем

$$f\left(\frac{1}{x_j}x\right) = \left(\frac{1}{x_j}\right)^{\rho} \cdot f(x).$$

Отсюда

$$f(x) = x_j^{\rho} f(v_1, \ldots, v_{j-1}, 1, v_{j+1}, \ldots, v_n) = x_j^{\rho} f(v),$$

где $v_i = x_i/x_j$, $i \neq j$. Это свойство однородной функции часто бывает полезным. Однако более важным свойством однородных функций является

Теорема Эйлера. *Пусть функция $f(x)$ — однородная степени ρ. Тогда соотношение $\rho f(x) = \nabla f(x) \cdot x$ $(= \sum f_j x_j)$ выполняется для всех x.*

Для доказательства возьмем производные по t от обеих частей равенства, определяющего однородную функцию, считая x фиксированным. Получим

$$\sum f_j(tx) x_j = \rho t^{\rho-1} f(x).$$

Утверждение теоремы следует отсюда, если положить $t = 1$.

Проведя такой же анализ для подобной функции, получим *обобщенное соотношение Эйлера*:

$$\varphi'(1) \cdot f(x) = \nabla f(x) \cdot x.$$

Если рассмотреть частную производную от соотношения, определяющего однородную функцию, относительно переменной x_j, то получим

$$tD_j f(tx) = t^{\rho} D_j f(x),$$

или

$$D_j f(tx) = t^{\rho-1} D_j f(x),$$

т. е. $D_j f(x)$ является однородной функцией степени $\rho - 1$.

Вычисляя производные от этих однородных функций, приходим к выводу:

Частная производная n-го порядка от однородной функции степени ρ сама является однородной функцией степени $\rho - n$, при условии, конечно, что исходная функция принадлежит классу C^n.

Наконец, так как соотношение Эйлера справедливо для всех x, то можно вычислить частные производные от обеих частей. Имеем

$$\rho f_i = f_i + \sum_j f_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

или

$$(\rho - 1) f_i = \sum_j f_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Умножая каждое уравнение на x_i и складывая их, получим

$$(\rho - 1) \sum_i f_i x_i = \sum_i \sum_j f_{ij} x_i x_j.$$

Представляя это равенство в матричной форме и учитывая, что из теоремы Эйлера вытекает равенство

$$\sum_i f_i x_i = \rho f(x),$$

получаем следующее утверждение:

Пусть $f(x)$ — однородная функция степени ρ. Тогда $\rho(\rho - 1) f(x) = x^T H x$, где H — матрица Гессе в точке x.

Д8.7. ТЕОРЕМА БРАУЭРА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ*)

Вектор-функция векторного аргумента определяет точечное отображение. Отображение $x \to F(x)$ непрерывно, если непрерывна $F(x)$, т. е. если все компоненты $F(x)$ являются непрерывными функциями. Следовательно, большинство свойств непрерывных точечных отображений можно определить теми же методами, что и в предыдущем параграфе.

Однако в некоторых случаях эти методы не применимы. В предыдущем параграфе при обсуждении теоремы о неявной функции предполагалось, что существуют решения функциональных соотношений, и мы исследовали свойства отображений в окрестности этих решений. Но приведенный анализ не отвечал на вопрос, существуют ли решения этих функциональных соотношений.

---

*) Каждый экономист, склонный к математике, должен знать формулировки обеих теорем о неподвижной точке, т. е. теорем Брауэра и Какутани. Последняя рассматривается в § Д9.5 следующего дополнения.

Простое изложение теоремы Брауэра приведено у К у р а н т а и Р о б б и н с а, а также у Д о р ф м а н а, С а м у э л ь с о н а и С о л о у.

Следующая теорема дает хороший метод для доказательства существования решений (когда они существуют).

Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Пусть $F(x)$ определяет непрерывное точечное отображение компактного выпуклого множества S в себя. Тогда существует некоторая точка $x^* \in S$, такая, что $x^* = F(x^*)$* *).

Доказательство теоремы Брауэра требует топологических методов, которые выходят за рамки материала этой книги. Однако можно дать строгое доказательство для случая, когда множество $S \subset R^1$, и эвристическое, когда $S \subset R^2$.

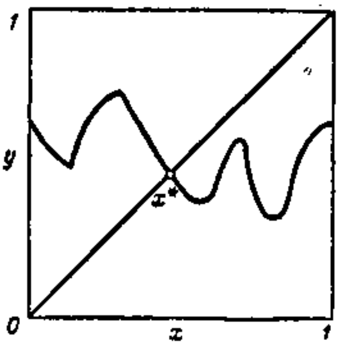


Рис. Д8.1. Теорема Брауэра о неподвижной точке в R^1.

Рассмотрим $S \subset R^1$. Тогда, если S компактно и выпукло, то оно является некоторым отрезком, скажем [0, 1]. Этот отрезок представляет собой область определения скалярной функции $F(x)$ скалярного аргумента x. Можно начертить график отображения в двумерной плоскости, как это сделано на рис. Д8.1, где x откладывается по горизонтальной оси, а $y=F(x)$—по вертикальной. Поскольку $F(x)$ определена для всех $x \in S$, то ее график должен пересекать квадрат от его левой границы до правой. Так как $F(x)$ по условию непрерывна, то график не имеет разрывов и, следовательно, должен пересекать в некоторой точке диагональ квадрата. Но диагональ есть множество точек, для которых $y = x$. Поэтому существует некоторая точка x^*, для которой $x^* = F(x^*)$. На рисунке график умышленно начерчен в виде негладкой кривой, чтобы подчеркнуть, что единственным требованием теоремы является непрерывность $F(x)$ (на графике нет разрывов).

Для $S \subset R^2$ можно рассуждать следующим образом. Пусть S — компактное выпуклое множество, изображенное на рис. Д8.2, а T — образ множества S при отображении.

*) Говорят, что точка x^* отображается в себя, и называют такую точку *неподвижной*.

Так как отображение непрерывно, то T должно быть компактным (но не обязательно выпуклым) и $T \subset S$.

Предположим для простоты, что T — собственное подмножество множества S, как показано на рисунке. Разделим множество S произвольно на два подмножества так, чтобы T целиком содержалось в одном из них. Рассмотрим

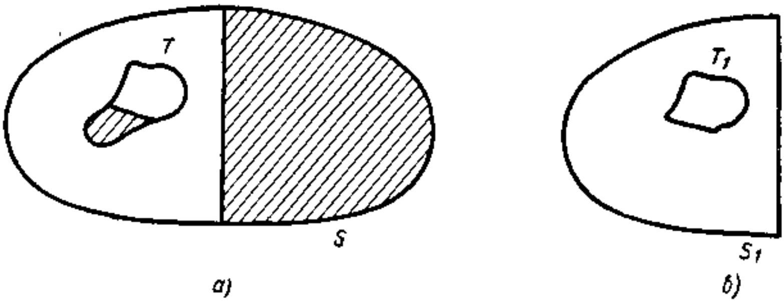


Рис. Д8.2. Теорема о неподвижной точке в R^2.

то подмножество, которое не содержит T (на рисунке заштрихованное). Оно имеет свой образ в множестве T, например, заштрихованная область в T на рисунке. Так как заштрихованная область множества T является образом множества, которое не содержит точек T, то она, очевидно, не содержит и неподвижных точек.

Теперь отбросим обе заштрихованные области. Имеем множества S_1, T_1 (рис. Д8.2, *б*), такие, что $T_1 \subset S_1$ и T_1 содержит образ каждой точки множества S_1. Поскольку соотношение между S_1 и T_1 того же вида, что и между S и T, то можно продолжить процесс разбиения и отбрасывания на множествах S_1, T_1, затем на S_2, T_2 и т. д.

Окончательно имеем лишь окрестность некоторой точки $x^* \in S$ и образ этой окрестности в T, который лежит внутри окрестности точки x^*. В пределе получаем, что $x^* \in T$ и, следовательно, x^* — неподвижная точка.

Конечно, теорема Брауэра является достаточным условием. Отображение может не удовлетворять условиям теоремы и иметь точку x^*, для которой $x^* = F(x^*)$.

Мы будем использовать теорему Брауэра в следующем параграфе. Теорема Какутани (см. § Д9.5) является обобщением теоремы Брауэра и дает метод решения проблемы существования равновесия экономической системы (см. гл. 9).

Д8.8. ЛИНЕЙНО ОДНОРОДНЫЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ *)

Важным классом функций в теории роста с неоклассическими производственными функциями являются функции вида

$$y = F(x),$$

где $x,\ y \in R^n$, а каждая компонента $F^i(x)$ является однородной функцией первой степени.

Будем предполагать, что $F(x)$ — *положительная* [из $x \geqq 0$ следует, что $F(x) \geqq 0$] и *неубывающая* [из $x^* \geqq x$ следует, что $F(x^*) \geqq F(x)$] функция.

Таким образом, отображение, определенное функцией F:

а) отображает R^n в R^n;

б) отображает $x \geqq 0$ в $F(x) \geqq 0$;

в) отображает $x^* \geqq x$ в $F(x^*) \geqq F(x)$;

г) отображает tx в $tF(x)$.

Отображение, обладающее всеми этими свойствами, определяется, в частности, равенством $y = Ax$, где A — полуположительная квадратная матрица. Функция $F(x)$ может рассматриваться как обобщение линейной функции, определенной полуположительной квадратной матрицей. В действительности нас интересуют именно те свойства функции $F(x)$, которые являются обобщениями свойств полуположительных матриц, сформулированных в дополнении Д7.

В теории полуположительных матриц понятие неразложимости является одним из основных. Это понятие позволяет значительно усилить многие результаты. Для тех же целей мы сделаем здесь аналогичные предположения.

Функция $F(x)$ называется *разложимой*, если можно найти некоторое подотображение $\hat{x} \in R^m \to \hat{y} \in R^m$, кото-

---

*) Материал этого параграфа является специальным и требуется только в теории роста (см. гл. 10, § 10.5). Он является обобщением результатов, связанных с полуположительными матрицами, и должен изучаться после знакомства с материалом дополнения Д7.

Первоначально анализ роста, использующий эти методы, был проведен Солоу и Самуэльсоном, но развитие предмета принадлежит Моришиме. Для более подробного изучения предмета следует обратиться к книге Моришимы [1] (дополнение). Математические обобщения содержатся в книге Карлина [2].

рое не зависит от компонент вектора x, не входящих в $\hat{x}$. Это означает, что $F(x)$ разложима, если существует некоторое множество S индексов, такое, что равенство $x_i^* = x_i$ влечет $F^i(x^*) = F^i(x)$ для всех $i \in S$, независимо от соотношений между x_j^* и x_j для $j \notin S$.

Функция $F(x)$ называется *неразложимой*, если она не является разложимой. Далее, если $x_i^* = x_i$, $i \in S$, и $x_j^* > x_j$, $j \notin S$, то $F^i(x^*) \geqq F^i(x)$ для всех i, как следствие неубывания $F(x)$. Тогда неразложимость влечет неравенство $F^i(x^*) > F^i(x)$, по крайней мере, для одного $i \in S$.

Теперь сформулируем представляющие интерес утверждения, которые являются очевидными обобщениями результатов Перрона-Фробениуса для матриц.

а) *Существует, по крайней мере, одно число* $\lambda \geqq 0$, *соответствующее линейно нормированному вектору* $v \geqq 0$, $\sum v_i = 1$, *такое, что*

$$\lambda v = F(v).$$

б) *Если* $F(x)$ *неразложима, то существуют единственные* λ *и* v, *удовлетворяющие* (а) *и в дополнение к этому неравенствам* $\lambda > 0$, $v \gg 0$ *).

Существование доказывается легко, если воспользоваться теоремой Брауэра о неподвижной точке (см. § Д8.7). Рассмотрим множество

$$Y = \{y \mid y \in R^n,\ y \geqq 0,\ \sum y_i = 1\}$$

и отображение $T(y)$, определенное равенством

$$T(y) = \frac{1}{1 + \sum F^i(y)} [y + F(y)].$$

Из общих свойств y и F ясно, что $T(y) \geqq 0$, а по построению $\sum T^i(y) = 1$, так что $T(y) \in Y$. Таким образом, $T(y)$ определяет непрерывное точечное отображение множества Y в себя.

Положим $v = y$, $\lambda = \sum F^i(y) = \sum F^i(v)$. Имеем

$$v = \frac{1}{1+\lambda} [v + F(v)],$$

*) Вектор v можно рассматривать как собственный вектор нелинейного оператора $F(x)$.

откуда

$$\lambda v = F(v),$$

и $\lambda \geqq 0$, $v \geqq 0$ по построению. Таким образом, мы доказали (а).

Теперь предположим, что $F(x)$ неразложима, и докажем утверждение (б). Допустим, что не существует $v \gg 0$, для которого справедливо (а).

Пусть S — множество индексов, для которых $v_i = 0$, так что $v_i > 0$ для $i \notin S$. Рассмотрим tv, где $t > 1$. Имеем

$$F^i(tv) = tF^i(v)$$

для всех i. Для $i \in S$ $v_i = tv_i = 0$, а для $i \notin S$ $tv_i > v_i$, так что если $F(x)$ неразложима, то мы должны иметь $F^i(tv) > F^i(v)$ для некоторого $i \in S$. Но $F^i(v) = \lambda v_i = 0$ для всех $i \in S$, так что

$$F^i(tv) = tF^i(v) = 0$$

для всех $i \in S$, что противоречит предыдущему результату. Таким образом, множество S должно быть пустым, и существует $v \gg 0$, удовлетворяющий утверждению (а).

Предположим теперь, что $\lambda = 0$. Из доказательства утверждения (а) имеем $\lambda = \sum F^i(v)$ и $F^i(v) \geqq 0$ для всех i. Теперь выберем u так, чтобы $u_1 = v_1$ и $v_i > u_i \geqq 0$, $i = 2, \ldots, n$ (это возможно, так как $v \gg 0$). Тогда, если $F(v)$ неразложима, то должно выполняться неравенство $F^1(u) < F^1(v)$. Но это невозможно, так как $F^1(v) = \lambda v_1 = 0$, а F — положительная функция. Таким образом, $\lambda > 0$.

Наконец, нужно доказать единственность λ и v. Предположим, что существуют два числа λ и λ^*, и два вектора v и v^*. Обозначим через λ^* большее из чисел λ и λ^*, если они различны, так что $\lambda^* \geqq \lambda$.

Определим

$$\alpha = \max_i (v_i^*/v_i),$$

и пусть S — множество индексов, для которых $v_i^*/v_i = \alpha$. Тогда $v_i^*/v_i < \alpha$ для $i \notin S$. Таким образом, $\alpha v_i = v_i^*$ для $i \in S$ и $\alpha v_i > v_i^*$ для $i \notin S$. Согласно предположению о неразложимости $F(x)$ имеем $F^i(\alpha v) > F^i(v^*)$, по крайней мере, для одного $i \in S$. Пусть этот индекс $i = 1$. Тогда

$$F^1(\alpha v) = \alpha F^1(v) = \alpha\lambda v_1.$$

Здесь первое равенство следует из однородности функции F^1, а второе справедливо по определению v. Но $F^1(v^*) = \lambda^* v_1^*$, так что неравенство $F^1(\alpha v) > F^1(v^*)$ влечет за собой $\alpha\lambda v_1 > \lambda^* v_1^*$. Поскольку $\alpha v_i = v_i^*$ для всех $i \in S$, то $\alpha v_1 = v_1^*$, что приводит к неравенству $\lambda^* < \lambda$, которое противоречит первоначальному упорядочению чисел λ и λ^*. Таким образом, не может быть двух различных положительных чисел λ, следовательно, не может быть двух различных положительных векторов v, и единственность λ и v доказана.

Упражнения

1. Для функции $f(x) = 5x_1^3 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ вычислите:
а) ∇f;
б) производную по направлению $v = (1/3, 2/3)$;
в) матрицу Гессе.

2. Найдите критические точки следующих функций и определите, каждая ли критическая точка является точкой минимума или максимума функции:
а) $f(x) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$;
б) $f(x) = -x_1^3 - x_2^3 + 3x_1 + 3x_2$;
в) $f(x) = x_2^2 x_2^1 - x_2$.

3. Используя любое утверждение из § Д8.5, покажите, что функция $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ строго выпукла, и проверьте на ней все другие утверждения этого параграфа.

4. Покажите, что функция из упражнения 3 является также однородной функцией степени 2, и проверьте, что она удовлетворяет всем свойствам однородной функции, сформулированным в § Д8.6.

5. Покажите, что однородная функция первой степени имеет вырожденную матрицу Гессе.

6. Покажите, что функция $f(x) = x_1x_2$ является квазивогнутой при $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, но не является вогнутой функцией.

ДОПОЛНЕНИЕ Д9

ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Материал этого дополнения имеет большое значение для гл. 9. Он используется также при обсуждении в гл. 5 теоремы о минимаксе. Для остальных частей книги этот материал желателен, но не обязателен. Предполагается, что читатель знаком с дополнением Д1, выпуклыми множествами и общей теорией оптимизации. Параграф Д8.7 предыдущего дополнения (теорема Брауэра о неподвижной точке) должен быть прочитан.

Д9.1. ВВЕДЕНИЕ *)

Точечно-множественные отображения, в которых точке ставится в соответствие множество, а не единственная точка, связаны, в частности, с моделями оптимизации. Эти отображения можно также рассматривать как многозначные функции или соответствия.

Рассмотрим простую задачу линейного программирования, проиллюстрированную рис. Д9.1. Заштрихованная область является допустимым множеством K задачи. Целевая функция представляет собой линейную форму px, причем $p = [p_1, p_2] \geqq 0$. Для каждого p точка оптимума должна лежать на границе ABC. Поскольку точка оптимума одна и та же для p и для λp ($\lambda > 0$), будем предполагать, что вектор p линейно нормированный, так что $p_1 + p_2 = 1$.

Если $p = [1,0]$, то линия уровня (в пространстве более двух измерений она будет гиперплоскостью) целевой функции — w_1 должна быть вертикальной прямой, а точкой оптимума будет точка A. При изменении p от $[1,0]$ до $[0,1]$ линия уровня будет поворачиваться, проходя последовательно положения w_2, w_3, ..., до w_5. Будет меняться и оптимальный вектор. Начиная от w_1, точка A будет оста-

*) Материал этого параграфа нужен лишь для гл. 9 (общее равновесие) и для § 5.6. Параграф содержит эвристическую трактовку некоторых топологических понятий.

ваться оптимальной до тех пор, пока линия уровня целевой функции — прямая линия w — не повернется до положения w_2 и совпадет с AB. При линии уровня w_2 все точки отрезка AB оптимальные. При дальнейшем изменении вектора p только точка B становится оптимальной и остается единственной оптимальной точкой до тех пор, пока w не займет положение w_4, когда все точки отрезка BC оптимальные.

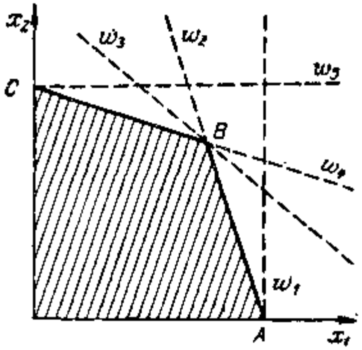


Рис. Д9.1. Точечно-множественные отображения.

Затем точка C становится оптимальной и остается ею для всех остальных значений вектора p.

Если определить $S(p) = \{x^* \mid px^* \geqq px;\ x, x^* \in K\}$, то очевидно, что отображение $p \to S(p)$ является точечно-множественным отображением. Оказывается, что $S(p)$ содержит всего одну точку для всех, кроме двух, значений вектора p. Но если $S(p)$ не является множеством, содержащим для *каждого* p единственную точку, то мы должны трактовать такое отображение, как точечно-множественное.

Отображения приведенного выше вида представляют собой типичный случай точечно-множественных отображений в экономической теории.

Заметим, что точки A, B и C на рисунке являются оптимальными для более чем одного вектора цен. Отсюда, если определить

$$S'(x) = \{p^* \mid p^*x \geqq px;\ \ p,\ p^* \in P,\ \ x \in K'\},$$

где P — множество нормированных полуположительных векторов цен, а K' — подмножество множества K, представленное отрезками AB и BC, то отображение $x \to S'(x)$, которое является обратным к отображению $p \to S(p)$, также является точечно-множественным отображением.

В этом дополнении нас интересует свойство непрерывности точечно-множественных отображений приведенного выше вида и существование неподвижной точки. Свойства непрерывности проще всего исследовать с помощью графика отображения, к обсуждению которого мы и переходим.

Д9.2. ГРАФИК ОТОБРАЖЕНИЯ

График простой функции одной переменной является столь же полезным аналитическим аппаратом, каким он является наглядным пособием, поскольку некоторые свойства, которые трудно выразить явно в алгебраической или другой форме, можно определить в терминах свойств графика.

Отправляясь от свойств графика функции $y = f(x)$, построим ряд обобщений следующим образом. Предположим, что $f(x)$ — однозначная функция одной переменной, и пусть S и T — подмножества множества действительных чисел, причем S — область определения функции f, а T — образ подмножества S. Тогда $S \times T$ есть множество пар действительных чисел, для которых $x \in S$, $y \in T$. Если взять произвольную пару (x, y), то либо $y = f(x)$, либо $y \neq f(x)$, так что те пары, для которых выполняется равенство $y = f(x)$, образуют *подмножество* множества $S \times T$.

Подмножество $[x, f(x)]$ *множества* $S \times T$ *называется графиком отображения* $f(x)$.

В простейшем случае прямая линия или кривая, для которой $y = f(x)$, изображенная на плоскости, рассматривается скорее как *подмножество* множества R^2, чем как прямая линия или кривая в геометрическом смысле.

Это определение графика применимо к точечному отображению любого вида. Если $x \in R^n$, а $y = T(x) \in R^m$, то график отображения $x \to T(x)$ является подмножеством множества R^{n+m}.

Кроме того, можно непосредственно обобщить применительно к точечно-множественным отображениям понятие графика, введенное для точечных отображений.

Отображение $x \in S$ в $Y \subset T$ имеет график, который является подмножеством множества $S \times T$, содержащим все пары, состоящие из точки x и каждой точки множества ее образов, т. е. множества Y.

Рис. Д9.2 иллюстрирует на простом примере график точечно-множественного отображения. Пусть S и T — множества действительных чисел, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, а отображение задано правилом

$$Y = \left\{ y \,\middle|\, \frac{1}{2} x \leqq y \leqq x, \ x \in S \right\},$$

где Y — множество образов точки x. Тогда график этого отображения представлен на рисунке заштрихованной областью.

Представляют интерес свойства графика как множества. В частности, важно выяснить, когда это множество является открытым, а когда замкнутым.

Термин «график», встречающийся в *теории графов* *), связан с данным нами определением, но область использования этих терминов, вообще говоря, различна. Теория графов в основном связана с конечными графиками, т. е. с графиками отображений одного конечного множества в другое. В теории графов обычно рассматривается точечное отображение множества S в себя. Поскольку число точек конечно, то можно предположить, что каждая точка $x \in S$ связана *путем* (дугой) со своим образом x'. Этот x', в свою очередь, может иметь образ x'', а следовательно, можно предполагать, что начерчен путь из x в x''. Теория графов заключается в исследовании всех путей, которые связывают конечное число точек друг с другом.

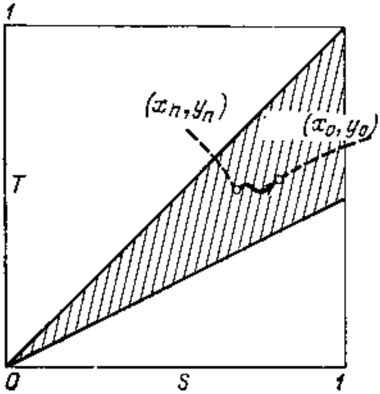


Рис. Д9.2. График отображения.

Мы будем также использовать термин «путь», но применительно к бесконечным графикам, с которыми мы здесь имеем дело. В этом смысле путь просто означает любую последовательность $x_0, \ldots, x_n, \ldots$, сопоставленную с последовательностью ее образов $y_0, \ldots, y_n, \ldots$ (в случае точечного отображения) или в случае точечно-множествен-

*) Теория графов имеет важные и растущие приложения в структурном анализе экономических систем и моделей. Такие вопросы, как неразложимость матрицы (см. § Д7.2) и структура некоторых задач программирования и теории игр, легко поддаются изложению в терминах теории графов. Лэди обобщил некоторые структурные замечания автора, содержащие качественные решения, которые используют эти методы.

По теории графов опубликован ряд монографий. Автор рекомендует книгу Бержа.

ного отображения с любой такой последовательностью $y_0, \ldots, y_n, \ldots$, для которой $y_i \in Y(x_i)$, где $Y(x_i)$ — множество образов точки x_i. Очевидно, что последовательность последнего вида в геометрическом смысле представляется любым путем, который целиком лежит в графике. На рис. Д9.2 показан такой путь из (x_n, y_n) в (x_0, y_0).

Д9.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Для обычной функции $f(x)$ непрерывность в точке x_0 определяется в терминах соотношений между $f(x)$ и $f(x_0)$, с одной стороны, и между x и x_0 — с другой. В эвристическом смысле $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$. График функции, если она непрерывна во всех точках, должен быть связным. Очевидно, этот подход нельзя непосредственно перенести на случай точечно-множественных отображений, где $f(x)$ и $f(x_0)$ не однозначны. Вместо этого определим следующие понятия.

Говорят, что точечно-множественное отображение *полунепрерывно сверху* в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\} \to x_0$ каждая последовательность образов $\{y_n\}$ имеет предельную точку, лежащую в множестве образов точки x_0.

Говорят, что точечно-множественное отображение *полунепрерывно снизу* в точке x_0, если каждая точка из множества образов точки x_0 является предельной точкой для некоторой такой последовательности, для которой каждая точка y является образом соответствующей точки x.

Точечно-множественное отображение *непрерывно*, если оно полунепрерывно сверху и снизу.

Отображение полунепрерывно сверху или снизу, или непрерывно на множестве S, если соответствующее свойство справедливо для всех точек $x \in S$.

Следующие определения свойств непрерывности эквивалентны предыдущим. Пусть L — множество предельных точек всех последовательностей образов в графике отображения, соответствующих пути $x \to x_0$, и пусть $Y(x_0)$ — множество образов точки x_0. Тогда отображение полунепрерывно сверху в x_0, если $L \subset Y(x_0)$, и оно полунепрерывно снизу в x_0, если $Y(x_0) \subset L$. Если отображение полунепрерывно снизу и сверху в точке x_0, то $L = Y(x_0)$, что соответствует интуитивному представлению непрерывного отображения.

Эти понятия непрерывности можно проиллюстрировать в терминах графика простого точечно-множественного отображения одного множества действительных чисел в другое.

Рис. Д9.3 дает такую иллюстрацию. При $x < 1$ правило отображения то же, что и на рис. Д9.2. При $x = 1$ на рис. *а*) имеем $0 \leqq y \leqq 1$, а на рис. *б*) $^3/_4 \leqslant y \leqq 1$. В обоих

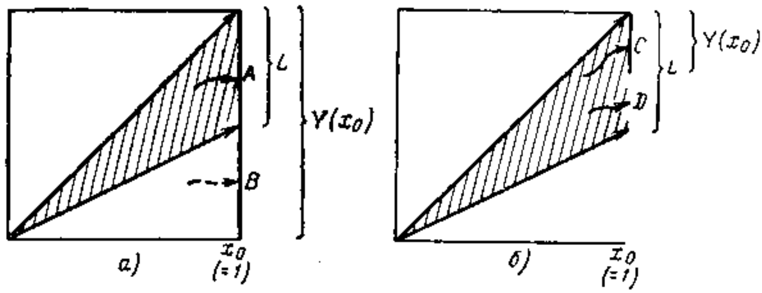


Рис. Д9.3. Полунепрерывные сверху и полунепрерывные снизу отображения.

случаях множество образов точки $x = 1$ показано на рисунке жирной вертикальной линией. Стрелки на границах той части графика, для которой $x < 1$, показывают, что эти границы не «достигают» прямой $x = 1$ (т. е. график отображения при $x = 1$ определен не так, как на рис. Д9.2). Множество L предельных точек всех последовательностей образов, соответствующих последовательности путей $x \to x_0$, показано на каждом рисунке.

Из рисунка ясно, что в случае *а*) $L \subset Y(x_0)$, т. е. отображение полунепрерывно сверху. С другой стороны, $Y(x_0) \not\subset L$, так что отображение не является полунепрерывным снизу. В смысле первого определения рисунок *а*) представляет полунепрерывное сверху отображение, так как каждая последовательность образов, соответствующая последовательности путей $x \to x_0$ (а y принадлежит множеству образов соответствующей точки x), должна заканчиваться в $Y(x_0)$. Но это отображение не является полунепрерывным снизу, поскольку в $Y(x_0)$ имеются точки, например B, не являющиеся предельной ни для какой последовательности образов, соответствующих последовательности путей $x \to x_0$.

С другой стороны, рисунок *б*) представляет полунепрерывное снизу отображение, так как $Y(x_0) \subset L$. Но это отображение не является полунепрерывным сверху, так как $L \not\subset Y(x_0)$. В смысле второго определения для любой точки из $Y(x_0)$ можно найти последовательность образов, соответствующую последовательности путей $x \to x_0$ и имеющую эту точку множества $Y(x_0)$ своей предельной точкой. Однако существует последовательность образов, предельная точка которой, например D, не принадлежит множеству $Y(x_0)$, т. е. полунепрерывность сверху не имеет места.

На рис. Д9.3 имеем равенство $L = Y(x_0) = \{y \mid \frac{1}{2} \leqq y \leqq 1\}$, т. е. отображение непрерывно.

Из приведенных иллюстраций и из формальных определений ясно, что *отображение полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда его график является замкнутым множеством*. Каждая последовательность образов должна иметь в качестве предельной точки внутреннюю или граничную точку графика и если все граничные точки графика принадлежат множеству, то полунепрерывность сверху обеспечена.

Полунепрерывность сверху является очень важным свойством, так как она характеризует многие точечно-множественные отображения в экономической теории. Кроме того, для использования теоремы Какутани (см. § Д9.5) о неподвижной точке не обязательно требовать непрерывность отображения, а достаточно полунепрерывности сверху. Обычно для доказательства полунепрерывности сверху отображения бывает проще убедиться в замкнутости его графика, чем исследовать последовательности образов.

Полунепрерывные снизу отображения нас обычно не интересуют. Полунепрерывность снизу исследуется для того, чтобы показать, что отображение непрерывно, если уже показано, что оно полунепрерывно сверху.

Доказательство полунепрерывности снизу включает в себя доказательство существования соответствующих последовательностей образов, сходящихся к каждой точке множества $Y(x_0)$. Это может потребовать изобретательности.

Если мы возьмем приведенные выше определения непрерывности точечно-множественного отображения и применим их к специальному случаю, в котором множество образов каждой точки x содержит единственную точку, то увидим, что понятия полунепрерывности снизу, полунепрерывности сверху и непрерывности становятся эквивалентными и совпадают с обычным определением непрерывности точечного отображения.

По этой причине, по-видимому, уместно устранить некоторые потенциальные терминологические неясности. Говорят, что функция $f(x)$ *полунепрерывна сверху* в точке x_0, если $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ для всех x, достаточно близких к x_0, хотя расстояние $|f(x) - f(x_0)|$ не обязательно мало. (Полунепрерывность снизу функции $f(x)$ эквивалентна полунепрерывности сверху функции $[-f(x)]$.)

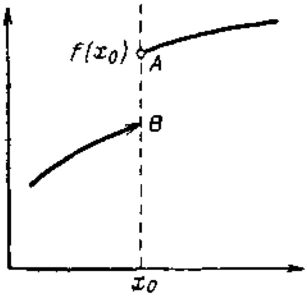


Рис. Д9.4. Полунепрерывные функции.

На рис. Д9.4 показан график *полунепрерывной сверху функции*. Можно видеть, что к $f(x_0)$ (точка A) функция приближается сверху непрерывно, а снизу терпит разрыв. Нижние точки графика имеют своей предельной точкой точку B, соответствующую множеству L в точечно-множественном отображении. Множество $Y(x_0)$ состоит из единственной точки A. Ясно, что включения $L \subset Y(x_0)$ и $Y(x_0) \subset L$ не имеют места, так что функция *разрывна*, если ее рассматривать как точечно-множественное отображение. С другой стороны, точечно-множественное отображение $x \to Y(x)$, где $Y(x) = \{y \mid 0 \leqq y \leqq f(x)\}$, полунепрерывно сверху.

Казалось бы, что для описания свойств непрерывности точечно-множественных отображений больше подходят термины «внешне» полунепрерывный и «внутренне» полунепрерывный, так как критерием для этого служит то, что одно множество содержит в себе другое или не содержит. Однако приведенная выше терминология уже установилась в литературе.

Два следующих свойства сложных отображений являются важными и почти непосредственно следуют из определения:

а) пусть точечно-множественное отображение $x \to y = f(x)$ непрерывно, а точечно-множественное отображение $y \to Z(y)$ полунепрерывно сверху. Тогда точечно-множественное отображение $x \to Z(f(x))$ также полунепрерывно сверху;

б) пусть точечно-множественные отображения $x_1 \to \varphi_1(x_1)$, $x_2 \to \varphi_2(x_2)$ полунепрерывны сверху. Тогда отображение $x \to \varphi(x)$, где $x = (x_1, x_2)$ и $\varphi(x) = \varphi_1 \times \varphi_2$, также полунепрерывно сверху. Последний результат можно расширить до декартова произведения любого числа точечно-множественных отображений.

В обоих приведенных утверждениях вместо слов «полунепрерывно сверху» можно вставить слова «полунепрерывно снизу».

Д9.4. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Все стандартные случаи экономического анализа, в которых используются точечно-множественные отображения и их свойства непрерывности, связаны с оптимальными решениями. Свойства непрерывности типичных отображений, которые появляются при оптимизации и изменении параметров, даются сформулированной здесь общей теоремой.

Пусть u и v — два вектора из R^n, а $u \to K(u)$ — отображение, которое определяет множество $K(u) \subset R^n$ для каждого u из некоторого множества $S \subset R^n$. Пусть $f(u, v)$ — однозначная функция переменных u и v. Определим множество

$$V(u) = \{v \mid f(u, v) = \max_{w \in K(u)} f(u, w)\}$$

и функцию

$$\varphi(u) = \max_{v \in K(u)} f(u, v).$$

В обычных экономических задачах u может быть вектором цен, а v — вектором затрат или вектором производства. Множество $K(u)$ — множество возможностей для выбора ситуации. Обычно множество $K(u)$ постоянно для случая производства и меняется вместе с u в случае потребления. Функция $f(u, v)$ является функцией цели или функцией ценности. Обычно это доходы (следовательно, функция от u и v) для случая производства или полезность (тогда это функция только v) в случае потребления. Множество $V(u)$ является тогда множеством оптимального производства, или множеством векторов оптимального потребления, связанных с u, а функция $\varphi(u)$ — оптимальный уровень доходов, или полезности.

Теперь можно сформулировать следующее утверждение *).

*) Более общий вариант теоремы приведен в книге Дебре [1].

Пусть:

а) отображение $u \to K(u)$ *непрерывно, а* $K(u)$ *— компактное выпуклое множество;*

б) функция $f(u, v)$ *непрерывна и вогнута по* v *для каждого* u.

Тогда:

(i) *отображение* $u \to V(u)$ *полунепрерывно сверху, а* $V(u)$ *— компактное выпуклое множество;*

(ii) *функция* $\varphi(u)$ *непрерывна.*

Мы не будем приводить строго доказательства, а отметим лишь следующие моменты. В соответствии с общей теорией оптимизации вогнутость $f(u, v)$ и выпуклость множества $K(u)$ гарантируют, что $V(u)$ — либо точка, либо выпуклое множество. Если рассмотреть любую последовательность $u \to u^*$, $v \subset V(u)$, то непрерывность функции $f(u, v)$ и отображения $u \to K(u)$ гарантируют, что предельная точка $v^* \in V(u^*)$. Это доказывает полунепрерывность сверху.

Рассмотрим теперь $\varphi(u)$. При заданном u функция $\varphi(u) = f(u, v)$, где v — произвольная точка множества $V(u)$. Если u принадлежит окрестности u^*, то $v \in V(u)$ содержится в окрестности некоторой точки $v^* \in V(u^*)$. Это следует из полунепрерывности сверху отображения $u \to V(u)$. Следовательно, $\varphi(u) = f(u, v)$, где v — любая точка множества $V(u)$, есть непрерывная функция от u.

Д9.5. ТЕОРЕМА КАКУТАНИ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ *)

Раньше (см. § Д8.7) рассматривалась теорема Брауэра о неподвижной точке. Следующая теорема является обобщением теоремы Брауэра, которое имеет большое значение в общем анализе равновесия и других вопросах, требующих доказательства существования.

*) Теорема приводится в книге Какутани, а с последними обобщениями — в книгах Эйленберга и Монтгомери и Бегла. Сформулированная здесь теорема является следствием теоремы 1 Какутани. Теорема 2 Какутани связана с существованием общей точки двух отображений и дает простое доказательство теоремы о минимаксе. Она тесно связана с теоремой фон Неймана.

Формулировка теоремы в приведенной здесь форме содержится без доказательства в различных книгах по экономике, включая книги Карлина [1], Дебре [1], Моришимы [1] и Дорфмана, Самуэльсона и Солоу.

Теорема Какутани. *Пусть $x \to T(x)$ определяет полунепрерывное сверху точечно-множественное отображение компактного выпуклого множества в себя и такое, что для каждого x множество $T(x)$ компактно и выпукло. Тогда существует точка $x^* \in T(x^*)$.*

Как и в случае теоремы Брауэра, можно привести иллюстрацию доказательства для случая $S \subset R^1$, которая показывает роль различных условий теоремы.

Рассмотрим для простоты точечно-множественное отображение, которое непрерывно всюду, кроме точки x_0,

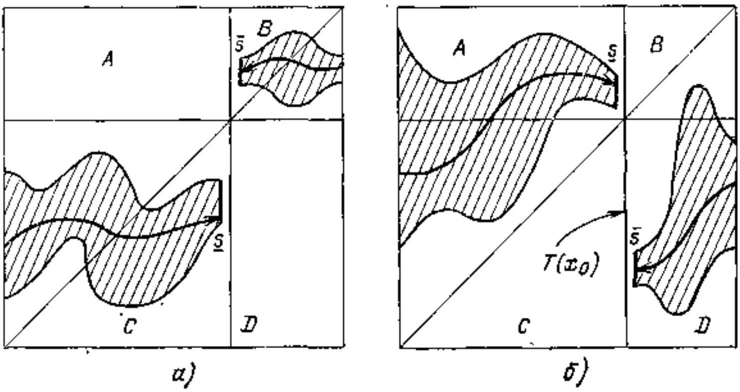


Рис. Д9.5. Теорема Какутани о неподвижной точке в R^1.

в которой оно лишь полунепрерывно сверху. Так как множество S компактно и выпукло, то в нашем случае оно должно быть отрезком, например $[0,1]$. Тогда график отображения принадлежит единичному квадрату $S \times S$, как на на рис. Д9.5.

Множество $S \times S$ разделено на четыре замкнутых подмножества прямыми $x = x_0$ и $y = T(x) = x_0$. Обозначим через $\underline{s}$ множество предельных точек последовательностей образов, соответствующих последовательности путей $x \to x_0$ для $x \leqq x_0$, а через $\bar{s}$ — аналогичное множество для $x \geqq x_0$. Так как отображение непрерывно всюду, кроме точки x_0, то оно и полунепрерывно снизу всюду, кроме точки x_0. Таким образом, каждой точке множества $\underline{s}$ отвечает последовательность образов, для которой она является предельной при $0 \leqq x < x_0$, а каждая точка множества $\bar{s}$ имеет аналогичную последовательность для $x_0 < x \leqq 1$.

Очевидно, что если $\underline{s} \subset C$ или $\overline{s} \subset B$, то любая последовательность, сходящаяся к некоторой точке $\underline{s}$ или $\overline{s}$, должна пересечь диагональ квадрата C или соответственно B, как это показано на рис. Д9.5, *а*.

Предположим, что $\underline{s} \subset A$, а $\overline{s} \subset D$, как на рис. Д9.5, *б*. Так как отображение полунепрерывно сверху, то $\underline{s} \subset T(x_0)$ и $\overline{s} \subset T(x_0)$. Но, по предположению, $T(x_0)$ выпукло, т. е. в этом случае оно должно быть связным интервалом. Тогда диагональ должна проходить через $T(x_0)$, определяя неподвижную точку.

Аналогичные рассуждения можно провести для каждой точки, в которой отображение не является непрерывным.

Упражнения

1. Для $x \in S$, где $S = \{x \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$, определим три точечно-множественных отображения следующим образом.

При $x \neq 0$ все отображения одинаковы и определяются соотношениями:

$$-1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}(x+1) \quad \text{при } 0 < x \leqq 1,$$

$$-\frac{1}{2}(x-1) \leqq y \leqq 1 \qquad \text{при } -1 \leqq x < 0.$$

В точке $x = 0$ три отображения определяются соответственно соотношениями:

а) $-1 < y < 1$;

б) $-1 \leqq y \leqq 1$;

в) $-1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1$.

Покажите, что для двух отображений существует неподвижная точка. Из трех отображений:

г) одно удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани;

д) одно является полунепрерывным сверху, но не удовлетворяет другому условию теоремы (какое это отображение?);

е) одно не является ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу.

Определите, какое из отображений обладает свойствами (г), (д) и (е) соответственно. (Указание: нарисуйте график в R^2.)

ДОПОЛНЕНИЕ Д10

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Содержание этого дополнения, как и содержание всех предыдущих дополнений, должно рассматриваться как стандартный аппарат анализа экономических моделей. В этой книге утверждения Д10 используются лишь в гл. 12. Предполагается знакомство читателя с содержанием дополнений Д1, Д2 и Д5. Те, кто читал параграфы, посвященные комплексным числам и векторам, собственным векторам и характеристическим корням, лишь поверхностно, теперь должны изучить их детально.

Д10.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ *)

Так как многие динамические модели экономики можно описать либо дифференциальными уравнениями, либо разностными уравнениями, то удобно исследовать эти два вопроса вместе. Это позволяет выявить как подобия, так и различия между двумя типами уравнений.

Рассмотрим произвольную функцию $y(t)$ одной независимой переменной t. Независимая переменная в обычных

---

*) Дифференциальные уравнения являются большим разделом математики с обширной библиографией. Мы касаемся лишь одного аспекта этого раздела. Разностные уравнения являются более специальными, хотя вычислительные машины явились причиной быстрого роста интереса к ним. Обсуждение дифференциальных и разностных уравнений с экономическими приложениями содержится в книге Баумоля [1]. Книга Аллена [2] содержит подробное обсуждение линейных скалярных уравнений n-го порядка, но не содержит уравнений в векторной форме, с которыми мы в основном имеем дело в этом дополнении. За пределами экономической литературы книга Гольдберга содержит достаточную информацию о разностных уравнениях, включая уравнения в векторной форме. Векторные разностные уравнения рассматриваются в книгах Беллмана [3] (гл. 10) и [1].

См. также книги Петровского и Понтрягина [2]. (*Прим. перев*).

дифференциальных или разностных уравнениях экономики почти всегда отождествляется со временем, поэтому мы обозначаем ее буквой t, а не более привычной буквой x. Производные $dy(t)/dt$, $d^2y(t)/dt^2$, ..., $d^ny(t)/dt^n$ будем для удобства записи обозначать символами $Dy(t)$, $D^2y(t)$, ..., $D^ny(t)$. Иногда полезно рассматривать D^r как *линейный оператор*, но здесь мы будем рассматривать лишь свойства $D^ry(t)$ как r-й производной функции $y(t)$. Важно не путать символы, например, D^2y и $(Dy)^2$, где первый означает вторую производную функции y, а второй — квадрат первой производной. Рассмотрим теперь $y(t)$ для последовательных дискретных значений t, с шагом h. Запишем их $y(t)$, $y(t+h)$, $y(t+2h)$, ... Выбирая соответствующим образом единицы измерения для t, всегда можно сделать $h = 1$. Мы всегда будем предполагать $h = 1$, если в тексте не будет оговорено противное. В экономических моделях этот интервал обычно отождествляется с периодом времени.

Определим

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

как *первую разность* функции $y(t)$. [Иногда ее называют *правой* разностью в противоположность *левой* разности $y(t) - y(t-1)$.] Затем

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta y(t)) &= \Delta y(t+1) - \Delta y(t) = \\ &= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) = \\ &= y(t+2) - 2y(t+1) + y(t).\end{aligned}$$

Обозначим $\Delta(\Delta y(t))$ через $\Delta^2 y(t)$ и будем называть ее *второй разностью*. Индуктивно можно определить *n-ю разность* как

$$\begin{aligned}\Delta^n y(t) &= \Delta^{n-1}y(t+1) - \Delta^{n-1}y(t) = \\ &= y(t+n) - ny(t+n-1) + \ldots + (-1)^n y(t).\end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta^n y(t)$ является линейной комбинацией $y(t)$, $y(t+1)$, ..., $y(t+n)$.

Соотношение между D и Δ определяется теоремой о среднем значении

$$Dy(t+\theta h) = \frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)] = \frac{1}{h}\Delta y(t), \quad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

Следовательно, $(1/h)\Delta y(t)$ равна производной в некоторой точке между t и $t+h$, и $(1/h)\Delta y(t) \to Dy(t)$ при

$h \to 0$. Для численного решения задач эта аппроксимация производной разностью имеет большое значение. Важным свойством разности, как и производной, является то, что она одна и та же для функций, отличающихся на константу. Если $y(t) = f(t) + a$, то $\Delta y(t) = f(t+1) - f(t)$.

Теперь мы готовы определить дифференциальное и разностное уравнения:

а) *соотношение вида* $f[t, y(t), Dy(t), \ldots, D^n y(t)] = 0$ ***называется дифференциальным уравнением*** *n-го порядка*;

б) *соотношение вида* $f[t, y(t), \Delta y(t), \ldots, \Delta^n y(t)] = 0$ ***называется разностным уравнением*** *n-го порядка.*

Разностное уравнение всегда можно выразить в форме

в) $\quad f[t, y(t), y(t+1), \ldots, y(t+n)] = 0,$

где порядок уравнения равен разности между первым и последним моментами времени, встречающимися в соотношении *).

Если f *полином*, то *степень* уравнения равна степени производной или разности *наивысшего порядка*. Не следует путать порядок и степень уравнения.

Примеры. а) Уравнение $D^3y(t) + [D^2y(t)]^2 - 2y^6 = 0$ является дифференциальным уравнением *третьего порядка первой степени*; б) уравнение $[\Delta y(t)]^2 - ky(t) + t^7 = 0$ является разностным уравнением *первого порядка второй степени*; в) уравнение $y(t+5) - ky(t) = 0$, очевидно, является разностным уравнением *пятого порядка*. Однако в этом случае изменение единиц t дает нам возможность представить его в форме уравнения *первого порядка*. Если же появляются значения y для периодов между t и $t+5$, то свести это уравнение к уравнению первого порядка нельзя.

Если уравнение имеет вид:

1) $a_0(t)D^ny(t) + a_1(t)D^{n-1}y(t) + \ldots + a_ny(t) = \varphi(t)$;

2) $a_0(t)\Delta^ny(t) + a_1(t)\Delta^{n-1}y(t) + \ldots + a_ny(t) = \varphi(t)$,

где коэффициенты $a_i(t)$ могут быть функциями от t, но не могут быть функциями от y или ее производных, то такое уравнение называется *линейным дифференциальным* (*или разностным*) уравнением *n-го порядка*.

*) Соотношение вида $f[t, y(t), \ldots, D^ry(t), \ldots, \Delta^ry(t)] = 0$ называется *смешанным дифференциально-разностным уравнением*. Иногда такие уравнения появляются в экономических моделях. Анализ дифференциально-разностных уравнений связан со значительными трудностями.

Если коэффициенты a_i являются постоянными, то уравнение называется *линейным дифференциальным* (*или разностным*) *уравнением с постоянными коэффициентами*. Если $\varphi(t) = 0$, то линейное уравнение называется *однородным*.

Мы почти всегда будем иметь дело с линейными уравнениями с постоянными коэффициентами и поэтому обычно будем называть их просто «линейными уравнениями».

В случае линейных уравнений, как мы увидим позже, также просто рассматривать уравнения, в которых $y(t)$ является *вектор-функцией* переменной t, а коэффициенты a_i — матрицами A_i, как и уравнения, в которых $y(t)$ является скалярной функцией, а коэффициенты a_i — числами. Будем называть такие уравнения *векторными* дифференциальными или разностными уравнениями. Если понадобится различать их, то будем называть обычное уравнение *скалярным*.

Дифференциальные или разностные уравнения рассмотренного нами вида, в которых y является скалярной или вектор-функцией одной независимой переменной t, называются *обыкновенными* дифференциальными или разностными уравнениями. Если y является функцией нескольких переменных и частные производные включены в дифференциальное уравнение (аналогично, частные разности в разностное уравнение), то такое уравнение называется дифференциальным уравнением в *частных производных* или разностным уравнением в *частных разностях*.

Уравнения, включающие частные производные, часто встречаются в неоклассической математической экономике. Вообще говоря, они не являются дифференциальными уравнениями в частных производных. В обычных неоклассических соотношениях, включающих частные производные, мы предполагаем (в принципе) заданной функцию (скажем, $u(x)$ в теории потребления) и требуем найти *точку*, в которой частные производные этой известной функции удовлетворяют некоторым соотношениям.

Дифференциальное уравнение мы будем иметь в том случае, если задано множество соотношений, включающих производные, и требуется найти *функцию*, производные которой удовлетворяют этим соотношениям. Задачи, в которых вид функции полезности определяет вид кривой спроса, связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных.

Решением дифференциального или разностного уравнения является *функция*, а не *точка*. В некоторых случаях (численное решение) функция может быть определена лишь таблицей точек на ее графике, но именно эта функция, а не отдельные точки, составляет решение.

Д10.2. РЕШЕНИЯ

Определим теперь формально *решение* дифференциального уравнения

$$f\,[t,\ y(t),\ Dy(t),\ \ldots,\ D^n y(t)] = 0$$

как *функцию $y(t)$, которая при подстановке в функцию f обращает соотношение $f = 0$ в тождество.* Решение разностного уравнения определяется аналогично.

В природу решений можно внести существенную ясность, если рассмотреть обратный процесс. Пусть $y(t) = f(t, c_1, \ldots, c_n)$ (между этой функцией f и той, которая участвует в определении решения, нет никакой связи) — произвольная функция переменной t, включающая n постоянных $c_1, \ldots, c_n$.

Рассмотрим функцию $y(t)$ в некоторой произвольной точке t и найдем ее производные в этой точке до n-го порядка. Каждая производная является функцией t и постоянных $c_1, \ldots, c_n$. Получим следующие $(n+1)$ соотношения:

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t,\ c_1,\ \ldots,\ c_n), \\ Dy(t) &= f_1(t,\ c_1,\ \ldots,\ c_n), \\ D^n y(t) &= f_n(t,\ c_1,\ \ldots,\ c_n). \end{aligned}$$

Предполагая, что осложнений, таких, как вырожденность якобиана, не появится, можно взять первые n из этих уравнений и решить их относительно постоянных $c_1, \ldots, c_n$, выразив их через функцию $y(t)$ и первые $(n-1)$ ее производные. Получим соотношения вида

$$c_i = \varphi_i\,[t,\ y(t),\ Dy(t),\ \ldots,\ D^{n-1}y(t)].$$

Если теперь их подставить в уравнение

$$D^n y(t) = f_n(t,\ c_1,\ \ldots,\ c_n),$$

то получим *дифференциальное уравнение n-го порядка:*

$$D^n y(t) - F\,[t,\ y(t),\ Dy(t),\ \ldots,\ D^{n-1}y(t)] = 0.$$

Аналогичный процесс можно использовать, чтобы исключить n постоянных и получить разностное уравнение n-го порядка.

Первоначальная функция $f(t, c_1, \ldots, c_n)$ называется *первообразной* функцией дифференциального или разностного уравнения, которое получено из нее приведенным выше путем. Таким образом, решение дифференциального или разностного уравнения можно рассматривать как поиск первообразной, из которой могло быть получено уравнение. Поскольку первообразную функцию с n произвольными постоянными можно свести к дифференциальному или разностному уравнению n-го порядка, то естественно ожидать следующее утверждение.

Дифференциальное или разностное уравнение n-го порядка должно иметь решение, содержащее n произвольных постоянных *).

Рассмотрим теперь решение задачи с начальными условиями. Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка и *n начальных условий*, т. е. значений $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{n-1}$ некоторой произвольной функции переменной t и ее первых $(n-1)$ производных в точке $t=0$. Можем ли мы найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, т. е. функцию, которая является решением дифференциального уравнения, и чтобы ее значение и значения ее $(n-1)$-й производных $y', \ldots, y^{(n-1)}$ в точке $t=0$ равнялись числам $y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$? При выводе дифференциального уравнения из первообразной функции мы отмечали, что произвольные постоянные можно выразить в форме

$$c_i = \varphi_i\,[t,\ y(t), \ldots, D^{n-1}y(t)],\quad i=1, \ldots, n.$$

Полагая $t=0$ и подставляя значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ в приведенные выше соотношения, получаем соответствующие значения постоянных $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворяющие начальным условиям. Таким образом, заданное решение дифференциального уравнения можно сделать удовлетво-

---

*) Уравнение само по себе может содержать любое число постоянных. Произвольные постоянные решения являются дополнительными, и в самом уравнении их нет. Иначе говоря, решение дифференциального уравнения n-го порядка эквивалентно n последовательным интегрированиям, каждое из которых вносит в решение произвольную постоянную интегрирования.

ряющим начальным условиям, выбирая соответствующим образом значения произвольных постоянных.

Аналогичные рассуждения можно провести и для разностного уравнения. Начальные условия для разностного уравнения обычно задаются в форме $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$, а не как значения $y(0)$ и $(n-1)$-й разности в точке 0. Обе эти формы можно легко получить одну из другой.

Таким образом, естественно ожидать следующее:

Для дифференциального или разностного уравнения n-го порядка можно найти решение, которое удовлетворяет n начальным условиям $y(0)$, $Dy(0)$, ..., $D^{n-1}y(0)$ *(для дифференциального уравнения) или* $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$ *(для разностного уравнения).*

Для разностного уравнения это непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Если разностное уравнение n-го порядка может быть записано в явной форме $\Delta^n y(t) = F[t, y(t), \Delta y(t), \ldots, \Delta^{n-1} y(t)]$, *где F — однозначная функция, то решение, удовлетворяющее начальным условиям* $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$, *всегда может быть найдено итеративно.*

Если уравнение можно записать в приведенной выше форме, то его всегда можно также записать и в форме

$$y(t+n) = f[t, y(t), y(t+1), \ldots, y(t+n-1)].$$

Полагая $t = 0$ и подставляя начальные значения в правую часть равенства, получаем $y(n)$. Затем можно положить $t = 1$, подставить в правую часть значения $y(1)$, ..., $y(n)$ и получить $y(n+1)$ и т. д.

При заданных начальных условиях можно получить численное решение дифференциального уравнения с помощью аппроксимации этого уравнения разностным. Возросший в недавнем прошлом интерес к разностным уравнениям был обусловлен способностью вычислительных машин управлять итеративными процессами такого вида. Интерес экономистов к разностным уравнениям был обусловлен не столько этим, сколько действительной способностью разностных уравнений описывать многие динамические процессы в экономике и возможностью использования неравенств вместе с конечными разностями. Изучение соотношений, содержащих производные и неравенства, гораздо сложнее.

Метод последовательных приближений можно также использовать для доказательства следующей теоремы *):

Теорема существования решения дифференциальных уравнений. *Пусть $F(z_1, \ldots, z_{n+1})$ — непрерывная функция $(n+1)$-й переменных $z_1, \ldots, z_{n+1}$ с непрерывными первыми частными производными. Тогда дифференциальное уравнение*

$$D^n y(t) = F[t, y(t), Dy(t), \ldots, D^{n-1}y(t)]$$

имеет решение $y = f(t)$, удовлетворяющее проивзольным начальным условиям $f(t_0) = y_0$, $Df(t_0) = y_0'$, ..., $D^{n-1}f(t_0) = y_0^{(n-1)}$. Кроме того, это решение единственно.

Д10.3 ЛИНЕЙНОЕ СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Мы будем исследовать линейные скалярные уравнения с постоянными коэффициентами следующего типа:

$$Dy(t) - \lambda y(t) = \varphi(t), \tag{1}$$

$$\Delta y(t) - \lambda y(t) = \varphi(t). \tag{2}$$

Прежде всего сделаем важное замечание. Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ — два любых различных решения уравнения (1). Тогда, если $y(t) = f_1(t) - f_2(t)$, то

$$Dy(t) - \lambda y(t) = [Df_1(t) - \lambda f_1(t)] - \\ - [Df_2(t) - \lambda f_2(t)] = \varphi(t) - \varphi(t) = 0,$$

т. е. функция $y(t)$ является решением соответствующего *однородного уравнения*

$$Dy(t) - \lambda y(t) = 0. \tag{3}$$

Произвольное решение $f(t)$ уравнения (1) называется его *частным решением*. Множество $Y(t)$ всех решений уравнения (1) задается соотношением

$$Y(t) = f(t) + \{y(t)\},$$

где $\{y(t)\}$ — множество всех решений однородного уравнения (3). (Заметим, что это соотношение подобно соотно-

*) Доказательство этой теоремы приводится в книге Каплана [1], а также во всех книгах по дифференциальным уравнениям.

шению между решениями неоднородного и соответствующего ему однородного *алгебраических* уравнений.) Как легко видеть, множество $\{y(t)\}$ обладает основными линейными свойствами

$$ky(t) \in \{y(t)\}, \text{ если } y(t) \in \{y(t)\},$$

$$y_1(t) + y_2(t) \in \{y(t)\}, \text{ если } y_1(t),\ y_2(t) \in \{y(t)\}.$$

Таким образом, решение уравнений, подобных уравнениям (1) и (2) (проведенный выше анализ, очевидно, справедлив и для разностного уравнения), заключается в нахождении любого частного решения и добавлении к нему множества решений соответствующего однородного уравнения.

В связи с этим вернемся к исследованию решений однородного уравнения $Dy(t) - \lambda y(t) = 0$. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\lambda t = \int \frac{dy}{y} + c = \ln y + c.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$y = ke^{\lambda t}, \text{ где } k = e^c.$$

Поскольку c, а следовательно, и k является постоянной интегрирования, то она является *произвольной постоянной*.

Таким образом, *общее решение* уравнения (1) имеет вид

$$y(t) = f(t) + ke^{\lambda t},$$

где $f(t)$ — частное решение, а k — произвольная постоянная. Очевидно, что множество $\{ke^{\lambda t}\}$ (для всех k) является множеством решений однородного уравнения.

Рассмотрим теперь однородную форму *разностного* уравнения

$$\Delta y(t) - \lambda y(t) = 0. \tag{4}$$

Если записать это уравнение в форме

$$y(t+1) = (1+\lambda)y(t),$$

то его можно решить итеративным путем. Получим $y(t) = k(1+\lambda)^t$, где постоянная $k = y(0)$ произвольна. Следовательно, общим решением уравнения (2) является функция

$$y(t) = f(t) + k(1+\lambda)^t.$$

Все сказанное выше можно подытожить следующим образом:

Общее решение уравнений (1) и (2) определяется по формулам

$$y(t) = f(t) + ke^{\lambda t}, \tag{5}$$

$$y(t) = f(t) + k(1+\lambda)^t \tag{6}$$

соответственно, где $f(t)$ — частное решение соответствующего уравнения, а k — произвольная постоянная.

На этом этапе мы не будем связывать себя с общей задачей нахождения частного решения. Рассмотрим только простой случай, в котором $\varphi(t)$ является постоянной. В случае дифференциального уравнения (1) имеем

$$Dy(t) - \lambda y(t) = c. \tag{7}$$

Очевидно, что функция $y(t) = y^* = \text{const}$ при соответствующем выборе y^* должна быть решением уравнения (7). Легко видеть, что $y(t) = y^* = -c/\lambda$ является частным решением этого уравнения.

В случае разностного уравнения (2) имеем

$$\Delta y(t) - \lambda y(t) = c. \tag{8}$$

Очевидно, что $y^* = -c/\lambda$ является также частным решением уравнения (8), так что общие решения уравнений (7) и (8) соответственно можно записать следующим образом:

$$y(t) = y^* + ke^{\lambda t}, \tag{9}$$

$$y(t) = y^* + k(1+\lambda)^t. \tag{10}$$

Мы можем записать эти решения для произвольного начального условия $y(0) = y^0$. Полагая $t = 0$ в (9), получим $y(0) = y^0 = y^* + k$, откуда $k = y^0 - y^*$. Тот же результат получится, если положить $t = 0$ в (10).

Таким образом, имеем общее решение уравнения, которое удовлетворяет произвольному начальному условию.

Решением уравнения $Dy(t) - \lambda y(t) = c$ при условии, что $y(0) = y^0$, является функция

$$y(t) = y^* + (y^0 - y^*)e^{\lambda t}. \tag{11}$$

Решением уравнения $\Delta y(t) - \lambda y(t) = c$ *при условии, что* $y(0) = y^0$, *является функция*

$$y(t) = y^* + (y^0 - y^*)(1+\lambda)^t, \qquad (12$$

где $y^* = -c/\lambda$ *в обоих случаях.*

Частное решение дифференциального или разностного уравнения, которое, подобно y^*, является постоянным. называется *равновесным решением* (если функция $\varphi(t)$ не является постоянной, то равновесное решение в этом смысле обычно не существует). Каждое линейное дифференциальное или разностное уравнение с постоянными коэффициентами и $\varphi(t) = \text{const}$ имеет равновесное решение. Если уравнение однородное, то равновесным решением всегда является $y^* = 0$.

Если для всех y^0 в области $|y^* - y^0| \leqq k$ каждое решение уравнения стремится к y^* при $t \to \infty$, то говорят, что уравнение *устойчиво в области*. Если k может быть сколь угодно большим, то уравнение называется *глобально устойчивым*; если k характеризуется как «малое», то уравнение называется *локально устойчивым*. Поведение решения (11) или (12) во времени зависит от *динамического члена* $(y^* - y^0)\,e^{\lambda t}$ или $(y^* - y^0)(1+\lambda)^t$. Заметим, что если y^0 уже является равновесием y^*, то динамический член обращается в нуль. Однако если $y^0 \neq y^*$ (хотя разность может быть и мала), то следует учитывать динамический член, влияние которого может быть существенным. Для *дифференциального уравнения* (1) существуют только два качественно различных вида поведения решения (мы предполагаем $\lambda \neq 0$):

а) если $\lambda < 0$, то $e^{\lambda t} \to 0$ при $t \to \infty$, и уравнение устойчиво. В этом случае имеет место глобальная устойчивость;

б) если $\lambda > 0$, то $e^{\lambda t}$ неограниченно возрастает при $t \to \infty$. Хотя разность $y^* - y^0$ может быть малой, динамический член со временем становится очень большим и непрерывно растет.

Для всех λ и t имеем $e^{\lambda t} \geqslant 0$, так что знак разности $y(t) - y^*$ в решении дифференциального уравнения (1) всегда совпадает со знаком разности $y^0 - y^*$, т. е. $y(t)$ остается с той стороны от y^*, с которой оно было вначале.

Для *разностного уравнения* существует больше различий в поведении решения.

а) Если $|1+\lambda|<1$, то $(1+\lambda)^t \to 0$ при $t \to \infty$, и уравнение устойчиво, как в случае $\lambda < 0$ для дифференциального уравнения. Здесь, однако, член $(1+\lambda)^t$ может стремиться к нулю двумя различными способами в зависимости от знака $(1+\lambda)$:

i) если $0 \leqq 1+\lambda < 1$ $(-1 \leqq \lambda < 0)$, то $(1+\lambda)^t \geqq 0$ и $y(t)$ остается с той же стороны от y^*, что и y^0;

ii) если $-1 < 1+\lambda < 0$ $(-2 < \lambda < -1)$, то $(1+\lambda)^t$ и $(1+\lambda)^{t+1}$ имеют противоположные знаки, а $y(t)$ чередует свое расположение относительно y^*, но расстояние $|y(t)-y^*|$ убывает с возрастанием t *).

б) Если $|1+\lambda|>1$, то $(|1+\lambda|)^t$ возрастает с возрастанием t, и уравнение неустойчиво. Снова существуют два вида неустойчивости. Если $1+\lambda>1$ $(\lambda>0)$, то $(1+\lambda)^t$ растет вместе с ростом t, в то время как при $1+\lambda<-1$ $(\lambda<-2)$ расстояние $|y(t)-y^*|$ растет с ростом t, но $y(t)$ меняет свое расположение относительно y^*.

Мы можем сопоставить и противопоставить дифференциальное и разностное уравнения, анализируя природу решений этих двух уравнений для различных значений λ:

а) если $\lambda>0$, то оба уравнения неустойчивы;

б) если $-2<\lambda<0$, то оба уравнения устойчивы, хотя при $-2<\lambda<-1$ решение разностного уравнения сходится к y^*, чередуя свое расположение относительно y^*;

в) если $\lambda<-2$, то дифференциальное уравнение устойчиво, а разностное неустойчиво.

Таким образом, в то время как условие $\lambda<0$ является необходимым и достаточным для устойчивости дифференциального уравнения, оно является *необходимым, но не достаточным* для устойчивости разностного уравнения. Для последнего достаточным условием является выполнение неравенства $|1+\lambda|<1$.

Устойчивость в техническом смысле здесь не всегда может совпадать с устойчивостью в том смысле, в котором это понятие используется для экономических моделей. (Смотри, например, гл. 12, § 12.1.)

---

*) Не следует путать *чередование* с синусоидальным движением или *колебанием*, с которым мы встретимся в следующем параграфе.

Д10.4. КОМПЛЕКСНЫЕ РЕШЕНИЯ

В линейном уравнении первого порядка с действительными коэффициентами λ обязательно действительно. Чтобы исследовать природу решений дифференциального и разностного уравнений дальше, необходимо рассмотреть однородное уравнение второго порядка.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение:

$$D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_2 y(t) = 0.$$

Поскольку функция $e^{\lambda t}$ была решением уравнения первого порядка, то естественно проверить такое решение и в этом случае. Подставляя $e^{\lambda t}$ в уравнение, получаем

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\, e^{\lambda t} = 0.$$

Далее, $e^{\lambda t} \neq 0$, так что $e^{\lambda_i t}$ является решением в том и только в том случае, когда λ_i является корнем *характеристического уравнения* *)

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что функция $(1 + \lambda_i)^t$ является решением однородного разностного уравнения второго порядка

$$\Delta^2 y(t) + a_1 \Delta y(t) + a_2 y(t) = 0$$

тогда и только тогда, когда λ_i является корнем характеристического уравнения точно такого же вида, что и в случае дифференциального уравнения.

Очевидно, что если λ_1 и λ_2 два корня характеристического уравнения, то функции $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ и $y(t) = c_1 (1 + \lambda_1)^t + c_2 (1 + \lambda_2)^t$ являются решениями дифференциального и разностного уравнений соответственно для любых постоянных c_1 и c_2.

Так как характеристическое уравнение квадратное, то оно может иметь либо действительные либо комплексные корни. Если корни действительны, то решение $y(t)$ является некоторой взвешенной суммой решений, описанных в предыдущем параграфе.

Если корни комплексные, то, поскольку коэффициенты a_1 и a_2 взяты действительными, два корня должны быть

---

*) Корни характеристического уравнения будем называть *характеристическими корнями.*

комплексно-сопряженными. Будем обозначать их через λ и λ^*. В этом случае $e^{\lambda t}$ и $(1+\lambda)^t$ должны быть комплексными числами.

Теперь мы будем интересоваться исключительно случаем комплексных корней. Рассмотрим решение дифференциального уравнения в точке $t = 0$. Имеем

$$y(0) = c_1 + c_2.$$

Далее, $y(0)$ является действительным числом, значит, $c_1 + c_2$ — число действительное. Таким образом, мнимые части c_1 и c_2 должны быть противоположны по знаку и равны по абсолютной величине. Запишем

$$c_1 = \alpha_1 + i\beta, \quad c_2 = \alpha_2 - i\beta.$$

Рассмотрим первую производную от $y(t)$ в точке $t = 0$. Имеем

$$Dy(0) = c_1\lambda + c_2\lambda^*.$$

Число $Dy(0)$ действительное, следовательно, мы должны иметь $\operatorname{Im}(c_1\lambda + c_2\lambda^*) = 0$.

Положим $\lambda = a + ib$, тогда $\lambda^* = a - ib$. Используя значения c_1 и c_2, имеем

$c_1\lambda + c_2\lambda^* = (\alpha_1 + i\beta)(a + ib) + (\alpha_2 - i\beta)(a - ib)$.

$\operatorname{Im}(c_1\lambda + c_2\lambda^*) = (\beta a + b\alpha_1) - (\beta a + b\alpha_2) = b(\alpha_1 - \alpha_2)$,

$\operatorname{Im}(c_1\lambda + c_2\lambda^*) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (b по условию отлично от нуля).

Таким образом, $c_1 = \alpha + i\beta$, $c_2 = \alpha - i\beta$, т. е. если $c_1 = c$, то $c_2 = c^*$ *).

Отсюда — важный результат, состоящий в том, что в случае уравнения с действительными коэффициентами *все комплексные корни встречаются сопряженными парами и соответствующие произвольные постоянные также встречаются сопряженными парами.*

Теперь можно записать решение уравнения в случае комплексных корней (для дифференциального уравнения) в виде

$$y(t) = ce^{\lambda t} + c^*e^{\lambda^* t} = ce^{\lambda t} + (ce^{\lambda t})^*.$$

---

*) Хотя по заданной постоянной c мы получаем c^*, существуют все же две произвольные постоянные. Эти постоянные равны действительной и мнимой частям константы c.

Далее, сумма комплексного числа и его сопряженного равна удвоенной действительной части этих чисел, т. е.

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\,(ce^{\lambda t}).$$

Положим $\lambda = \alpha + i\omega$, тогда

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\omega t}.$$

Представим c в полярной форме

$$c = \frac{1}{2} k e^{i\varphi}.$$

Тогда имеем

$$ce^{\lambda t} = \frac{1}{2} k e^{\alpha t} e^{i(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{2} k e^{\alpha t} [\cos(\omega t+\varphi) + i \sin(\omega t+\varphi)],$$

так что

$$y(t) = 2\mathrm{Re}\,(ce^{\lambda t}) = ke^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\alpha = \mathrm{Re}\,(\lambda)$, а $\omega = \mathrm{Im}\,(\lambda)$. Параметр φ зависит только от произвольной постоянной.

В случае разностного уравнения имеем комплексно-сопряженные корни, которые, как можно показать аналогичными рассуждениями, связаны с сопряженными постоянными. Таким образом,

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\,[c(1+\lambda)^t].$$

В этом случае запишем комплексное число $(1 + \lambda)$ в полярной форме $\rho e^{i\omega}$, где $\rho = |1 + \lambda|$, так что $(1 + \lambda)^t = \rho^t e^{i\omega t}$.

Если запишем c в такой же форме, как и в случае дифференциального уравнения, то будем иметь

$$c(1+\lambda)^t = \frac{1}{2} k\rho^t e^{i(\omega t+\varphi)}.$$

Отсюда получаем

$$y(t) = k\rho^t \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\rho = |1 + \lambda|$, а $\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{Im}\,(1 + \lambda)/\mathrm{Re}\,(1 + \lambda)$.

Теперь можно подытожить наши результаты относительно случая комплексных корней:

Если линейное однородное дифференциальное или разностное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексный характеристический корень λ, то оно имеет и другой комплексный характеристический корень, *сопряженный к первому, а составляющая решения, соответствующая паре комплексно-сопряженных характеристических корней, может быть записана в форме*

$y(t) = ke^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$ (*случай дифференциального уравнения*),

$y(t) = k\rho^t\cos(\omega t + \varphi)$ (*случай разностного уравнения*),

где $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\rho = |1 + \lambda|$. *В обоих случаях* ω *зависит от* $\mathrm{Im}(\lambda)$ *и* $\omega = 0$ *при* $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$. *Произвольными постоянными являются* k *и* φ.

Если $\alpha = 0$ или $\rho = 1$, то решения имеют вид $y(t) = k\cos(\omega t + \varphi)$ и представляют собой синусоиду. Максимальное значение функции $y(t)$ равно k. Это число называется *амплитудой колебания*.

Постоянная φ определяет сдвиг начала координат во времени. Эта постоянная задает *фазу* колебания. Поскольку $\cos(2\pi + x) = \cos x$, то кривая в точке t' повторяет свое значение в точке t, если только $\omega(t' - t) = 2\pi$, так что $t' - t = 2\pi/\omega$ является *периодом* колебания.

При $\varphi = 0$ в точке $t = 0$ амплитуда колебаний равна k. В других точках она задается выражениями $ke^{\alpha t}$ или $k\rho^t$. Если $\alpha < 0$ или $\rho < 1$, то амплитуда колебаний убывает с ростом t. Такая траектория с *затухающими колебаниями*, очевидно, является устойчивой.

Если $\alpha > 0$ или $\rho > 1$, то амплитуда колебаний возрастает вместе с ростом t (такие колебания иногда называют *незатухающими*). Эта траектория является, очевидно, неустойчивой.

Таким образом, мы можем сформулировать условия устойчивости для решений, соответствующих комплексным характеристическим корням.

Для *дифференциального уравнения* условие $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ является необходимым и достаточным для устойчивости решения, так же как условие $\lambda < 0$ в случае действительных характеристических корней.

Для *разностного уравнения* условие $\rho = |1 + \lambda| < 1$ является необходимым и достаточным для устойчивости решения. Далее, $\rho^2 = [1 + \mathrm{Re}(\lambda)]^2 + [\mathrm{Im}(\lambda)]^2$, так что условие $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ является *необходимым*, но *не достаточным* для устойчивости.

Д10.5. ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь уравнения вида

$$Dy(t) - Ay(t) = 0, \tag{1}$$

$$\Delta y(t) - Ay(t) = 0, \tag{2}$$

где $y(t)$ n-мерный вектор, A — матрица порядка $n \times n$, а $Dy(t)$ и $\Delta y(t)$ — векторы с компонентами $Dy_i(t)$ и $\Delta y_i(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что матрица A невырожденная с различными отличными от нуля характеристическими корнями. В § Д5.5 было объяснено, почему в экономических моделях мы всегда рассматриваем матрицы с различными характеристическими корнями.

Приведенные выше уравнения можно рассматривать как векторные уравнения или как системы совместных скалярных уравнений. Здесь мы рассмотрим их как векторные уравнения.

Вначале рассмотрим разностное уравнение (2). Его можно записать в форме

$$y(t+1) - y(t) - Ay(t) = 0,$$

или

$$y(t+1) = (I + A)\, y(t). \tag{Д10.5.1}$$

Возьмем произвольный вектор $y(0)$. Тогда это уравнение можно решить итеративно:

$$y(1) = (I + A)\, y(0),$$
$$y(2) = (I + A)\, y(1) = (I + A)^2\, y(0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y(t) = (I + A)^t\, y(0). \tag{Д10.5.2}$$

Это решение записано в форме, аналогичной той, в которой было записано решение скалярного уравнения, но его удобно выразить и в некоторой другой форме.

Поскольку характеристические корни матрицы A различны, а корни матрицы $(I + A)$ равны $1 + \lambda_i$, где λ_i — корни матрицы A, то матрицу $(I + A)^t$ можно диагонализировать. Сделаем это следующим образом:

$$V^{-1}(I + A)^t\, U^{-1} = \Lambda^t,$$

откуда

$$(I + A)^t = V\Lambda^t U,$$

где V — матрица собственных вектор-столбцов (правые собственные векторы) матрицы A (матрицы A и $I+A$ имеют одинаковые собственные векторы); U — матрица собственных вектор-строк (левые собственные векторы) матрицы A, а Λ — диагональная матрица с элементами $1+\lambda_i$ на диагонали, где λ_i — характеристические корни матрицы A.

Подставляя (Д10.5.2) в решение, получаем

$$y(t) = V\Lambda^t U y(0).$$

Сделаем замену $k = Uy(0)$. Так как начальный вектор произвольный, то k является произвольным вектором. Тогда

$$y(t) = V\Lambda^t k.$$

Рассмотрим теперь матрицу $V\Lambda^t$. Поскольку матрица V умножается справа на диагональную матрицу Λ^t, то это означает, что j-й столбец матрицы V умножается на j-й диагональный элемент $(1+\lambda_j)^t$. Но j-й столбец матрицы V равен собственному вектор-столбцу v^j матрицы A, так что j-й столбец матрицы $V\Lambda^t$ равен $(1+\lambda_j)^t v^j$.

Таким образом, решение уравнения (2) можно записать в форме

$$y(t) = \sum_j k_j (1+\lambda_j)^t v^j. \qquad (Д10.5.3)$$

Вектор решения $y(t)$ является, таким образом, линейной комбинацией n линейно независимых векторов v^j с коэффициентами, зависящими от t. При действительных λ_j, каждый из коэффициентов $k_j(1+\lambda_j)^t$ совпадает с решением скалярного уравнения первого порядка.

Если корень λ_j комплексный, то он образует сопряженную пару с некоторым другим характеристическим корнем (поскольку матрица A действительная). Пусть λ_{j+1} является сопряженным к характеристическому корню λ_j. Соответствующие собственные векторы также являются комплексно-сопряженными. Рассуждая таким же образом, как мы это делали в случае скалярного уравнения, приходим к выводу, что соответствующие постоянные k_j и k_{j+1} также должны быть комплексно-сопряженными.

Таким образом, имеем в качестве компоненты решения сумму

$$k_j(1+\lambda_j)^t v^j + k_{j+1}(1+\lambda_{j+1})^t v^{j+1} =$$
$$= k(1+\lambda)^t v + k^*[(1+\lambda)^t]^* v^*,$$

где $k = k_j$, $\lambda = \lambda_j$, $v = v^j$.

Положим $v = u + iw$, где u — вектор действительных частей компонент вектора v, а w — вектор мнимых частей тех же компонент. Подобно тому, как это делалось в предыдущем параграфе, можно показать, что соответствующую составляющую решения можно представить в виде

$$k\rho^t \{[\cos(\omega t + \varphi)]\, u - [\sin(\omega t + \varphi)]\, w\}, \qquad (Д10.5.4)$$

где $\rho = |1 + \lambda|$.

Таким образом, решение векторного разностного уравнения есть взвешенная сумма собственных векторов (или, в случае комплексных векторов, взвешенная сумма векторов, полученных из собственных векторов). Эти векторы (которые являются линейно независимыми) можно рассматривать как базис. Весовые коэффициенты определяются произвольной постоянной и функцией $(1 + \lambda_j)^t$, составляющая решения, связанная с v^j, зависит от поведения $(1 + \lambda_j)^t$. Очевидно, что собственный вектор, связанный с корнем, имеющим наибольшее по модулю значение, будет доминировать в решении при больших t, какие бы ни были начальные условия. Очевидно также, что собственный вектор, связанный с корнем, для которого $|1 + \lambda| < 1$, должен оказывать пренебрежимо малое влияние на решение, когда t становится большим. Таким образом, при возрастании t решение будет приближаться к вектору, пропорциональному тому, который соответствует наибольшему по модулю характеристическому корню.

Рассмотрим теперь существование равновесного решения уравнения

$$\Delta y(t) - Ay(t) = c. \qquad (2а)$$

Легко видеть, что постоянный вектор y^* является частным решением, если

$$y^* = -A^{-1}c. \qquad (Д10.5.5)$$

Такое решение всегда существует, если матрица A невырожденная, что мы будем предполагать.

Таким образом, векторное (как и скалярное) разностное уравнение, вообще говоря, обладает *равновесным решением* (которое в случае однородного уравнения равно $y^* = 0$). Очевидно, что решение уравнения (2a) будет сходиться к y^*, т. е. оно будет *устойчивым*, если *все* составляющие решения (Д10.5.3) однородного уравнения стремятся к нулю при $t \to \infty$. Поведение каждой отдельной составляющей решения (или пары составляющих в случае комплексных корней) подобно поведению решения скалярного разностного уравнения первого или второго порядка, которые рассматривались в § Д10.3 и Д10.4, так что:

Разностное уравнение (2) *устойчиво тогда и только тогда, когда каждый корень матрицы A удовлетворяет условию* $|1 + \lambda_j| < 1$.

Точное описание поведения решения векторного уравнения сложно. Функция $y(t)$ является линейной комбинацией базисных векторов с весами, меняющимися во времени. Некоторые веса могут быть монотонно возрастающими или монотонно убывающими, некоторые чередующимися, некоторые колеблющимися. Обычно интерес вызывают только общие свойства решений. Например, какой собственный вектор является доминирующим, сходится ли решение к равновесному, и т. д.

Вернемся теперь к векторному дифференциальному уравнению (1). Поскольку функция $e^{\lambda t}$ была решением эквивалентного скалярного уравнения, то можно ожидать, что матрица e^{tA} является решением векторного уравнения. Исследуем это предположение. Из определения e^{tA} имеем:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!} t^2A^2 + \frac{1}{3!} t^3A^3 + \dots$$

Дифференцируя по t, получаем

$$De^{tA} = A + tA^2 + \frac{1}{2!} t^2A^3 + \dots =$$

$$= A\left(I + tA + \frac{1}{2!} t^2A^2 + \dots\right) = Ae^{tA}.$$

Положим $y(t) = e^{tA}z$, где z — неопределенный постоянный вектор, и подставим эту функцию в (1). Имеем

$$De^{tA}z - Ae^{tA}z = Ae^{tA}z - Ae^{tA}z \equiv 0,$$

так что $y(t) = e^{tA}z$ действительно является решением уравнения (1) для всех векторов z. Если положим $t=0$, то $y(0) = z$. Поэтому общее решение однородного векторного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y(t) = e^{tA}y(0). \qquad (Д10.5.6)$$

Очевидно, что это решение связано с решением скалярного дифференциального уравнения точно так же, как решение (Д10.5.2) векторного разностного уравнения связано с решением эквивалентного скалярного уравнения.

Матрицу e^{tA}, как и в случае разностного уравнения, можно диагонализировать.

Получим

$$y(t) = Ve^{\Lambda t}Uy(0).$$

Полагая $Uy(0) = k$, как раньше, и замечая, что $e^{\Lambda t}$ является диагональной матрицей с элементами $e^{\lambda_j t}$ на диагонали, можно представить решение в форме

$$y(t) = \sum_j k_j e^{\lambda_j t} v^j. \qquad (Д10.5.7)$$

Анализ этого решения совершенно аналогичен анализу решения разностного уравнения. Помимо других выводов, которые могут быть перенесены на случай дифференциальных уравнений, получаем следующий:

Дифференциальное уравнение (1) *устойчиво тогда и только тогда, когда каждый характеристический корень матрицы* A *удовлетворяет условию* $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$.

Матрицу, все характеристические корни которой имеют отрицательную действительную часть, часто называют *устойчивой матрицей*, или *матрицей устойчивости*.

Заметим, что такая матрица является устойчивой только для *дифференциального* уравнения. Для разностного уравнения, как мы показывали раньше в случае скалярного уравнения, это условие является *необходимым, но не достаточным*.

Рассмотрим теперь вопрос, представляющий интерес для теории роста. Исследуем однородное уравнение с заданным начальным условием $y(0)$. Постоянный вектор k можно записать в виде $k = Uy(0)$.

Пусть $y(0)$ пропорционален j-му собственному вектору, который мы предполагаем действительным. Без потери общности можно предположить, что $y(0) = v^j$, поскольку постоянный множитель не влияет на анализ. Перепишем равенство $k = Uv^j$ в форме

$$k_i = u_i v^j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Каждая строка u_i матрицы U является собственным вектором-строкой матрицы A. Далее, собственные вектор-строка и вектор-столбец ортогональны (см. § Д5.10), поэтому $u_i v^j = 0$, если $i \neq j$ и $u_j v^j = 1$. Таким образом, постоянный вектор k состоит целиком из нулей, за исключением компоненты $k_j = 1$. Это означает, что решения дифференциального и разностного уравнений имеют специальный вид:

$y(t) = e^{\lambda_j t} y(0)$ (в случае дифференциального уравнения),

$y(t) = (1 + \lambda_j)^t y(0)$ (в случае разностного уравнения).

Таким образом, мы можем утверждать, что справедлив следующий важный в теории роста результат:

Поведение решения векторного дифференциального или разностного уравнения первого порядка определено единственным образом данным характеристическим корнем λ_j в том и только в том случае, когда начальное условие представлено вектором, пропорциональным собственному вектору v^j, соответствующему корню λ_j. В этом случае решение $y(t)$ будет оставаться вектором, пропорциональным вектору $y(0)$ для всех значений t.

Д10.6. СВЕДЕНИЕ К ВЕКТОРНОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейное однородное скалярное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$D^n y(t) + a_1 D^{n-1} y(t) + \ldots + a_n y(t) = 0,$$

которое мы будем записывать в форме

$$D^n y(t) = -a_1 D^{n-1} y(t) - \ldots - a_n y(t).$$

Далее определим n переменных $z_i(t)$ следующим образом:

$$z_1(t) = y(t),$$
$$z_2(t) = Dy(t) = Dz_1(t),$$

$$\dot z_3(t) = D^2 y(t) = Dz_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n(t) = D^{n-1} y(t) = Dz_{n-1}(t).$$

Тогда приведенное выше дифференциальное уравнение эквивалентно n уравнениям:

$$\begin{aligned}
Dz_1(t) &= z_2(t),\\
Dz_2(t) &= \quad z_3(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Dz_{n-1}(t) &= \qquad\qquad z_n(t),\\
Dz_n(t) &= -a_n z_1(t) - a_{n-1} z_2(t) - \ldots - a_1 z_n(t)\ ^{*}).
\end{aligned}$$

Если рассматривать z_i как компоненты вектора $z(t)$, то можно записать эти уравнения в виде

$$Dz(t) = Az(t)$$

или

$$Dz(t) - Az(t) = 0,$$

где A — следующая матрица:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\
-a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1
\end{bmatrix},$$

или

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-\hat a} \end{array}\right].$$

В разбиении матрицы: $\hat a$ — вектор (строка) коэффициентов исходного скалярного уравнения, I — единичная матрица порядка $(n-1)\times(n-1)$, а 0 — столбец, состоящий из $(n-1)$-го нуля.

Таким образом, линейное скалярное уравнение n-го порядка можно преобразовать в линейное векторное урав-

---

*) Очевидно, $D^n y(t) = D[D^{n-1} y(t)] = Dz_n(t)$. Соотношение $z_1(t) = y(t)$ не используется, так как функция $y(t)$ точно не определена, а обозначение ее через $z_1(t)$ является лишь изменением в названии.

нение первого порядка с n-мерными векторами. Поэтому теория скалярных уравнений n-го порядка дается параллельно с теорией векторных уравнений первого порядка.

Можно также провести обратный процесс, т. е. преобразовать векторное уравнение в скалярное уравнение n-го порядка, поскольку любую матрицу можно преобразовать к виду, в котором задана матрица A.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что линейное *векторное* уравнение m-го порядка можно свести к векторному уравнению *первого порядка*, но с векторами размерности mn, где n — размерность векторов в исходном уравнении.

Хотя анализ был проведен только для дифференциального уравнения, легко видеть, что точно такие же соотношения справедливы и для разностных уравнений.

Д10.7. ЗАМЕЧАНИЕ О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ

Для неоднородного дифференциального или разностного уравнения

$$Dy(t) - Ay(t) = F(t),$$
$$\Delta y(t) - Ay(t) = F(t),$$

где $F(t)$ — произвольная вектор-функция, всегда можно найти частное решение, хотя получить его в явном виде может быть не легко.

Случай $F(t) = c$ уже рассмотрен.

Естественно предположить, что легко получить частное решение неоднородного дифференциального или разностного уравнения, для которого $F(t)$ имеет форму решения однородного уравнения, а именно, $e^{\beta t}c$ для дифференциального уравнения и $(1+\beta)^t c$ для разностного, где c — постоянный вектор. Эти формы являются в некотором смысле «естественными» для уравнений, с которыми они связаны.

Положим $y(t) = e^{\beta t}c$ в левой части дифференциального уравнения и посмотрим, к чему это приведет. Имеем

$$D(e^{\beta t}c) - e^{\beta t}Ac = \beta e^{\beta t}c - e^{\beta t}Ac = e^{\beta t}(\beta I - A)c.$$

Таким образом, если $F(t) = e^{\beta t}(\beta I - A)c$, то $y(t) = e^{\beta t}c$ является частным решением. Следовательно, если $F(t) = e^{\beta t}b$, то частным решением должна быть функция

$e^{\beta t}c$, где $b = (\beta I - A)\, c$. Как следствие, можно непосредственно установить следующее утверждение:

Если $F(t) = e^{\beta t}b$, то дифференциальное уравнение имеет своим частным решением функцию $y(t) = e^{\beta t}(\beta I - A)^{-1}\, b$, если только β не является характеристическим корнем матрицы A.

Последнее условие является необходимым для обеспечения невырожденности матрицы $(\beta I - A)$. Если β является характеристическим корнем матрицы A, то соответствующее частное решение уже включено в общее решение однородного уравнения.

В случае разностного уравнения можно применить те же самые рассуждения относительно решения в форме $(1 + \beta)^t$ и прийти к аналогичному заключению:

Если $F(t) = (1 + \beta)^t\, b$, то неоднородное уравнение имеет своим частным решением $y(t) = (1 + \beta)^t (\beta I - A)^{-1}\, b$, если только β не является характеристическим корнем матрицы A.

Приведенные выше формы функции $F(t)$ и соответствующие им простые частные решения удовлетворяют многим требованиям в экономических моделях. Большинство сложных функций $F(t)$, с которыми приходится иметь дело в экономической теории, часто могут быть аппроксимированы линейной комбинацией приведенных выше форм. Так как уравнения линейны, то частным решением линейной комбинации является линейная комбинация частных решений.

Упражнения

Для простоты вместо $y(t)$ мы пишем y.

1. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

найдите:

а) решение уравнения $Dy - Ay = 0$;

б) решение уравнения $\Delta y - Ay = 0$.

2. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет комплексные корни. Выразите в обеих стандартных формах и в терминах тригонометрических функций с действительными параметрами решения уравнений:

а) $Dy - Ay = 0$;

б) $\Delta y - Ay = 0$.

Исследуйте устойчивость уравнений а) и б).

3. Используя метод § Д10.6, сведите дифференциальное уравнение третьего порядка

$$D^3y - 6D^2y + 11Dy - 6y = 0$$

к векторному уравнению первого порядка. Дано, что один корень матрицы системы равен единице. Покажите, что другие корни также действительны и положительны.

4. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найдите решение уравнения $Dy = Ay$, которое удовлетворяет начальному условию $y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. Найдите общее решение уравнения

$$Dy - Ay = b,$$

где $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, а A—матрица из упражнения 2.

ДОПОЛНЕНИЕ Д11

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материал этого дополнения, основанный на принципах вариационного исчисления, необходим для § 11.6. Для информации читателя даны краткие замечания по другим вопросам, в частности, по принципу максимума Понтрягина. Предполагается знакомство с материалом предыдущих дополнений, а также с общей теорией оптимизации и с элементарным интегральным исчислением.

Д11.1. ОПТИМИЗАЦИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

Как отмечалось в примечании к гл. 2, точку можно рассматривать как функцию ее индексов, определенных нумерацией. Если число индексов становится очень большим, то вектор можно записывать в функциональной форме $x(t)$, $t = 1, \ldots, n$, и, таким образом, рассматривать функцию $x(t)$ от непрерывной переменной t как бесконечномерный аналог точки.

Пусть задана точка x, определенная на некотором множестве S. Правило, ставящее в соответствие каждому $x \in S$ действительное число, есть *функция*. Если $x(t)$ сама является функцией некоторого класса функций C, то правило, ставящее в соответствие каждой функции из C действительное число, называется *функционалом* *). Определим интеграл

$$J = \int_a^b x(t)\,dt.$$

Значение интеграла, т. е. действительное число, ставится в соответствие каждой вещественной интегрируемой

*) Термин «функционал», так же как и термин «функция», используется иногда в более широком смысле, чем здесь.

функции, и, следовательно, интеграл является функционалом. Для наших целей интеграл является очень важным функционалом.

Оптимизация с бесконечным числом переменных является, таким образом, задачей, в которой неизвестной служит не точка, а функция, а оптимизируемым объектом — функционал, который в этом дополнении будем рассматривать в форме интеграла. Классической задачей подобного типа является задача вариационного исчисления. К оптимизации функционалов, не поддающихся классическому вариационному исчислению, существуют и другие подходы. В этом дополнении мы исследуем элементы вариационного исчисления, а также принцип максимума Понтрягина.

Как и в случае дифференциальных уравнений, проблемы, которые мы здесь затрагиваем, очень широки и по ним имеется обширная библиография. Здесь представлены лишь стержневые вопросы. Доказательства приведены только для основных результатов вариационного исчисления.

Д11.2. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ *)

Простейшая задача вариационного исчисления (которую часто называют *первой*, или *фундаментальной*, задачей вариационного исчисления) заключается в нахождении минимума или максимума интеграла вида **)

$$J = \int_a^b F(x, \dot{x}, t)\,dt,$$

где x — неизвестная функция от t, вид функции F, а также начальная и конечная точки — заданы. Функция

---

*) Элементы вариационного исчисления содержатся в книге Аллена [1]. Для детального изучения методов классического вариационного исчисления следует обратиться к работе Эльсгольца.

**) Присутствие $\dot{x}$ (это обозначение используется здесь вместо Dx) как аргумента функции F означает, что значение интеграла зависит от *траектории* из a в b. Если $\dot{x}$ не содержится в интеграле (или в ограничениях в случае задачи управления, которая рассматривается в § Д11.4), то интеграл зависит только от значений первообразной функции в начальной и конечной точках и задача становится обычной задачей оптимизации.

$x(t)$ может быть скалярной или вектор-функцией. Первоначально будем предполагать $x(t)$ скалярной функцией, принадлежащей классу C^2. Основным результатом в этом случае является следующий.

Для того чтобы функция $x(t)$ обращала интеграл

$$J=\int_a^b F(x, \dot{x}, t)\,dt$$

в минимум или максимум, необходимо, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению Эйлера *)

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0.$$

Функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению Эйлера, называется *экстремалью*.

Мы докажем этот результат классическим методом (или методом *Эйлера — Лагранжа*). Рассуждения, обычные для задачи оптимизации, используют тот факт, что «малые» изменения $x(t)$ в экстремальной точке должны увеличивать значение интеграла (предполагается, что мы ищем минимум). Если x — точка, то вариация x означает произвольное смещение из этой точки. Поскольку $x(t)$ является функцией, то мы рассматриваем вариации в виде

$$z(t)=x(t)+\varepsilon\eta(t),$$

где $\eta(t)$ — произвольная функция того же класса, что и $x(t)$ (т. е. C^2), а ε — число, не зависящее от x, t, η. Так как пределы интегрирования фиксированы, то должны выполняться равенства $\eta(a)=\eta(b)=0$. Функцию $x(t)$ можно рассматривать как дугу, соединяющую точки a и b. Функции $z(t)$ можно рассматривать как произвольные гладкие деформации дуги $x(t)$, которые оставляют конечные точки на месте.

Рассматриваемый функционал для функции $z(t)$ принимает вид

$$J(z)=\int_a^b F(z, \dot{z}, t)\,dt,$$

*) F_x и $F_{\dot{x}}$ являются частными производными функции F относительно x и $\dot{x}$ соответственно. Здесь эти переменные считаются независимыми друг от друга и от t.

где $\dot{z} = \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}$. Предположим, что $x(t)$ — оптимальная функция, $\eta(t)$ — произвольная фиксированная функция, а ε — переменный параметр. Тогда $J(z)$ является функцией от ε. Замечая, что мы можем дифференцировать под знаком интеграла и что z и $\dot{z}$ являются функциями от ε, производные которых равны η и $\dot{\eta}$ соответственно, имеем

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b (\eta F_z + \dot{\eta} F_{\dot{z}})\, dt.$$

Поскольку $x(t)$ оптимальная, то J должен достигать своего минимального значения в точке $\varepsilon = 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{dJ}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

При $\varepsilon = 0$

$$z = x, \quad \dot{z} = \dot{x},$$

так что, если $x(t)$ оптимальная, то должно выполняться равенство

$$\int_a^b (\eta F_x + \dot{\eta} F_{\dot{x}})\, dt = 0.$$

Таким образом, необходимым условием оптимальности является следующее:

$$0 = \int_a^b (\eta F_x + \dot{\eta} F_{\dot{x}})\, dt = \int_a^b \eta F_x\, dt + \int_a^b \dot{\eta} F_{\dot{x}}\, dt =$$

$$= \int_a^b \eta F_x\, dt + [\eta F_{\dot{x}}]_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})\, dt.$$

Последнее равенство получено интегрированием по частям интеграла $\int_a^b \dot{\eta} F_{\dot{x}}\, dt$. Далее, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, поэтому второе слагаемое в последнем выражении обращается в нуль, а условие принимает следующий вид:

$$\int_a^b \eta \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right] dt = 0.$$

Это равенство должно быть справедливым для любой функции η. Понятно, что если выражение, стоящее в скобках, будет отличным от нуля, скажем, положительным в некоторой области, то можно выбрать такую допустимую функцию η, которая положительна в той же области и равна нулю всюду вне ее. Тогда интеграл будет принимать положительное значение. Следовательно, выражение в скобках должно быть равно нулю при всех t. Это приводит к следующему *уравнению Эйлера*:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0.$$

Если развернуть выражение для $\frac{d}{dt} F_{\dot{x}}$, то получим полную форму уравнения Эйлера

$$F_x - F_{\dot{x}t} - \dot{x} F_{\dot{x}x} - \ddot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} = 0.$$

Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Вообще говоря, нельзя ожидать, что такое уравнение может быть решено. Однако существуют два специальных случая, в которых уравнение Эйлера можно непосредственно свести к уравнению первого порядка.

а) Функция F не содержит явно x. В этом случае $F_x = 0$, так что уравнение Эйлера имеет непосредственно первый интеграл

$$F_{\dot{x}} = C.$$

б) Функция F не содержит явно t *). Это очень важный случай. Непосредственно процедура не очевидна. Однако имеем

$$\frac{d}{dt} F = \dot{x} F_x + \ddot{x} F_{\dot{x}} \quad (\text{так как } F_t = 0)$$

и

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} F_{\dot{x}}) = \ddot{x} F_{\dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}},$$

так что

$$\frac{d}{dt} [F - \dot{x} F_{\dot{x}}] = \dot{x} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} \right].$$

---

*) Этот случай имеет непосредственное отношение к материалу § 11.6 гл. 11.

Таким образом, уравнение Эйлера приводит к тому, что выражение в левой части последнего равенства равно нулю. Отсюда непосредственно следует первый интеграл

$$F - \dot{x} F_{\dot{x}} = C.$$

Даже если нельзя проинтегрировать уравнения первого порядка, полученные в случаях (а) и (б), мы можем выяснить многое относительно характера траектории $x(t)$, особенно в тех случаях, когда удается разрешить уравнение явно относительно $\dot{x}$. Такой пример приведен в § 11.6.

До сих пор мы предполагали, что $x(t)$ — скалярная функция. Пусть теперь $x(t)$ — вектор-функция. Очевидно, что если мы зафиксируем все координаты вектор-функции, кроме i-й, на оптимальном уровне, то скалярная функция $x_i(t)$ должна удовлетворять тем же условиям относительно вариаций, как если бы она была единственной варьируемой функцией. Таким образом, имеем:

Пусть x является n-мерной вектор-функцией переменного t. Тогда уравнение Эйлера заменяется n уравнениями *)

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Д11.3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ **)

а) Интегральные ограничения. Предположим, что мы имеем задачу

$$\min(\max) J = \int_a^b F(x, \dot{x}, t)\, dt$$

при условиях

$$I_k = \int_a^b G^k(x, \dot{x}, t)\, dt + c_k \leq 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Обобщая естественным образом основные методы вариационного исчисления, можно показать, что:

*) В модели непрерывного во времени роста эта форма уравнения Эйлера является аналогом условий межвременной производительности данных в § 11.6 гл. 11. См. Самуэльсон [4].

**) Этот параграф представляет собой краткий обзор некоторых обобщений классической вариационной задачи.

i) Уравнение (или уравнения, если $x(t)$ — вектор-функция) Эйлера имеет ту же форму, что и в случае задачи на безусловный оптимум интеграла с подынтегральной функцией

$$\varphi(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x}, t) - \sum_k \lambda_k G^k(x, \dot{x}, t),$$

где λ_k — множители Лагранжа.

ii) $\lambda_k = 0$ для всех k, для которых $I_k < 0$.

Аналогия между этими результатами и утверждениями классической статической оптимизации очевидна. Задачи вариационного исчисления с интегральными ограничениями часто называют *изопериметрическими задачами* (первая такая задача заключалась в нахождении фигуры максимальной площади с заданным периметром).

б) Переменные пределы интегрирования. Такая задача появляется тогда, когда нужно оптимизировать интеграл вдоль траектории, которая оканчивается не в фиксированной точке, а в любой точке заданной поверхности. В экономических примерах может возникнуть необходимость минимизировать время, за которое экономическая система достигнет некоторой поверхности с постоянным значением линейной формы $\sum_i p_i x_i = c$, а не какого-либо фиксированного состояния.

Можно показать, что если ограничения в конце траектории заданы в форме $g(x) = 0$, то оптимальная траектория $x(t)$ должна удовлетворять обычным уравнениям Эйлера и в дополнение к ним условиям $F_{\dot{x}_i}/g_{x_i} = F_{\dot{x}_j}/g_{x_j}$ для всех i и j в конечный момент времени. Эти условия часто называют *условиями трансверсальности*. Такие же условия должны выполняться в начальный момент времени, если фиксирован конечный момент, а начальная точка переменная, или если оба предела интегрирования являются переменными.

в) Кусочно-гладкие траектории. В предыдущем параграфе мы требовали, чтобы $x(t) \in C^2$, т. е. чтобы траектория $x(t)$ была гладкой (без изломов). Используя различные методы доказательства, можно расширить класс допустимых функций и включить в них кусочно-гладкие траектории. Вычисления $\ddot{x}$ можно избежать, записывая уравнение Эйлера в *интегральной форме*

$$F_{\dot{x}} = \int_a^T F_x\,dt + c$$

для всех T вдоль $x(t)$.

Траектория, которая удовлетворяет уравнению Эйлера в интегральной форме и в дополнение к этому в каждой точке излома *условию Вейерштрасса*

$$E(x, \dot{x}, u, t) = F(x, u, t) - F(x, \dot{x}, t) - (u - \dot{x}) F_{\dot{x}} \geqq 0,$$

определяется как потенциальная оптимальная траектория. Условие Вейерштрасса гарантирует, что нельзя найти лучшую траекторию, выбирая произвольный угловой коэффициент u вместо $\dot{x}$. Вдоль оптимальных кусочно-гладких траекторий $x(t)$ функции

$$F_{\dot{x}} \quad \text{и} \quad F - \dot{x}F_{\dot{x}}$$

непрерывны всюду, включая и точки излома.

г) Условия второго порядка и другие условия. Ни одно из приведенных условий не делает различия между задачами на максимум и минимум. Обычно из содержательной постановки задачи ясно, существует ли минимум или максимум. В некоторых задачах можно применить критерии, определяемые условиями *Лежандра* и *Якоби*. Первое из них аналогично условию второго порядка в обычных задачах на оптимум, второе является специальным условием, которое, например, исключает объезд земного шара в восточном направлении, как оптимальный путь из Нью-Йорка в Сан-Франциско (кругосветные маршруты как в восточном, так и в западном направлении удовлетворяют всем остальным условиям оптимальности).

д) Производные более высокого порядка. Пусть подынтегральная функция функционала J задана в форме

$$F(x, Dx, D^2x, \ldots, D^nx, t).$$

Используя методы, сводящие дифференциальное уравнение n-го порядка к векторному уравнению первого порядка (§ Д10.6 предыдущего дополнения), получим F

как функцию вектора x и его первой производной. Таким образом, приходим к обычной задаче вариационного исчисления.

Д11.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ *)

В классическом вариационном исчислении динамическая особенность задачи была явным образом включена в подынтегральную функцию, которая зависела как от x, так и от $\dot{x}$. В этом параграфе мы будем иметь дело с задачей оптимизации интеграла вида

$$\int_a^b F(y)\,dt,$$

в котором $\dot{y}$ явно не содержится. Динамическая особенность такой задачи проявляется в характере отдельных ограничений, имеющих вид

$$\dot{y}_i = f^i(y), \quad i = 1, \ldots, n.$$

На некоторые переменные можно не накладывать динамических ограничений. В задаче могут быть также статические ограничения (т. е. произвольные ограничения, не содержащие производных по времени).

Этот общий тип задачи появляется в теории оптимального управления. Удобно разделять переменные на два множества: x_i, на которые наложены динамические ограничения (в теории управления их называют *фазовыми координатами*), и u_j, на которые наложены статические ограничения (их называют *управлением*). Обозначим n-мерный вектор фазовых координат через x, а m-мерный вектор управления через u. Можно формально сформулировать следующую задачу:

---

*) В книге не приводятся приложения метода Понтрягина. Краткое изложение, данное в этом параграфе, рассчитано главным образом на введение читателя в предмет. Полное изложение предмета содержится в книгах Понтрягина и Хестенса. (Работа Понтрягина и его соавторов в 1962 г. была удостоена Ленинской премии.)

См. также Болтянский. (*Прим. перев.*)

З а д а ч а у п р а в л е н и я

$$\min J = \int_a^b F(x, u)\,dt$$

при условиях

$$\dot{x}_i = f^i(x, u) \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$u \in U,$$

где U — допустимое множество управлений. Множество U может быть *любым* замкнутым ограниченным множеством в R^m. Функции f^i предполагаются достаточно гладкими.

Традиционно задача поставлена на минимум (хотя метод решения называют принципом максимума). Важно заметить, что нет никакой связи между числом фазовых координат и числом управлений (т. е. между n и m). Управления могут присутствовать в F или в любой заданной функции f^i, а могут и не присутствовать.

Хорошо известным подходом к анализу задач такого типа является *принцип максимума Понтрягина*, который был сформулирован следующим образом.

Пусть дана задача управления приведенного выше вида. Введем произвольную константу k и произвольные функции времени ψ_i, $i = 1, \ldots, n$ (их можно рассматривать как *динамические функции-множители* подобно множителям Лагранжа в статических задачах). Образуем функцию *Гамильтона*

$$H(\psi, x, u) = kF(x, u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(x, u).$$

Функция H имеет частные производные

$$H_{\psi_i} = f^i,$$

$$H_{x_j} = kF_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i_{x_j}.$$

Тогда для того чтобы функции $x(t)$, $u(t)$ были решением задачи управления, необходимо, чтобы:

а) *Функции ψ_j удовлетворяли дифференциальным уравнениям*

$$\dot{\psi}_j = -H_{x_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

б) Функции $u(t)$ удовлетворяли условию

$$H(\psi(t),\ x(t),\ u(t)) = \max_{v \in U} H(\psi(t),\ x(t),\ v(t)).$$

Если $x(t)$, $u(t)$ являются оптимальными, то:

(i) $k \leqq 0$,

(ii) $H(\psi(t),\ x(t),\ u(t)) = 0$ *для всех t* *).

Приведенный метод можно различными способами использовать в экономических приложениях (см. § 11.1).

Можно сформулировать более общий принцип максимума, чтобы включить интегральные и статические ограничения на фазовые координаты.

Как и в классическом вариационном исчислении, решение уравнений (а) может оказаться трудоемким или практически невыполнимым. Однако в литературе рассмотрен ряд случаев (в частности, при которых функции f^i линейны), когда уравнения (а) могут быть решены.

---

*) Собственно принцип максимума Понтрягина определяется пунктами а) и б) (см. книгу Понтрягина, гл. 1). Приведенная здесь формулировка является несколько упрощенной.

ЮДИН Д. Б.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Наша страна — первое в истории государство, строящее экономику сознательно в плановом порядке. Развитие производительных сил, разделение труда и усложнение экономических связей быстро увеличивают потоки экономической информации, усложняют методы ее обработки и использования для планирования народного хозяйства. Социалистическая экономика располагает неисчерпаемыми ресурсами и возможностями для неуклонного роста. Важнейшая задача экономической науки — разработка эффективных путей превращения ресурсов и возможностей в реальную материально-техническую базу коммунизма. Решение этой задачи немыслимо без использования достижений современной математики и техники для того, чтобы на основе законов марксистско-ленинской политэкономии совершенствовать механизмы управления производством, отраслями и народным хозяйством в целом.

Современный кибернетический подход к экономике связан с изучением производства, отрасли и народного хозяйства как «сложных систем».

Сложная система — это множество взаимодействующих элементов, образующих нераздельное целое, в котором невозможно проследить причинно-следственные связи, определяющие поведение каждого подмножества элементов. Примеры сложных систем: цифровая вычислительная машина, мозг, армия, живой организм, промышленное предприятие, отрасль хозяйства.

Сложная система, имеющая внутренний запас энергии или пополняемая энергией извне, находится в непрерывном движении. Сложные системы могут развиваться по своим внутренним законам, определяемым воздействием среды и спецификой элементов и связей. Устойчивые системы стремятся сохранить свою структуру и упрочить свои связи. Поведением сложных систем можно также управлять. Управление системой сводится к изменению связей и характера взаимодействия элементов, при котором динамика системы (ее последующая самоорганизация) обеспечивает достижение поставленной цели или приближение к ней. При этом, естественно, предполагается, что цель управления, которая может, вообще говоря, деформироваться во времени, не расходится с потенциальными возможностями системы.

Разрабатываемая в настоящее время теория сложных систем изучает внутренние закономерности развития систем в зависимости от исходной структуры и характеристик элементов и их взаимодействия. Основная задача теории сложных систем — разработка методов управления, позволяющих менять поведение систем в заданном направлении. Рациональные направления развития технических систем автоматического регулирования задаются потребностями производства. Направления развития военных систем определяются военными доктринами. Направления совершенствования экономических систем определяются социальными установками и исходящими из них экономическими теориями, а для социалистической экономической системы разрабатываются марксистско-ленинской экономической наукой.

Народное хозяйство страны представляет собой самую сложную динамическую систему из всех систем, которые когда-либо приходилось рассматривать в науке и технике.

Экономическая система объединяет ряд взаимодействующих между собой подсистем — отраслевых, территориальных и функциональных (трудовые ресурсы, финансы, материально-техническое снабжение и др.). Взаимная обусловленность этих подсистем приводит к тому, что любое изменение в одной из них вызывает изменение в ряде других звеньев. Устойчивое целеустремленное управление народным хозяйством может быть обеспечено лишь в том случае, если все его подсистемы рассматривать как единое целое.

Планирование народного хозяйства и управление экономикой всегда производятся в условиях недостаточной информации о будущем поведении системы. Технический и научный прогресс, общественные взаимоотношения и международная обстановка приводят к непрестанному изменению структуры народного хозяйства. Возникают новые предприятия и отрасли, свертываются устаревшие, меняется технология производства, а вместе с ней и нормы, и структура затрат. Помимо предусмотренных планом воздействий на экономику оказывают влияние и различные случайные факторы.

Система управления экономикой должна быть достаточно чувствительной, чтобы своевременно реагировать на научные и технические достижения, и достаточно инерционной, чтобы противостоять случайным возмущениям. Структура управления народным хозяйством, как и контур управления систем автоматического регулирования, определяет реакцию системы на непредусмотренные воздействия. И в том и в другом случае рациональный выбор обратных связей обеспечивает устойчивое целеустремленное поведение системы.

Обратная связь — необходимый элемент саморегулирования системы: входы отдельных звеньев и вход всей системы так подстраиваются выходными сигналами, чтобы обеспечить соответствие динамики системы заранее заданным характеристикам.

При наличии достаточного количества ресурсов для достижения поставленной цели система управления с рационально введенными обратными связями не может не справляться с возложенными на нее задачами. Отклонение поведения системы от желаемого вызывает появление управляющего воздействия, возвращающего систему на запланированную траекторию.

Экономические рычаги и методы материального стимулирования представляют собой наиболее простую и гибкую реализацию принципа обратной связи в управлении народным хозяйством.

Динамические качества экономики как сложной системы определяются глубиной обратной связи — соотношением между экономическими и административными методами управления.

Современная экономика объединяет сотни отраслей, тысячи предприятий, взаимно переплетающиеся и сросшиеся в один огромный производственный механизм. Промышленность СССР объединяет в настоящее время около 50 000 предприятий. Номенклатура продуктов и.количества ограничений балансовых, технологических и других, выражаются шести — семизначными числами. Это значит, что полностью централизованное планирование экономики и управление народным хозяйством при всех своих достоинствах физически нереализуемо ни при современных ЦВМ, ни при перспективных вычислительных машинах. Естественно сочетать централизованное управление с экономическими рычагами, определяемыми механизмом хозяйственного расчета и экономического стимулирования. Централизованное управление сохраняет роль глобального регулятора экономики. Роль локального регулятора производства передается экономическим рычагам.

Централизованное планирование форсирует научно-технический прогресс, обеспечивает учет социальных и политических факторов и гарантирует распределение ресурсов во имя максимального удовлетворения потребностей общества. Механизм хозяйственного расчета и экономического стимулирования, сфера действия которого определяется ограничениями, вытекающими из контрольных показателей централизованного плана, отслеживая неувязку между спросом и предложением, может быть основой производственного планирования и ценообразования. В зависимости от принятых ограничений социального и политического характера механизм экономических рычагов может быть реализован в самых различных вариантах. Лучшей следует признать такую реализацию, которая способствует оптимизации народно-хозяйственного критерия качества.

При централизованном, но многоступенчатом управлении каждое звено системы решает свою задачу, используя экономическую информацию с необходимой для него степенью детализации. Достижение согласованного плана требует многократного обмена укрупненной информацией между отдельными звеньями системы.

Заметим, что именно по таким принципам работают сложные кибернетические системы, прошедшие проверку временем. Так, например, организована нервная система, управляющая функциями живого организма. Сердечная деятельность, ритм дыхания, химический баланс системы пищеварения регулируются автономными системами. Только их взаимодействие, обеспечивающее выживание и целеустремленное поведение живого организма, координируется управляющими сигналами головного мозга.

Следовательно, централизованное управление экономикой обеспечивает оптимизацию критерия развития народного хозяйства и учет политических требований, а механизм хозяйственного расчета и экономического стимулирования призван поддерживать при этом устойчивый и сбалансированный рост экономической системы. Естественно, что в близких к практике моделях экономических систем нельзя ограничиваться двумя ступенями управления — централизованным и автономным. Система управления народным хозяйством — иерархическая многоступенчатая управляющая сеть. Разработка принципов организации и развития структуры управляющей сети и соотношения централизации и самостоятельности ее звеньев на различных этапах экономического развития — одна из важнейших задач, если не существо, экономической кибернетики.

Математическая экономика — раздел экономической кибернетики. Сложность народного хозяйства как объекта исследования определила ряд особенностей развития экономической науки в прошлом. Объективная трудность приложения точных методов к анализу чрезвычайно сложных социально-экономических отношений делала до определенного времени неизбежным развитие экономической теории как качественной науки. В настоящее время этот этап можно считать пройденным. Возможность и необходимость математизации экономики перестала быть предметом дискуссии.

Достижения марксистско-ленинской политической экономии, развитие математической экономики и вычислительной техники постепенно переводят экономическую науку в разряд точных наук. Математические методы внедряются во все разделы экономической науки от политико-экономического анализа и до методики планирования и управления предприятиями. Математика является не только формальным аппаратом исследования, она оказала и большое методологическое влияние на экономическую науку.

Применение математики в экономике заставило переосмыслить ряд экономических понятий и искать новые точки зрения на экономические процессы и явления. Новые экономические понятия, новые точки зрения на экономические процессы, новые подходы к анализу экономических взаимоотношений конструируются и исследуются на экономико-математических моделях. В современной экономико-кибернетической литературе используется большое количество таких моделей. Каждая модель дает приближенное описание того или иного аспекта экономического явления или процесса. При изучении экономических процессов имеют дело с различными проявлениями объективных закономерностей. Поэтому и в экономико-математических исследованиях необходимо иметь дело с различными типами моделей. Экономико-математические модели можно классифицировать по различным признакам. С точки зрения экономической теории в первую очередь представляют интерес макромодели экономики. Они достаточно грубы для непосредственного планирования и управления. Однако они позволяют просто и наглядно вскрывать основные механизмы, определяющие состояние и управляющие поведением экономических систем. С точки зрения экономической практики наибольший интерес представляют модели оптимального функционирования экономики — модели планирования конкретных отраслей, модели взаимодействия экономических подсистем, модели непосредственного управления производством.

Применение математики в экономике служит, таким образом, как познавательным целям, так и хозяйственной практике.

Трезво оценивая огромные потенциальные возможности математики и вычислительной техники для совершенствования экономической теории и практики планирования, не следует, однако, впадать в другую крайность. Ориентация на безграничные возможности математических методов, всемогущество математических машин таят в себе серьезные опасности. Четкие формальные определения, используемые для построения экономико-математических моделей, по необходимости обедняют изучаемые явления. Не для каждого класса задач могут быть составлены алгоритмы решения (имеются алгоритмически неразрешимые задачи), и, следовательно, не все задачи можно передавать вычислительной машине. Можно указать также алгоритмически разрешимые задачи управления и планирования, которые, тем не менее, не допускают рационального оперативного решения за приемлемое время не только на современных, но и на перспективных вычислительных машинах. Все это особенно важно иметь в виду сейчас, когда наша страна приступила к созданию автоматизированных систем управления предприятиями и отраслями и к разработке принципов объединения их в единую государственную систему управления народным хозяйством страны.

Выбор теоретических принципов и разработка практических путей управления экономикой предусматривают определение, учет и сопоставление оценок двух типов. Во-первых, для каждого из сравниваемых принципов управления необходимо оценить «сложность» алгоритмов (программ) управления и соответствующую сложность вычислений *). Во-вторых, необходимо оценить и учесть логические и физические ограничения и технические характеристики средств обработки информации и управления.

Обоснованный реалистический подход к современным и перспективным возможностям технического обеспечения новых принципов управления экономикой важен сам по себе для целеустремленной подготовки технической базы системы управления. Вместе с оценкой сложности задач управления такой подход окажет радикальное влияние на постановку и решение теоретических проблем экономики социализма, отделит возможное от желаемого, осуществимое от прожектерства. Так, оценка перспективных возможностей электронных вычислительных машин и средств связи и сопоставление их со сложностью алгоритмов и вычислений, подлежащих реализации, определяет целесообразное разделение функций между центром и местами, между человеком и машиной.

Предвидимая оценка сложности задач управления экономикой, трудоемкости математических методов экономического анализа и возможностей их технической реализации исключает так называемую «кнопочную экономику». Нет никаких оснований предполагать, что этот вывод изменится в обозримом будущем. Научно-технический прогресс приводит к расширению ассортимента изделий, к размножению связей между предприятиями, к росту темпов производства, к усложнению технологии и непрерывному обновлению производства. Можно предполагать, что с развитием экономической системы сложность задач управления растет гораздо быстрее формальных и технических возможностей решения этих задач. Поэтому роль экономической науки и ответственность руководителей со временем будут не уменьшаться, а существенно возрастут.

Механизм управления экономикой — отраслями и производством — сложная человеко-машинная система. Автоматизированные системы управления снимают с хозяйст-

---

*) Понятие «сложность» алгоритмов (программ) для заданного класса задач введено и исследовано А. Н. Колмогоровым. Понятие сложности вычислений при заданной программе (для машин последовательного и параллельного действия) изучал и оценивал Б. А. Трахтенброт.

венных руководителей сбор, накопление и обработку информации, рутинные расчеты, решение стандартных формализованных задач, а в последующем и логические выводы из принятых общих принципов. Построение новых понятий, выявление новых закономерностей и принципов, формулировка новых целей, постановка новых задач, учет неформализуемых факторов и выбор решений на основе подготовленных машиной вариантов остаются за человеком.

Чрезвычайно важной задачей является логическое и техническое обеспечение совместной работы в масштабе текущего времени коллективов людей и вычислительных машин. Такие структуры должны позволять руководителям разных уровней использовать память и вычислительную мощь машин для проверки соответствия поставленных задач изучаемым явлениям и для оценки последствий принимаемых решений.

Во всех случаях при любом предвидимом уровне развития техники управления роль человека — способного, знающего, опытного руководителя — в центре и на местах остается решающей. Однако требования к подготовке, знаниям и ответственности человека — ведущего участника системы управления — неизмеримо повышаются.

Во всех случаях при любом предвидимом уровне совершенствования формальных методов роль неформальной теории, изучающей объективные закономерности развития природы и общества, остается определяющей для сравнения и качественной оценки путей развития экономики. Однако качественный анализ не противопоставляется количественному: они тесно связаны и взаимно дополняют друг друга. Общественные науки удесятерят свои возможности, вооружившись математикой и вычислительными машинами.

Экономическая наука, творчески развивающая ленинские идеи о социалистическом хозяйствовании, оснащенная математическим аппаратом, вычислительной техникой и современными системными принципами, становится эффективной производительной силой общества — важным фактором построения материально-технической базы коммунизма.

ЛИТЕРАТУРА

Аллен (Allen R. G. D.)
1. Mathematical Analysis for Economists. St. Martin's Press, 1938.
2. Математическая экономика. Изд-во иностранной литературы, 1963.
3. Macro-economic Theory: A Mathematical Treatment, St. Martin's Press, 1967.

Американское экономическое общество (American Economic Association)
1. Readings in Price Theory, Irwin, 1952.
2. (with Royal Economic Society) Surveys of Economic Theory, 3 vols. St. Martin's Press, 1966.

Баумоль (Baumol W. J.)
1. Economic Dynamics. Macmillan, 1951.
2. Экономическая теория и исследование операций. Изд-во «Прогресс», 1965.

Бегл (Begle E. G.)
«A Fixed Point Theorem» Annals of Mathematics, № 51, p. 544—550, 1950.

Беллман (Bellman R. E.)
1. Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, 1953.
2. Динамическое программирование. Изд-во иностранной литературы, 1960.
3. Введение в теорию матриц. Изд-во «Наука», 1969.

Беллман и Дрейфус (Bellman R. E. and Dreyfuss S. E.)
Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, 1962.

Берж (Berge C.)
Теория графов и ее применения. Изд-во иностранной литературы, 1962.

Блэкорби (Blackorby C.)
Rational Rules for Intertemporal Decision Making (unpublished dissertation). Johns Hopkins Univefrsity, 1967.

Брауэр (Brauer A.)
«Limits for the Characteristic Roots of a Matrix». Duke Mathematical Journ., № 13, 387—395, 1946.

Бук (Buck R. C.)
Advanced Calculus, McGraw-Hill, 1956.

Бхагвати (Bhagwati J.)
«The Pure Theory of International Trade: A Survey», American Economic Association [2], v. 2.

Болтянский В. Г.
Математические методы оптимального управления. Изд-во «Наука», 1969.

Вальд (Wald A.)
«On Some Systems of Equations of Mathematical Economics». Econometrica, № 19, p. 368—403, 1951.

Валентине (Valentine F. A.)
Convex Sets, McGraw-Hill, 1964.

Вентцель Е. С.
Введение в исследование операций. Изд-во «Советское радио», 1964.

Вонг (Wong Y. K.)
Some Mathematical Concepts for Linear Economic Models». In Morgenstern.

Вудбари (Woodbury M. A.)
«Properties of Leontief-Type Input-Output Matrices». In Morgenstern.

Гантмахер Ф. Р.
1. Applications of the Theory of Matrices, Intercience, 1959.
2. Теория матриц. Изд-во «Наука», 1967.

Гасс (Gass S. I.)
Линейное программирование (методы и приложения). Физматгиз, 1961.

Гейл (Gale D.)
1. Теория линейных экономических моделей. Изд-во иностранной литературы, 1963.
2. «Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities». In Koopmans [I].
3. «The Law of Supply and Demand», Mathematica Scandinava, № 3, p. 155—169, 1955.
4. Замкнутая линейная модель производства (сборник Кун и Таккер [2])

Герштенхабер (Gerstenhaber M.)
«Theory of Convex Polyhedral Cones». In Koopmans [I].

Голдберг (Goldberg S.)
Introduction to Difference Equations, Wiley, 1961.

Голдман и Таккер (Goldman A. J. and Tucker A. W.)
1. Теория линейного программирования (сборник Кун и Таккер [2])
2. Многогранные выпуклые конусы (сборник Кун и Таккер [2])

Гельфанд И. Л.
Лекции по линейной алгебре. ОГИЗ, 1948.

Гольштейн Е. Г. и Юдин Д. Б.
Новые направления в линейном программировании. Изд-во «Советское радио», 1966.

Гудвин (Goodwin R. M.)
«The Multiplier as Matrix». Economic Journ., № 59, p. 537—555, 1949.

Данциг (Dantzig G.)
«Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalites». In Koopmans [I].

Дебре (Debreu G.)
1. Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Wiley, 1959, Cowles Monograph 17.

2. «New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis». International Economic Review, № 3, p. 257—273, 1962.

Дебре, Херштейн (Debreu G. and Herstein I. N.)
«Nonnegative Square Matrices», Econometrica, № 21, p. 597—607, 1953.

Дебре, Скарф (Debreu G. and Scarf H.)
«A limit Theorem on the Core of an Economy, » International Economic Review, № 4, p. 235—246, 1963.

Дорфман, Самуэльсон и Солоу (Dorfman R, Samuelson P. A. and Solow R.)
Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill, 1958.

Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.
Линейное и выпуклое программирование. Изд-во «Наука», 1964.

Йоргенсон (Jorgenson D. W.)
«On Stability in the Sense of Harrod», Economica, № 27, p. 243—248, 1960.

Какутани (Kakutani S.)
«A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem». Duke Mathematical Journ., № 8, p. 457—458, 1941.

Каплан (Kaplan W.)
Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, 1958.

Кар, Хоу (Carr C. R. and Howe C. W.)
Quantitative Decision Procedures in Management and Economics. McGraw-Hill, 1964.

Карлин (Karlin S.)
1. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Изд-во «Мир», 1964.
2. «Positive Operators». Journ. of Mathematics and Mechanics, № 8, p. 907—937, 1959.

Карпелевич Ф. И. и Садовский Л. Е.
Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Физматгиз, 1963.

Кемени, Моргенштерн и Томпсон (Kemeny J. G., Morgenstern O. and Thompson G. L.)
«A Generalization of the Von Neumann Model of an Expanding Economy». Econometrica, № 24, 115—135, 1956.

Корден (Corden W. M.)
Recent Developments in the Theory of International Trade. International Finance Section, Princeton University, Special Paper in International Economics, № 7, 1965.

Кун (Kuhn H. W.)
1. «A Note on the Law of Supply and Demand», Mathematica Scandinava, № 4, 143—146, 1956.
2. Об одной теореме Вальда (сборник Кун и Таккер [2])

Кун и Таккер (Kuhn H. W. and Tucker A. W.)
1. «Nonlinear programming», In Neyman.
2. Сборник «Линейные неравенства и смежные вопросы» под ред. Куна и Таккера, Изд-во иностранной литературы, 1959.

Купер (Cooper R. N.)
National Economic Policy in an Integrated World. Council on Foreign Relations, 1967.

Купманс (Koopmans T. C.)

1. (Ed) Activity Analysis of Production and Allocation. Wiley, 1951, Cowles monograph 13.
2. Three Essays on the State of Economic Science, McGraw-Hill, 1957.
3. «Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities», in Koopmans [I].
4. «Economic Growth at a Maximal Rate», Quarterly Journ. of Economics, № 78, p. 355—394, 1964; also in Malinvaud and Bacharach.
5. «Stationary Ordinal Utility and Impatience», Econometrica, № 28, p. 287—309, 1960.

Купманс, Диаманд и Вильямсон (Koopmans T. C., Diamond P. and Williamson R. E.)
«Stationary Utility and Time Perspective», Econometrica, № 32, p. 82—100, 1964.

Курант (Courant R.)
Differential and Integral Calculus, 2 vols., Interscience, 1936 and 1937.

Курант и Роббинс (Courant R. and Robbins H.)
What is Mathematics? Oxford University Press, 1941.

Ланкастер (Lancaster K. J.)
1. «The Theory of Qualitative Linear Systems». Econometrica, № 33, p. 395—408, 1965.
2. «The Solution of Qualitative Comparative Static Problems». Quarterly Journ. of Economics, № 80, p. 278—295, 1966.
3. «A New Approach to Consumer Theory». Journ. of Political Economy, № 74, p. 132—157, 1966.
4. «Change and Innovation in the Technology of Consumption». American Economic Review. (Papers and Proceedings), № 14—23, May 1966.

Ла Салле и Лефшец (La Salle J. and Lefschetz S.
Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, 1961.

Леонтьев В. В. (Leontief W. W.)
1. «Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States». Review of Economic Statistics, № 18, p. 105—125, 1936.
2. The Structure of the American Economy 1919—1929. Harvard University Press, 1941.
3. Input-Output Economics. Oxford University Press, 1966.
4. Исследование структуры американской экономики. Теоретический и эмпирический анализ по схеме «затраты — выпуск». Госстатиздат, 1958.

Лефшец (Lefschetz S.)
Introduction to Topology, Princeton University Press, 1949.

Лэди (Lady G.)
The Structure of Economic Models. Unpublished dissertation, Johns Hopkins University, 1967.

Лэнг (Lang S.)
Linear Algebra. Addison-Wesley, 1966.

Малинвауд и Бэчарэч (Malinvaud E. and Bacharach M.)
Eds., Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning. St. Martin's Press, 1967.

Мальцев А. И.
Основы линейной алгебры. ОГИЗ, 1948.
Мак-Кензи (McKenzie L.)
1. «On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems». Econometrica, № 22, p. 147—166, 1954.
2. «On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market». Econometrica, № 27, p. 54—71, 1959.
3. «Matrices and Economic Theory». In Arrow Karlin and Suppes.
4. «The Dorfman — Samuelson — Solow Turnpike Theorem». International Economic Review, № 4, p. 29—43, 1963.
5. «Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model». Econometrica, № 31, p. 165—180, 1963.
6. «Maximal Paths in the Von Neumann Model». In Malinvaud and Bacharach.
Мандел (Mundell R. A.)
«The Appropriate Use of Monetary and Fiscal Policy for Internal and External Stability». International Monetary Fund Staff Papers, № 9, p. 70—77, 1962.
Метцлер (Metzler L.)
«A Multiple Region Theory of Income and Trade». Econometrica, № 18, p. 329—354, 1950.
Моргенштерн (Morgenstern O.)
Ed., Economic Activity Analysis. Wiley, 1954.
Моришима (Morishima M.)
1. Equilibrium Stability and Growth, Oxford University Press, 1964.
2. «Proof of a Turnpike Theorem: the No Joint Production Case». Review of Economic Studies, № 28, p. 89—97, 1961.
Мозак (Mosak J. L.)
General Equilibrium Theory in International Trade. Principia Press, 1944, Cowles Monograph 7.
Нейман (Neyman J.)
Ed., Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, 1951.
Никайдо (Nikaidо H.)
"Persistence of Continual Growth near the Von Neumann Ray: a Strong Version of the Radner Turnpike Theorem". Econometrica, № 32, p. 151—162, 1964.
Патрик (Patrick J.)
Unpublished dissertation. Columbia University, 1968.
Петровский И. Г.
Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во «Наука», 1964.
Понтрягин Л. С.
Обыкновенные дифференциальные уравнения. "Наука", 1970.
Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
Математическая теория оптимальных процессов. Изд-во «Наука», 1969.
Оганян Р. А.
Введение в область магистральных теорем. В сб., «Математические методы в экономике» под ред. Багриновского. Новосибирск, Изд-во «Наука», Сибирское отделение, 1968.

Раднер (Radner R.)
«Paths of Economic Growth That Are Optimal With Regard Only to Final States: A Turnpike Theorem». Review of Economic Studies, № 28, p. 98—104, 1961.
Рамсей (Ramsey F.)
«A Mathematical Theory of Saving.» Economic Journ, № 38, p. 543—559, 1927.
Роббинс (Robbins L.)
An Essay on the Nature and Significance of Economic Science. Macmillan, London, 1932.
Самуэльсон (Samuelson P. A.)
1. Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press, 1948.
2. Collected Scientific Papers. Ed. Stiglitz, 2 Vols., MIT Press, 1966.
3. «A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior and an Addendum». Paper 1 in [2].
4. «Efficient Paths of Capital Accumulation in Terms of the Calculus of Variations». In Arrow, Karlin and Suppes, Paper 26 in [2].
5. «Abstract of a Theorem Concerning Substititability in Open Leontief Models». In Koopmans [I], Paper 36 in [2].
Слуцкий Е. Е. (Slutsky E. E.)
«On the Theory of the Budget of the Consumer». In American Economic Association [I], originally published in 1915.
Солоу и Самуэльсон (Solow R. M. and Samuelson P. A.)
«Balanced Growth under Constant Returns to Scale». Econometrica, № 21, p. 412—424, 1953, Paper 24 in Samuelson [2].
Строц (Strotz R.)
«Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization». Review of Economic Studies, № 23, p. 165—180, 1956.
Таккер (Tucker A. W.)
Двойственные системы однородных линейных соотношений (сборник Кун и Таккер [2])
Тинберген (Tinbergen J.)
On the Theory of Economic Policy. North Holland, 1952.
Узава (Uzawa H.)
«The Stability of Dynamic Processes». Econometrica, № 29, p. 617—631, 1961.
Фань Цзи (Fan K.)
«On Systems of Linear Inequalities». In Kuhn and Tucker [2].
Фаррел и Хан (Farrel M. J. and Hahn F. H.) (for the Economic Society):
Problems in the Theory of Optimal Accumulation, Oliver and Boyd, 1967 (this is a hard cover reprint of Review of Economic Studies), № 34, p. 1—151, 1967.
Фон Нейман (Von Neumann J.)
"A Model of General Economic Equilibrium». Review of Economic Studies, № 13, p. 1—9, 1945.
Форсайт (Forsyth A. R.)
Calculus of Variations. Dover, 1960, originally published in 1926,

Фриш (Frisch R.)
Maxima and Minima: Theory and Economic Applications, Rand McNally, 1966.
Хан (Hahn F. H.)
«Gross Substitutes and the Dynamic Stability of General Equilibrium". Econometrica, № 26, p. 169—170, 1958.
Хан и Мэтьюз (Hahn F. H. and Matthews R. C.)
«The Theory of Economic Growth: A Survey». In American Economic Association [2], Vole 2.
Хикс (Hicks J. R.)
Value and Capital. Oxford University Press, 1939.
Хедли (Hadley G.)
1. Linear Algebra. Addison-Wesley, 1961.
2. Linear Programming. Addison-Wesley, 1962.
3. Нелинейное и динамическое программирование. Изд-во «Мир», 1967.
Хелпс (Phelps, E. S.)
«Second Essay on the Golden rule of Accumulation». American Economic Rewiew, 55, p. 793—814, 1965.
Хендерсон и Квандт (Henderson J. H. and Quandt R. E.) Microeconomic Theory. McGraw-Hill, 1958.
Хестенс (Hestenes M. R.)
Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Wiley, 1966.
Хэнкок (Hancock H.)
Theory of Maxima and Minima, Dover, 1960, originally published in 1917.
Чакраварти (Chakravarty S.)
«Alternative Preference Functions in Problems of Investment Planning on the National Level». In Malinvaud and Bacharach.
Чианг (Chiang A. C.)
Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw—Hill, 1967.
Чипмэн (Chipman J. S.)
1. «The Multisector Multiplier». Econometrica, 1950, № 18, p. 355—374.
2. «A Survey of the Theory of International Trade». 3 parts, Econometrica, 1965, № 33, p. 477—519; 1965, № 33, p. 685—760; 1966, № 34, p. 18—76.
Черников
Линейные неравенства. Изд-во «Наука», 1968.
Фихтенгольц Г. М.
Курс дифференциального и интегрального исчисления. ОГИЗ, 1949.
Шелл (Shell K.)
Essays on the Theory of Optimal Economic Growth. MIT Press, 1967.
Эйленберг, Монтгомери (Eilenberg S. and Montgomery D.)
«Fixed Point Theorems of Multi-Valued Transformations». American Journal of Mathematics, № 68, p. 214—222, 1946.
Эльсгольца Л. Э.
Вариационное исчисление. Гостехиздат, 1952
Эрроу (Arrow K. J.)

«Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case». In Koopmans [I].

Эрроу и Гурвиц (Arrow K. J. and Hurwicz L.)
1. «On the Stability of Competitive Equilibrium». Econometrica, № 26, p. 522—552, 1958.
2. «Competitive Stability under Weak Gross Substitutability: the Euclidean distance Approach». International Economic Review, № 1, p. 38—49, 1960.

Эрроу, Гурвиц, Узава (Arrow K. J., Hurwicz L. and Uzawa H.)
Исследования по линейному и нелинейному программированию. Изд-во иностранной литаратуры, 1962.

Эрроу, Блок и Гурвиц (Arrow K. J., Block H. D. and Hurwicz L.)
"On the Stability of Competitive Equilibrium, II». Econometrica, № 27, p. 82—109; 1959.

Эрроу, Дебре (Arrow K. L. and Debreu G.)
«Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy». Econometrica, № 22, p. 265—290, 1954.

Эрроу, Карлин, Саппес (Arrow K. L., Karlin S. and Suppers P.)
Eds., Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959. Stanford University Press, 1960.

Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.
Линейное программирование. Физматгиз, 1963.

Ямане (Yamane T.)
Mathematics for Economists. Prentice-Hall, 1962.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ *)

Глава 2

1. K_1 — выпуклый замкнутый многогранник (плоский треугольник); ограничения $\Phi^1 \geqq -3$ и $\Phi^3 \leqq 3$ не существенны. K_2 — выпуклый замкнутый многогранник (плоский четырехугольник); ограничение $\Phi^3 \leqq 3$ не существенно. K_3 — пустое множество.

2. Условия глобального оптимума выполняются при $b \geqslant 1$,

$$c \geqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

Глава 3

1. Допустимое множество не ограничено сверху, поэтому задача не разрешима. Допустимое множество двойственной задачи пусто.

2. Решение проводится по той же схеме, что и в примере 1 из § 3.4.

3. Все базисные решения (0,3,0,0), (3/2,0,3/4,0), (0,0,3/4,3/2) являются допустимыми базисными решениями. (0,3,0,0) — оптимальное решение задачи. Двойственная задача имеет вид:

$$\min \{3y_1 + 6y_2\}$$
$$y_1 + 3y_2 \geqq 1$$
$$y_1 + 2y_2 \geqq 2$$
$$2y^3 + 2y_2 \geqq 1$$

Оптимум достигается на прямой $y_1 + 2y_2 = 2$ при $y_1 \geqq -1$, $y_2 \geqq -1$.

4. Утверждение справедливо, вообще говоря, если x^* не является решением новой задачи. В противном случае $x_k^{**} \geqslant x_k^*$.

6. Задача о составлении диеты имеет вид:

$$\min \sum_j p_j x_j,$$
$$\sum_j a_{ij} x_j \geqq b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$x_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где a_{ij} — количество i-го питательного вещества, содержащееся в единице j-го продукта; b_i — минимальное количество i-го питательного вещества, необходимое в диете; x_j — количество j-го продукта в диете и p_j — цена единицы j-го продукта.

Исследование влияния условия, ограничивающего потребление k-го питательного вещества заданным уровнем l_k, требует учета дополнительного условия $(Ax)_k \leqq l_k$.

7. См., например, гл. 2 у Юдина Д. Б. и Гольштейна Е. Г.

Глава 4

1. Оптимумы существуют при любых b.

2. У к а з а н и е. Рассмотреть задачу

$$\max \Phi(v), \quad v'v = 1.$$

---

*) Составитель ответов и указаний к упражнениям Березнева Т. Д.

Записать для нее функцию Лагранжа и рассмотреть условие первого порядка.

3. Оптимальное распределение задается решением задачи

$$\max u_1^{\alpha} u_2^{1-\alpha},$$
$$x_{11}+x_{12}=l_1,$$
$$x_{21}+x_{22}=l_2,$$
$$x_{ij} \geqq 0, \quad i, j=1, 2.$$

Интерпретация множителей Лагранжа дается так же, как в примере из § 4.2. Оптимальные значения множителей Лагранжа соответствуют предельным общественным оценкам ресурсов.

5. Пусть $K_1=\{x \mid g(x)=0\}$, $K_2=\{x \mid g(x)=0,\ h(x)=0\}$. Тогда $\max\limits_{K_1} f \geqslant \max\limits_{K_2} f$. При $k=1$ $\max\limits_{K_1} f=\max\limits_{K_2} f$

6. См. упражнение 3.

Глава 5

1. Условие глобального минимума выполняется при $b \leqslant 1$, при $b \geqslant 1$ — глобальный максимум. Связь между условиями глобального оптимума и условиями второго порядка устанавливается через матрицу Гессе целевой функции.

2. Пусть x^* — решение задачи (а), $K_1=\{x \mid g(x)=0\}$, $K_2=\{x \mid g(x)=0,\ h(x) \leqq 0,\ x \geqq 0\}$; $g_i^*=g_i(x^*)$. Тогда $\max\limits_{K_1} f \geqslant \max\limits_{K_2} f$.
Кроме того, x^* может быть оптимальной точкой задачи (б), если $k \geqslant 1$ при $g_1^*/g_2^* > 0$.

3. $a \geqslant 0$. Оптимум всегда условный, глобальный, граничный.
При $a \leqslant 1$ условие $x_1^2+x_2^2 \leqslant 1$ не существенно.
При $a \geqslant \sqrt{2}$ условие $x_1+x_2 \leqslant a$ не существенно.

4. $x_1=\dfrac{24}{17+21a}$; $\quad x_2=\dfrac{3+15a}{17+21a}$;
$x_3=\dfrac{12(a+1)}{17+21a}$; $\quad x_4=\dfrac{24a}{17+21a}$.

5. Указание. Использовать определение внутреннего равновесия и учесть условия первого порядка. Связь между условиями оптимальности и условиями максимизации дохода устанавливается так же, как в примере из § 4.2.

Глава 6

1. d_{ij} — косвенная потребность в i-м продукте для j-й отрасли; d_{0j} — косвенная потребность в труде для j-й отрасли.

а) $d_{11}=4/3$; $d_{12}=1/2$; $d_{21}=1/3$; $d_{22}=4/3$; $d_{01}=2$; $d_{02}=1$. б) $p=(2/3;\ 1/3)$. в) $w=1/6$. г) суммарный выпуск $x=(2,\ 4)^T$, суммарная потребность в труде равна 8; д) суммарный выпуск $x=(3,\ 4)^T$, суммарная потребность в труде равна 10. 2. Оптимален процесс $(1/6;\ 1/3\ \ 0)^T$.

Глава 7

1. Указание. Доказательство аналогично доказательству теоремы об эффективности § 7.3.

2. Указание. Показать, что при условиях упражнения все точки грани, содержащей внутреннюю эффективную точку, принадлежат границе производственного конуса.

3. Указание. Использовать тот факт, что через эффективную грань можно провести гиперплоскость, разделяющую положительный ортант и производственный конус. При доказательстве могут быть использованы рассуждения, аналогичные приведенным в § 7.2.

4. Указание. Использовать результат упражнения 3.

Математические дополнения

Глава Д1

1. в) (1,0). г) (—1,1). 2. Не верно.

Глава Д2

1. Векторы x^1, x^3 и x^4 образуют базис системы векторов, причем $x^2 = x^1 - 2x^3$.

2. в) $(x^1, x^3) = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$.
г) Например, вектор $x^2 = (0, 1, 1)$.
д) $b = x^1 + 2x^3 + 4x^4$.
е) $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $AB^T \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 21 & 14 \end{bmatrix}$, $A^TB = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 5 \\ 17 & 14 & 24 \end{bmatrix}$.

4. а) $bc^T = 5$. б) $bA = (7, 9)$.
в) $Ab^T = (4, 11)^T$ г) $cA = (9, 7)$.
д) $AB = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 19 & 22 \end{bmatrix}$. е) $BA = \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 14 & 17 \end{bmatrix}$. ж) $bABc^T = 199$.

Глава Д3

1. Решение однородной системы уравнений $Ax = 0$;

$$x_1 = c,\quad x_2 = -5c,\quad x_3 = 2c.$$

Решение неоднородной системы уравнений $Ax = b$:

$$x_1 = c,\quad x_2 = -1-5c,\quad x_3 = 2 + 2c,$$

где c — произвольный параметр.

2. Очевидно, справедливы равенства

$$-2A^1 + A^2 + A^3 = 0 \quad\text{и}\quad 5A_1 + 3A_2 - 7A_3 = 0,$$

где A^j — j-й столбец матрицы A, а A_i — i-я строка.

Глава Д4

1. Точки (2, 1, 2, 1, 1) и (1, 1, 2, 2, 1) лежат в одном и том же полупространстве.

2. а) Объединение выпуклых множеств

$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$,

$S_2 = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ не выпукло.

б) Пересечение невыпуклых множеств

$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geqslant -1, \quad x_2 \leqslant |x_1| + 1\}$,

$S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \leqslant 1, \quad x_2 \geqslant -1 - |x_1|\}$ выпукло.

в) Любое невыпуклое множество при $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$.

3. а) Не выпукло. б) Не выпукло. в) Выпукло. г) Выпукло.

5. а) Заостренный; б) Незаостренный; $(-1, 1)$, $(3, -6)$, $(5, 5)$ либо $(-1, 1)$, $(3, -6)$, $(0, 2)$.

Глава Д5

1. а) $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{11}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

б) $x = \left(-\frac{4}{3}, \ \frac{5}{3}, \ -\frac{1}{3}\right)^T$.

в) $\det A = 6, \quad D^{(1)} = -8, \quad D^{(2)} = 10, \quad D^{(3)} = -2,$

$$x = \left(-\frac{4}{3}, \ \frac{5}{3}, \ -\frac{1}{3}\right)^T.$$

2. а) $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1. \ v^1 = \left(\frac{2}{3}, 1\right), \quad v^2 = (1, 1)$.

4. $e^A = e^2 \begin{bmatrix} 3-2e & 2e-2 \\ 3-3e & 3e-2 \end{bmatrix}$.

5. $\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i, \quad v^1 = (i, 1), \quad v^2 = (-i, 1)$.

Глава Д6

1. а) Квадратичная форма положительно определена.
   б) Неопределенная квадратичная форма.
   в) Квадратичная форма отрицательно определена.
   г) Неопределенная квадратичная форма.
2. а) Квадратичная форма отрицательно определена.
   б) Квадратичная форма положительно определена.
3. Форма положительна.
4. Указание. Вычислить характеристические корни матрицы A.

Глава Д7

1. а) Неразложима. б) Разложима.

2. а) $\lambda^* = \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1, \quad v^* = v^1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad v^2 = (-1, 1).$

б) $$\lambda^* = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{2},$$

$$v^* = v^1 = \left(\frac{\sqrt{33}-1}{4}, 1\right), \quad v^2 = \left(-\frac{\sqrt{33}+1}{4}, 1\right).$$

в) $\lambda^* = \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad v^* = v^1 = \left(\frac{2}{3}, 1\right), \quad v^2 = (1, 0).$

3. Например, $b = -9$. $D = \begin{bmatrix} \frac{17}{36} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Глава Д8.

1. а) $\nabla f = (15x_1^2 - 2x_2, \ -2x_1 + 6x_2)$.

б) $D_v f(x) = \nabla f \cdot v = 5x_1^2 - \frac{4}{3} x_1 + \frac{10}{3} x_2$. в) $H = \begin{bmatrix} 30x_1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

2. а) $x^* = (0, 0)$. x^* — единственная точка минимума.
   б) Критические точки: $(x^*)^1 = (1, 1)$, $(x^*)^2 = (1, -1)$, $(x^*)^3 = (-1, 1)$, $(x^*)^4 = (-1, -1)$.
   $(x^*)^2$ — точка максимума, $(x^*)^4$ — точка минимума.
   в) Критические точки $(x^*)^1 = (1, 0)$; $(x^*)^2 = (-1, 0)$ являются точками минимума.

5. Указание. Использовать теорему Эйлера

Глава Д9

1. а) Отображение не является ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу. Однако, неподвижная точка существует.

б) Отображение полунепрерывно сверху и удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. Неподвижная точка $x^* = (0.$

в) Отображение непрерывно, но не удовлетворяет следующему условию теоремы Какутани: $T(x)$ компактно и выпукло для любого x. Неподвижных точек нет.

Глава Д10

1. а) $y(t) = \frac{1}{e^t \sqrt{e^t}} (k_1 e^t + 2k_2, \ k_1 e^t + k_2)$.

б) $y(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t (k_1 + (-1)^t 2k_2, \ k_1 + (-1)^t k_2)$.

2. а) $y(t) = e^{-t} (ik^* e^{-it} - ike^{it}, \ k^* e^{-it} + ke^{it})$.

б) $y(t) = (i)^t (-ki + (-1)^t k^* i, \quad k + (-1)^t k^*)$.

4. $y(t) = (3e^t - 2e^{-t}, \ 3e^t - e^{-t})$.

5. $y(t) = e^{-t} (\cos t + \sin t, \ \cos t - \sin t)$.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II. СТАТИЧЕСКИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Часть III. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Часть IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ